

## Physique statistique

M. Philippe NOZIÈRES, membre de l'Institut  
(Académie des Sciences), professeur

*Cours : Instabilités interfaciales*

Cet enseignement complète celui donné l'année précédente. Alors que le cours de 1988 s'attachait à *décrire* des instabilités dans des contextes très divers, le cours de 1989 a mis l'accent sur les *mécanismes généraux* communs à tous ces phénomènes : génération d'harmoniques, saturation et stabilité, dérive des structures, etc. Faute de temps, l'analyse s'est limitée au cas restreint des *structures cellulaires*, déjà très riche.

### I. ÉQUATION DE MOUVEMENT D'UN INTERFACE. INSTABILITÉS PARAMÉTRIQUES

Pour un système purement dissipatif, l'équation qui régit le déplacement  $\zeta(r,t)$  est du premier ordre en temps, en général non locale et retardée. Si l'évolution est lente à l'échelle de ce retard, on peut utiliser une approximation *quasistatique*. L'équation de mouvement devient instantanée, développable en puissance de l'amplitude. Pour une instabilité *cellulaire* de  $k$  fini, on peut analyser  $\zeta$  en série de Fourier :  $\zeta_k$  est fonction de toutes les composantes  $\zeta_k$ . Le problème se simplifie au voisinage de la bifurcation : *les harmoniques sont alors asservis au fondamental*, et l'on peut écrire pour ce dernier une *équation d'amplitude* complexe, du type Landau Ginzburg, qui caractérise la nature de la bifurcation, surcritique ou sous-critique.

Plus généralement, l'instabilité peut dépendre intrinsèquement du temps. On peut par exemple avoir une bifurcation de Hopf qui conduit à un régime oscillant (avec des ondes progressives ou stationnaires). On peut aussi piloter une instabilité par une modulation extérieure : c'est l'*instabilité paramétrique* dont l'archétype est l'expérience de Melde sur une corde vibrante.

Un cas a été étudié en détail : l'*instabilité de Faraday* de l'interface liquide vapeur lorsque le récipient est soumis à une oscillation verticale de fréquence

$\omega$  et d'amplitude  $a$ . Cette oscillation revient à moduler la gravité dans le calcul classique de Rayleigh-Taylor. Si on se limite à un mode particulier de fréquence  $\Omega$  (fixé par la géométrie), le pompage introduit une série de fréquences satellites ( $\Omega + n\omega$ ), d'amplitude  $a^n$ . Si l'un de ces satellites résonne avec  $\Omega$ , il y a instabilité : le pompage excite toutes les fréquences  $\Omega = n\omega/2$ .

Le calcul est très simple pour l'excitation du sous harmonique  $\omega/2$ . Du fait des frottements il faut une amplitude  $a$  finie pour démarrer l'instabilité, d'autant plus grande que l'écart à la résonance  $\delta = \omega/2 - \Omega_0$  est grand ( $\Omega_0$  est la fréquence propre du mode). On peut ainsi tracer le diagramme de bifurcation dans le plan  $(\delta, a)$ .

## II. PROPAGATION ET DISPERSION : INSTABILITÉS ABSOLUES ET CONVECTIVES

A ce stade, on se limite à une équation de propagation *linéaire*, caractérisée par une relation de dispersion  $\omega(k)$ . La partie imaginaire  $k_i$  fixe le profil d'*enveloppe* du signal, qui se déplace à la vitesse  $v_{env} = \omega_i/k_i$ . La partie réelle  $k_r$  caractérise la *modulation*, qui se déplace à la vitesse de phase  $v_\phi = \omega_r/k_r$ . Un paquet d'onde se déplace à la vitesse de groupe  $v_G = d\omega_r/dk_r$ , en s'élargissant du fait de la dispersion. On veut comprendre la compétition entre *instabilité*, *dispersion* et *convection* (mesurée par  $v_G$ ) : qualitativement, le paquet d'onde est instable s'il pénètre dans une enveloppe croissante.

Pour cela, on étudie la réponse  $G(x,t)$  à une impulsion localisée dans l'espace et dans le temps. Aux grands temps, et dans un repère  $R$  de vitesse  $v$  ( $x = vt$ ), le comportement asymptotique s'obtient par la méthode du col : il est contrôlé par la région de phase stationnaire, telle que :

$$\text{Im} \frac{d\omega}{dk} = 0, \quad \text{Re} \frac{d\omega}{dk} = v$$

Ces conditions fixent le vecteur d'onde asymptotique  $k^*(v)$  (en général complexe). La croissance dans le repère  $R$  est contrôlée par :

$$\sigma = \omega_i - kv_i$$

Pour un système instable,  $\sigma(v)$  présente un maximum  $\sigma_m > 0$  pour une vitesse  $v_m$  et s'annule pour  $v = v_-$  ou  $v_+$ . Le paquet d'onde asymptotique a un maximum qui avance à la vitesse  $v_m$  et croît au rythme  $\sigma_m$ . Il est flanqué de deux points « neutres » de vitesse  $v_- < v_m < v_+$  : il *s'élargit*. Dans le repère du laboratoire,  $v = 0$ ,  $\sigma$  est égal à  $\sigma_0$ . Si  $\sigma_0 > 0$ , l'instabilité est *absolue* (l'amplitude en tout point  $x$  diverge). Si  $\sigma_0 < 0$ , elle est *convective* (le signal s'évacue plus vite qu'il ne croît).

On vérifie facilement que :

$$\sigma = k_i [v_{env} - v_G] = -k_i^2 \frac{\partial v_{env}}{\partial k_i}$$

Le maximum du paquet d'onde correspond à  $k^*$  réel, maximum de  $\omega_i(k)$ . Les points neutres sont des extremas de  $v_{env}(v)$ . On peut illustrer ces résultats sur des exemples concrets (modèle de Landau Ginzburg, instabilités à  $k$  fini) : à chaque fois il faut identifier les points cols et s'assurer que le contour d'intégration les franchit. Les instabilités du type Kelvin-Helmholtz posent problème, car  $\omega(k) \sim |k|$  n'est pas analytique : on peut tourner la difficulté par une transformation de Hilbert.

### III. STRUCTURES CELLULAIRES : DÉVELOPPEMENT EN AMPLITUDE

Le vecteur d'onde primaire de la structure,  $k$ , est fixé. On peut développer  $\zeta(x, t)$  en série de Fourier, de coefficients  $a_n$ . Les équations pour  $a_n$  doivent respecter les symétries de *translation* et de *réflexion* (ce qui n'exclut pas une rupture spontanée de symétrie de la solution !). En général, le système d'équations non linéaires pour  $a_n$  est insortable. Il se simplifie au voisinage d'une bifurcation, lorsque  $a_1$  évolue lentement. Les *harmoniques sont alors asservis au fondamental*,  $a_{n>1}$  dépendant de la valeur instantanée de  $a_1$ . On peut écrire une équation fermée pour  $a_1$ .

#### a) *Instabilités statiques*

La phase de  $a_1$  est un simple choix d'origine. En situation d'asservissement, on arrive à une équation de Landau Ginzburg qui permet de classer les bifurcations (le système devient potentiel même s'il ne l'était pas au départ).

Si l'on s'éloigne de la bifurcation, les harmoniques ne « suivent » plus. On peut comprendre qualitativement les diverses possibilités en tronquant arbitrairement le signal à l'harmonique 2. Le couplage mode-mode comprend un couplage d'intensité  $\ell |a_1|^2 |a_2|^2$  et un terme d'*hybridation*  $\lambda a_1^2 a_2^*$ . Si  $\lambda = 0$ , les instabilités de  $a_1$  et  $a_2$  peuvent coopérer ou s'opposer : on peut ainsi tracer un diagramme d'état qui décrit la coexistence des deux modes (apparition d'harmonique  $a_2$  ou de sous harmonique  $a_1$ ). Si  $\lambda \neq 0$ , la présence du fondamental  $a_1$  implique toujours un taux d'harmonique  $a_2$  fini. En revanche, l'apparition du sous harmonique  $a_1$  reste une transition franche (doublement de période).

En principe, l'harmonique 2 induit par un fondamental  $a_1 \cos kx$  devrait respecter la symétrie de réflexion. En fait, cette symétrie peut être spontanément rompue. Un calcul phénoménologique simple montre que cette transition n'apparaît qu'aux ordres élevés en  $a$ . Si le système est potentiel, la structure déformée reste immobile. En revanche elle *dérive* pour un système non potentiel, une situation prédite par Coulet et souvent observée : la vitesse de dérive change de signe lorsqu'on inverse la déformation impaire.

b) *Instabilités oscillantes*

Le signal est alors une superposition de deux ondes progressives droite et gauche : leur verrouillage est un degré de liberté supplémentaire. En exploitant l'invariance par translation spatiale et temporelle, on peut séparer des équations d'amplitude et de phase. Les équations d'amplitude, du type Landau-Ginzburg, contrôlent la nature de la bifurcation et le taux d'ondes stationnaires (le paramètre essentiel est le couplage d'intensité entre ondes droite et gauche). Les équations de phase fixent la vitesse de phase  $v_\phi$  et la vitesse de dérive  $v_D$ . A noter que  $v_\phi$  dépend de  $k$  (dispersion) et de l'amplitude (non linéarité) — une combinaison qui peut conduire à des ondes solitaires stables.

La variation de fréquence avec l'amplitude suffit à faire saturer une instabilité (la « résonance » se désaccorde lorsque l'amplitude augmente). Cette situation a été illustrée sur le cas de l'instabilité de Faraday, où tout peut se calculer explicitement pour un mode stationnaire donné. Lorsqu'on varie l'écart à la résonance  $\delta = \omega/2 - \Omega_0$ , la bifurcation passe de surcritique à souscritique : on peut tracer un diagramme de bifurcation détaillé dans le plan (fréquence – amplitude).

IV. *STABILITÉ D'UN ÉTAT CELLULAIRE*

Elle concerne les déformations à grande échelle d'une structure stationnaire, affectant soit la *phase* de la structure (modulation de longueur d'onde), soit sa *position* (notion d'interface effectif). Le calcul est simple pour une modulation faible, de vecteur d'onde  $q \ll k$  : on peut alors séparer les fluctuations de phase et d'amplitude.

a) *Instabilité de phase*

Le calcul linéarisé doit tenir compte de la réflexion de Bragg sur la périodicité sous-jacente. Les fluctuations *longitudinales* d'une structure en rouleaux conduisent à l'*instabilité d'Eckhaus* (fluctuation spontanée de longueur d'onde due à une diffusion de phase négative). Pour une bifurcation centrée en  $k_c$ , l'instabilité d'Eckhaus se déclare sur les ailes du domaine d'existence des cellules. On peut aussi étudier l'instabilité transverse, dite « zig-zag », correspondant à une ondulation des rouleaux : elle se déclare si  $k < k_c$ . Ces deux instabilités limitent le domaine d'existence de la structure.

La linéarisation en amplitude des fluctuations n'est pas essentielle. On peut écrire une équation d'amplitude non linéaire du type Landau-Ginzburg qui permet, par exemple, d'étudier la structure des défauts. Aux grandes échelles, le problème se simplifie encore plus : il suffit de caractériser la *phase locale* de la fluctuation,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , dont le gradient est le vecteur d'onde local.  $\varphi$  est

régi par une équation de diffusion, dont les coefficients sont liés à la compressibilité et à la raideur des rouleaux. Loin de la bifurcation, le domaine d'instabilité peut être profondément modifié, comme le confirment les calculs numériques en solidification directionnelle.

L'équation de phase se généralise aisément au régime non linéaire. On montre ainsi que la bifurcation d'Eckhaus est *souscritique* : une fois démarrée l'instabilité croît sans limite (d'un point de vue différent, il existe un point col au-dessous de la bifurcation, équivalent à un « germe critique »). L'évolution ultérieure échappe à toute équation de phase ; elle peut conduire à un dédoublement des crêtes (« tip splitting »), à une rupture spontanée de la symétrie de réflexion, ou même à la formation d'un *front* séparant une structure « Eckhaus stable » d'une région plane. Le problème reste ouvert, les seules données étant d'ordre numérique.

#### b) *Fluctuations de position*

On superpose à la structure cellulaire un déplacement de grande longueur d'onde  $\zeta(r,t)$ . La courbure  $\zeta''$  tend à « tordre » les arches. Peut-on écrire une équation effective pour  $\zeta$ , qui incorpore la structure « interne » de l'interface sous forme de coefficients renormalisés ?

La réponse n'est pas entièrement claire. Très certainement, il faut écrire deux équations couplées pour le déplacement  $\zeta$  et pour le vecteur d'onde local  $k$  (c'est-à-dire la densité des arches). Ces équations doivent respecter les symétries du problème — mais leur structure semble être un cas d'espèce.

#### c) *Stabilité d'une structure oscillante*

Le problème est ici plus riche du fait des variations de fréquence qui se superposent aux variations de longueur d'onde (la phase des deux ondes progressives est fonction de  $x$  et de  $t$ ). De ce fait interviennent des effets de dérive et de dispersion.

Le cas le plus simple est celui d'une onde progressive pure. Les fluctuations de phase sont pilotées par une équation du type

$$\dot{\xi} = iv \xi' + D \xi''$$

où  $v$  et  $D$  dépendent de la relation de dispersion et des non-linéarités.  $v$  est une *vitesse de dérive* de la structure, égale à la vitesse de groupe modifiée par les corrections d'amplitude.  $D$  est une *diffusivité*,  $> 0$  lorsque la structure est stable. On montre facilement que  $D$  est maximum au centre  $k_c$  de la bande d'instabilité primaire : l'instabilité d'Eckhaus se développe sur les ailes de cette bande. Mais la nouveauté est la possibilité d'avoir  $D < 0$  pour  $k = k_c$ . C'est l'instabilité de *Benjamin-Feir* (il n'existe aucune structure stable). Le mécanisme de cette instabilité est une subtile combinaison de *dispersion* et de

*non linéarité* : l'étalement d'un paquet d'onde réagit sur l'amplitude, donc sur la fréquence  $\omega = \dot{\phi}$  — d'où une contribution à  $D$  qui peut être négative.

La bifurcation d'Eckhaus est très différente du cas statique du fait de la dispersion : la modulation du vecteur d'onde  $k$  implique une modulation de la dérive  $v_G$ , qui réagit sur la dynamique de phase. La bifurcation est surcritique et non plus souscritique. Si on tient compte en outre des termes  $\sim q^3$  dans la fréquence d'Eckhaus, on obtient une équation du type Korteweg-de Vries qui peut produire des solitons (souvent observés). On a donc un comportement très divers, pouvant conduire jusqu'à des situations chaotiques.

Une discussion analogue peut se mener pour une onde stationnaire pure (les calculs sont un peu plus compliqués). Les résultats sont simples au maximum d'instabilité  $k = k_c$  : dérive à la vitesse de groupe, diffusivité  $D$  qui peut être négative (Benjamin-Feir). L'interprétation est moins claire pour  $k \neq k_c$  — en particulier la diffusivité peut redevenir positive sur les ailes de la bifurcation primaire : l'instabilité d'Eckhaus est alors renversée (on stabilise la structure en s'éloignant de  $k = k_c$ ).

## V. SÉLECTION DE LONGUEUR D'ONDE

Même en tenant compte des diverses instabilités, il subsiste une plage de  $k$  finie où une structure cellulaire métastable peut exister (la nucléation d'une arche supplémentaire implique le franchissement d'une barrière de potentiel). Une éventuelle sélection implique une structure inhomogène avec un « point faible » où les arches apparaissent spontanément. Les possibilités sont nombreuses :

- *Sélection par un profil du paramètre de contrôle  $\varepsilon$* . La région instable est limitée à  $x > 0$ . Si le profil  $\varepsilon(x)$  est très lent, l'amplitude de la structure vient « mourir » à l'origine. Le vecteur d'onde  $k$  s'ajuste à sa valeur la plus instable  $k_c$  (l'équation d'équilibre possède une intégrale première évidente).

- *Sélection par une paroi*, qui fixe la phase et l'amplitude au point de contact. Si cette *amplitude*  $A_0$  est presque nulle, on fabrique le point faible requis. Si  $A_0 = 0$ , on sélectionne derechef  $k_c$ . Si  $A_0 = \lambda A_\infty$ , il subsiste une plage de solutions, rétrécie par rapport à la plage d'Eckhaus, de largeur  $\sim \lambda \sqrt{\varepsilon}$ . Un cas plus intéressant est celui d'une condition aux limites homogène reliant  $A$  à  $dA/dx$  : la plage d'existence est alors d'ordre  $\varepsilon$  et non plus  $\sqrt{\varepsilon}$ . (A cet ordre le calcul est délicat car il faut tenir compte de corrections habituellement négligeables).

- *Sélection par les défauts d'une structure bidimensionnelle en rouleaux*. Ces défauts peuvent être des joints de grains, des dislocations, voire des « foyers » au centre d'une structure de rouleaux circulaires. Ils constituent le point faible où le vecteur d'onde s'ajuste (par exemple par montée de la dislocation).

Pour un système potentiel, tous ces mécanismes conduisent au même vecteur d'onde  $k_c$ , qui *minimise l'énergie*. Pour un système non potentiel, en revanche, il n'y a pas d'énergie, donc pas d'argument « thermodynamique ». A l'ordre  $\epsilon$ , les différents mécanismes de sélection donnent des résultats différents. On peut le vérifier explicitement à l'ordre le plus bas par un développement en série. Les calculs numériques sur des modèles spécifiques en apportent une confirmation spectaculaire. Une question nouvelle se pose alors : que se passe-t-il si plusieurs mécanismes sont en compétition ? Il semble que le système adopte un comportement dynamique, avec *dérive* des structures d'une source vers l'autre.

Tous ces mécanismes sont « doux » : près de la bifurcation l'ajustement de  $k$  est progressif. Une autre possibilité, beaucoup plus brutale, consiste à bâtir la structure en la faisant pénétrer dans une région *instable* : il se forme un *front*, sorte d'onde de choc, qui laisse derrière lui un  $k$  bien déterminé. Le problème est de portée beaucoup plus générale et mérite une étude distincte.

## VI. PÉNÉTRATION D'UN FRONT DANS UNE PHASE INSTABLE

Les idées essentielles sont déjà présentes dans une équation de diffusion *non linéaire*, du type

$$\dot{\zeta} = \alpha \zeta'' - \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

On construit facilement un profil stationnaire dans un repère de vitesse  $v$ , reliant deux états d'équilibre,  $U' = 0$ . Si les deux états sont *métastables* (minimum de  $U$ ), un tel profil n'existe que pour une valeur bien définie de  $v$  (le profil doit « mourir » sur un point col dans l'espace des phases). C'est précisément ainsi que l'on calcule la mobilité d'une paroi de domaine. La situation est complètement différente si la phase aval est *instable* (maximum de  $U$ ) : quelle que soit la vitesse  $v$ , il existe un profil stationnaire. D'où un difficile problème de sélection : comment le front choisit-il sa vitesse ?

La réponse n'est pas simple, car le front est intrinsèquement non linéaire. On peut cependant distinguer deux régions. Loin à l'aval, l'amplitude  $\zeta$  est faible, et on peut linéariser l'équation de propagation. On retombe alors sur le problème étudié au paragraphe (II). Il existe deux vitesses « neutres »,  $v_-$  et  $v_+$ , pour lesquelles la convection équilibre l'instabilité (elles correspondent aux ailes d'un paquet d'onde). A moins de partir d'une condition initiale très particulière, le front doit adopter la vitesse de l'aile aval, c'est-à-dire  $v_+$ . D'où un mécanisme de *sélection par l'aval*, entièrement linéaire. Ces considérations qualitatives sont confirmées par une analyse détaillée. Le front aval est représenté par une exponentielle, de vecteur d'onde  $k$  et de fréquence  $\omega$  complexes (l'enveloppe avance à la vitesse  $\omega_i/k_i$ ). Pour représenter le comportement asymptotique, la solution doit être *stable*. La stabilité de phase

redonne la condition de point col établie en (II). La stabilité de l'enveloppe implique  $v_{env} > v_G$  (on le démontre facilement en se ramenant pour une variation lente à une équation du premier ordre pour  $k_i(x, t)$ ). L'évolution d'un profil initial  $k_i(x)$  est analysée par la méthode des caractéristiques. On constate ainsi que la vitesse d'enveloppe relaxe vers  $v_+$ , comme prévu, mais très lentement (avec une loi en  $1/t$ ). Cette vitesse neutre est aussi le minimum de  $v_{env}$  : c'est la *portion la plus lente du profil* qui l'emporte — une conclusion familière en croissance cristalline.  $v_+$  est aussi le point de *stabilité marginale* du front, pour lequel  $(v_{env} - v_G)$  change de signe. On arrive ainsi à un concept général et fécond : un système dynamique choisit spontanément le point de fonctionnement qui correspond au seuil d'instabilité de la structure réalisée.

Toute cette analyse repose sur une hypothèse : le front est piloté par l'aval. C'est vrai si le profil intermédiaire reste « à la traîne ». La région non linéaire est « tirée » par le front aval, et ne peut que suivre en ajustant sa forme. On peut aussi rencontrer le cas inverse, où le profil non linéaire a une vitesse propre  $v^* > v^+$ . Cette vitesse propre est celle qui annule la composante de  $k_i$  maximum dans le profil asymptotique  $\zeta(x)$  (si l'état aval était métastable, ce serait celle aboutissant au point col). Le front non linéaire « déborde » alors sur l'aval, et impose sa vitesse  $v^*$  au lieu de  $v^+$ . Un tel mécanisme rejoint naturellement la vitesse de paroi habituelle si l'état aval devient métastable. On a donc deux mécanismes bien distincts, et l'on peut passer de l'un à l'autre en changeant les paramètres de contrôle.

Une fois sélectionnée la vitesse du front, on connaît le vecteur d'onde aval  $k_r$  et la vitesse de phase correspondante — donc le flux d'arches. Pour fixer le vecteur d'onde final à l'amont, il faut une hypothèse supplémentaire : la *conservation des arches* au passage du front — vraisemblable mais pas évidente. Si on l'accepte, le vecteur d'onde amont  $k_\infty$  est entièrement déterminé : la pénétration du front a sélectionné une longueur d'onde, différente de celles obtenues précédemment.

Ces considérations très générales ont été illustrées sur des exemples concrets : équations de Fisher-Kolmogorov, modèle de Pomeau-Manneville.

## VII. RUPTURE DE LA SYMÉTRIE DE RÉFLEXION : PAROIS ET DOMAINES

Nous avons déjà évoqué la possibilité d'une rupture de symétrie spontanée, accompagnée d'une dérive de la structure. La transition correspondante peut être surcritique (avec inversion de stabilité de l'état pair). Elle peut aussi être souscritique : il apparaît alors des parois séparant des régions paires et des régions déformées. Ces parois bougent et peuvent de ce fait contribuer à ajuster le vecteur d'onde (l'idée est due à P. Coulet). La vitesse de la paroi



est due d'une part à la sursaturation (la phase stable croît au dépens de l'autre), d'autre part à la rupture de symétrie (effet de dérive). Ces deux termes se combinent différemment pour les parois droites et gauches, d'où deux régimes :

- Les deux côtés d'un domaine bougent dans le même sens : le domaine est *convectif*. En supposant qu'il n'y a pas création d'arches, on peut relier les vecteurs d'onde amont et aval (les arches seront par exemple comprimées dans le domaine et dilatées à l'amont).

- Les deux côtés d'un domaine bougent en sens inverse. La variation de longueur d'onde est alors limitée au voisinage des parois, sur une échelle de longueur *diffusive*  $\sqrt{Dt}$  (alors que la largeur du domaine croît comme  $vt$ ). La variation de  $k$  est d'ordre  $\sqrt{t}$  : aux grands temps, on peut sortir de la bande d'Eckhaus — d'où un mécanisme de nucléation d'arches original.

Cette formation de domaines asymétriques avec dérive est souvent observée. C'est un mécanisme à creuser.

### VIII. STRUCTURES BIDIMENSIONNELLES

La structure s'organise en réseau, caractérisé par deux vecteurs d'onde linéairement indépendants. Si l'on est proche de la bifurcation, ces vecteurs d'ondes doivent avoir la même longueur  $k_c$ . D'où trois possibilités :

(i) Une structure en rouleaux avec une seule périodicité : c'est le cas étudié jusqu'à présent.

(ii) Une symétrie d'ordre 2 produisant des réseaux rectangulaires. L'interface est pavé par des losanges, avec un déplacement maximum aux nœuds, minimum aux centres (le réseau carré est un cas particulier).

(iii) Une symétrie d'ordre 3, avec trois vecteurs d'onde  $k_i$  formant un triangle équilatéral. Les amplitudes  $|\zeta_{ki}|$  sont égales, mais les phases peuvent être différentes. Deux des phases correspondent à un choix d'origine, la combinaison  $\alpha = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$  caractérisant les détails de la structure interne.  $\alpha = 0$  correspond à un réseau en nid d'abeille avec une symétrie d'ordre 6.  $\alpha = \pi/2$  implique une symétrie trigonale avec alternance de minima et de maxima.

#### a) Equations de mouvement et recherche de l'état optimal

A l'ordre le plus bas, tous les modes sont dégénérés par symétrie : la physique est dans le couplage mode-mode. Celui-ci comprend toujours un terme de couplage d'intensité, du type

$$\dot{\zeta}_k \approx -\zeta_k \left[ \Psi |\zeta_k|^2 + 2\Psi' \sum_{k' \neq k} |\zeta_{k'}|^2 \right]$$

(pour une interaction de contact  $\Psi$  et  $\Psi'$  sont égaux). Pour une structure *trigonale* (et dans la mesure où il n'y a pas symétrie  $\zeta \rightarrow -\zeta$ ), il apparaît en outre un terme d'*hybridation* du 3<sup>e</sup> ordre,

$$\dot{\zeta}_{k_1} \approx \zeta_{k_2}^* \zeta_{k_3}^*$$

qui affecte profondément le processus de minimisation.

Si l'on néglige l'hybridation, le seul paramètre significatif est  $\Psi'/\Psi$ , fonction de l'angle  $\theta$  entre  $k_1$  et  $k_2$ . On vérifie que pour  $\theta = 2\pi/3$  l'état trigonal est toujours plus stable qu'un réseau de losanges. La compétition entre  $\theta$  différents est un cas d'espèce, et l'on peut tracer un diagramme d'états séparant les régimes de *rouleaux*, de *réseaux rectangulaires* et de *réseaux trigonaux*. Une étude de stabilité permet de préciser la nature des transitions : la transition rouleaux  $\rightarrow$  rectangles est du 2<sup>e</sup> ordre, alors que la transition rectangles  $\rightarrow$  triangles est du 1<sup>er</sup> ordre.

Les termes d'hybridation favorisent toujours une structure hexagonale en nid d'abeilles — du moins à l'ordre  $\zeta^3$ . La bifurcation correspondante est nécessairement du premier ordre, avec le comportement d'hystérésis habituel. On peut tracer un diagramme d'états détaillé donnant l'amplitude de la déformation en fonction du paramètre de contrôle. Au-delà de la bifurcation ( $s > 0$ ), il n'y a qu'une branche stable (les autres sont instables, soit en amplitude, soit par rapport à l'angle d'hybridation  $\alpha$ ). Du fait de l'hybridation, la région trigonale empiète sur la bifurcation primaire ( $\zeta = 0$ ) et aussi sur la structure en rouleaux.

#### b) *Stabilité de phase du réseau hexagonal*

Le calcul est le même que pour l'instabilité d'Eckhaus habituelle, mais plus compliqué. Il y a deux modes mous, correspondant aux deux degrés de liberté de translation de la structure. A  $q$  fini, ces modes correspondent à la compression et au cisaillement du réseau bidimensionnel. Lorsque  $q \rightarrow 0$ , les deux modes sont diffusifs, du type  $\sigma = Dq^2$  (l'isotropie résulte de la structure hexagonale). On peut calculer les diffusivités  $D$  explicitement : elles présentent une « bande d'Eckhaus »  $D < 0$  familière, sans accident particulier. Un exemple concret est la stabilité d'un ferrofluide, étudiée par Gailitis.

La généralisation aux structures de  $q$  élevé est plus complexe (instabilités « variqueuses », etc.). Elle peut jouer un rôle important loin de la bifurcation.

L'ensemble du cours a fait l'objet de notes détaillées distribuées à l'auditoire, qui complètent celles de l'an dernier.

P. N.

## SÉMINAIRES

Les séminaires suivants ont été organisés, en liaison étroite avec le thème du cours :

12 décembre 1989, Y. COUDER et M. RABAUD, Laboratoire de Physique de l'ENS, « L'instabilité de l'imprimeur ».

19 décembre 1989, R. RIBOTTA, Laboratoire de Physique des Solides, Orsay, « Défauts dans les ondes non linéaires en convection ».

16 janvier 1990, Béatrice JANIAUD, Vincent CROQUETTE, Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS, « Instabilité de phase d'un système d'ondes ».

23 janvier 1990, Stéphane DOUADY, Ecole Normale Supérieure de Lyon, « L'instabilité de Faraday ».

30 janvier 1990, Vincent HAKIM, Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS, « Ondes solitaires près d'une instabilité sous-critique ».

6 février 1990, Patrick OSTWALD, Ecole Normale Supérieure de Lyon, « Instabilités cellulaires dans les cristaux liquides thermotropes ».

13 février 1990, M. FERMIGIER (ESPCI), « Instabilité de Rayleigh-Taylor en couches minces ».

Une seconde série de cours a été donnée d'avril à juin 1990 à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, sur un thème complètement différent :

*« Liquides de Fermi fortement corrélés »*

Le but est de comprendre le comportement d'un modèle de Hubbard en répulsion forte : ordre magnétique, localisation des lacunes, éventuellement appariement. L'expérience suggère fortement qu'en deux dimensions le concept de liquide de Fermi n'est pas valable. Un accent particulier a été mis sur les systèmes unidimensionnels, qui présentent très explicitement ce type d'anomalie. Utilisant d'une part des développements perturbatifs et la renormalisation, d'autre part la solution exacte de Bethe, ces conférences ont dégagé quelques concepts importants : exposants critiques au niveau de Fermi, dissociation des excitations élémentaires (en « spinons » et « holons »), etc.

Faute de temps, le problème n'a été qu'effleuré : il sera repris au fond dans le cours de l'an prochain à Paris. Mais ce premier contact avec la communauté grenobloise, très vivante, a été particulièrement fécond pour cerner les difficultés et les questions ouvertes.

## ACTIVITÉS SCIENTIFIQUES

1. P. NOZIÈRES anime le *groupe de Physique Théorique* de l'Institut Laue-Langevin à Grenoble. Ce groupe comprend une dizaine de physiciens confirmés qui y effectuent des séjours de durée limitée, de un à cinq ans, et qui travaillent dans des domaines très divers. En 1989-1990, l'activité portait sur les sujets suivants :

*Supraconducteurs* (M. LAVAGNA, J. RODRIGUEZ, J. SOLYOM, K. FISCHER)

*Hélium 3 superfluide* (N. SCHOPHOL, D. WAXMAN)

*Fluides anisotropes* (P. HOLDSWORTH)

*Mouvement atomique dans les solides* (A. HÜLLER, A. WÜRGER)

*Structures incommensurables* (C. PARLINSKI).

L'activité personnelle de P. NOZIÈRES a porté pour l'essentiel sur la *croissance cristalline*.

a) *Fusion de surface et mouillage*

L'abaissement de l'énergie de marche au contact solide-liquide peut induire une situation de mouillage pour une surface vicinale alors que les facettes, elles, ne mouillent pas. Un cristallite fond alors dans les coins qui séparent deux facettes. Au-dessus de la température de fusion, les lentilles liquides inversent leur courbure, et persistent sur une gamme de température finie — d'où une possibilité de surchauffe observée expérimentalement.

b) *Déformations élastiques dues aux efforts capillaires*

Elles sont en principe faibles, mais deviennent significatives pour des systèmes minces. Cette étude était motivée, au départ, par les résultats de METOIS et HEYRAUD à Marseille, qui observent la déformation d'un film de graphite au contact d'une goutte de plomb liquide. Pour interpréter ces résultats, il faut une définition *précise* des efforts de surface. Un protocole expérimental a été suggéré pour mesurer ces efforts en déposant un film solide sur un substrat que l'on fait ultérieurement fondre.

c) *Facettage et surfaces vicinales*

Divers mécanismes ont été étudiés pour expliquer une éventuelle interaction entre marches  $\sim 1/d$ , suggérée par les expériences récentes sur l'hélium. Les résultats ne sont pas concluants et il faut attendre une nouvelle génération d'expériences plus précises.

*Publications*

F. GRANER, R.M. BOWLEY, P. NOZIÈRES, « The growth kinetics of  $^3\text{He}$  crystals », soumis à *Journal of Low Temp. Phys.*

P. NOZIÈRES, « Surface melting and crystal shapes », *Journal de Physique*, 50, 2541 (1989).

Par ailleurs, P. NOZIÈRES a donné en août 1989 un cours de 18 h à l'École d'Été de BEG-ROHU sur le thème général :

« *Shape and growth of crystals* »

Ce cours de synthèse, centré sur la thermodynamique, la morphologie et la transition rugueuse, est rédigé sous forme d'un texte de 160 pages qui doit être publié prochainement.

2. Outre cette activité centrée à Grenoble, un petit groupe travaille au Collège même, autour de D. SAINT-JAMES. En collaboration avec Claude ASLANGUL, Noëlle POTTIER et un jeune doctorant, élève de 3<sup>e</sup> année de l'École Normale Supérieure, Marc BARTHÉLÉMY, ce groupe travaille sur les problèmes de marche aléatoire sur des réseaux linéaires. Derrière cette question se profile le problème du théorème de la limite centrale et de sa validité.

## CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Le vieux problème étudié ici est celui de l'influence du désordre de réseau sur les propriétés de diffusion. Si le désordre est « normal », on retrouve le comportement diffusif classique, avec un coefficient  $D$  modifié. Le théorème de la limite centrale continue de s'appliquer et l'on voit réapparaître des variables gaussiennes. Mais le désordre peut aussi avoir une influence fondamentale : la loi de diffusion est alors modifiée. On peut avoir par exemple :

$$\overline{x^2(t)} - \bar{x}(t)^2 \sim t^{2\nu} \quad \nu \neq 1/2.$$

Le théorème de la limite centrale est violé. Il apparaît des lois larges et des corrélations à longue portée caractéristiques des lois de Lévy.

A cela se superpose le problème du théorème de fluctuation dissipation, en particulier sous sa première forme qui relie la mobilité à  $D$ . S'il y a diffusion anormale, y a-t-il aussi mobilité anormale ? Existe-t-il une vitesse ?

Enfin, dernière question, y a-t-il ergodicité ? Les moyennes temporelles prises sur un échantillon sont-elles identiques aux moyennes d'ensemble ? Dans le langage des mathématiciens on dit qu'il y a *automoyenne* lorsque l'ergodicité est observée.

Pour attaquer ce problème, nous avons étudié le mouvement d'une particule sur un réseau unidimensionnel, régi par des taux de transfert  $W_{n,n+1}$  et  $W_{n,n-1}$

aléatoires et asymétriques. On cherche à calculer la position moyenne sur la chaîne (dite position moyenne thermique) définie par :

$$x(t) = \sum_n n p_n(t)$$

et la position quadratique définie par :

$$x^2(t) = \sum_n n^2 p_n(t)$$

Une moyenne supplémentaire sur un ensemble de chaînes est désignée par  $\langle \rangle$ .

Dans le compte rendu d'activité précédent, nous avons discuté le mouvement sur un réseau périodique dont la période tend vers l'infini, et sur un réseau désordonné infini. Nous avons montré que :

i) la vitesse  $V$  est égale avec probabilité 1 pour ces deux types de réseaux. En d'autres termes,  $V$  ne présente aucune fluctuation d'échantillon à échantillon : c'est une quantité *automoyennante* ;

ii) le coefficient de diffusion, moyenné sur le désordre, a bien la même valeur pour les deux types de réseaux. De plus, dans le cas d'une marche dirigée sur un système désordonné (c'est-à-dire d'une marche telle qu'il n'y a pas de retour en arrière),  $D$  est une *quantité automoyennante*, indépendante de l'échantillon.

On peut interpréter ce résultat en considérant que les systèmes étudiés sont équivalents, à grand temps, à une marche dirigée sur un réseau renormalisé dans l'espace, pour lequel la distance entre les nouveaux sites tient compte de la possibilité des retours vers la gauche dans le réseau initial.

En fait, ces résultats ne sont pas toujours valables. Leur validité dépend de la valeur de certaines quantités moyennées sur la chaîne considérée :

- Si  $\langle \langle 1/W_- \rangle \rangle$  diverge, il y a problème.
- Si on définit le nombre  $\mu$  par  $\langle \langle (W_-/W_-)^\mu \rangle \rangle = 1$ , alors :  
 pour  $\mu > 2$ ,  $V$  et  $D$  existent et sont automoyennants,  
 pour  $2 > \mu > 1$ ,  $V$  seul existe et est automoyennante,  
 pour  $\mu < 1$ , ni  $V$  ni  $D$  n'existent. On parle de *phases dynamiques*.

Dans ce dernier cas, il y a comportement anormal pour des distributions des  $W$  qui n'ont rien de bien spécial a priori.

## ÉTUDE DES PHASES DYNAMIQUES

### A. CAS OÙ $\langle \langle 1/W \rangle \rangle$ DIVERGE. ÉTUDE DU RÉSEAU DIRIGÉ

#### a) Moyenne sur un ensemble de chaînes

Pour étudier ce cas, on considère une simple marche dirigée, telle que tous

les  $W_{\leftarrow}$  sont nuls. On choisit pour les  $W_{\rightarrow}$ , une loi de distribution de la forme :

$$\rho(W) = C_{\mu} W^{\mu-1} f_c(W/W_m)$$

On peut alors calculer explicitement le comportement asymptotique de  $\langle x(t) \rangle$  et  $\langle \Delta x^2(t) \rangle$ . On retrouve les régimes de  $\mu$  donnés ci-dessus, mais pour  $W_{\rightarrow}$  au lieu de  $W_{\leftarrow}/W_{\rightarrow}$ . Ceci semble indiquer une fois de plus la correspondance entre la marche dirigée et la marche générale. (A noter que pour  $\mu < 1/2$ , le mouvement est sous-diffusif : il y a beaucoup de liaisons quasi brisées et l'étalement est difficile).

#### b) *Problème de l'automoyenne*

Existe-t-il une automoyenne dans le cas des phases dynamiques ? Nous avons résolu ce problème pour  $x(t)$  et montré que pour un échantillon donné :

$$x(t) \sim x_0 W_m t^{\mu} \quad \text{pour } \mu < 1, t \rightarrow \infty$$

Autrement dit le comportement de  $x(t)$  a bien la même puissance en  $t$ , mais  $x_0$  est un nombre aléatoire :  $x(t)$  n'est pas automoyennante. La distribution  $\rho(x_0)$  est connue par la donnée de tous ses moments. Pour  $\mu > 1$  la distribution tend vers une fonction  $\delta$ .  $x(t)$  devient automoyennante et vaut  $t / \langle\langle 1/W \rangle\rangle$  comme attendu.

Tout ce travail sur le réseau dirigé a fait l'objet de publications, essentiellement au *Journal of Statistical Physics*.

### B. CAS DU RÉSEAU GÉNÉRAL

On ne sait pas faire grand chose dans ce cas. Toutefois on peut calculer  $P_0(t)$ , la probabilité de présence de la particule à l'origine. Cette quantité est intéressante car, si  $V$  et  $D$  existent, sa transformée de Laplace a la forme :

$$P_0(z) \sim 1/V - 2D/V^3 z \quad (z \rightarrow 0)$$

Dans le cas général, où  $V$  et/ou  $D$  n'existent pas, on ne sait pas dire grand chose a priori.

#### a) *Modèle de la force locale aléatoire*

A condition de choisir une forme un peu spéciale pour les  $W$ , telle que  $W_{n,n+1} W_{n+1,n} = \text{cte}$ , on peut calculer le comportement en  $t$  de  $P_0$ . On trouve ainsi  $P_0(t) \sim t^{-\mu}$  où  $\mu$  est défini à partir de la loi de probabilité des  $W$ . Ce comportement en  $t^{-\mu}$  est ce que l'on attend dans les phases dynamiques, mais ne nous renseigne en rien sur  $x(t)$  ni sur  $\Delta x^2(t)$ .

b) *Modèle continu*

Il est intéressant de faire tendre le pas du réseau vers zéro. On montre alors que si l'on décrit les  $W$  sous la forme :

$$W_{n,n+1} = D_0/a^2 \exp(-aF_{n+1}/2D_0)$$

avec  $F_n$  gaussien, de moyenne  $F_0$  et d'écart type  $\sigma$ , et si on se place dans la limite  $a \ll 4D_0/\sigma^2$ , alors l'équation maîtresse prend la forme d'une équation du type Fokker-Planck. Nous avons pu calculer exactement pour ce modèle la transformée de Laplace  $P_0(E)$  de la probabilité de présence à l'origine. On trouve ainsi :

$$P_0(t) = \mu/2^{2\mu-1} t^{-\mu}/\Gamma(\mu)$$

Ce résultat recoupe le précédent. Dans le cas  $\mu = 0$ , qui correspond au modèle de Sinai, on obtient :

$$P_0(t) = 2/\ln^2 t$$

Ce travail a fait l'objet d'un article publié par *Physica*.

*Publications*

C. ASLANGUL, N. POTTIER and D. SAINT-JAMES, « Random Walk on a one dimensional lattice. Equivalence between bond and site disorder ». *Phys. Lett.*, *141*, 1172 (1989).

C. ASLANGUL, N. POTTIER and D. SAINT-JAMES, « Random Walk on a one dimensional random medium ». *Physica*, *164*, 52 (1990).

C. ASLANGUL, M. BARTHÉLÉMY, N. POTTIER and D. SAINT-JAMES, « Dynamical exponents for one-dimensional random-random directed walks ». *J. Stat. Phys.*, *59*, 11 (1990).

C. ASLANGUL, M. BARTHÉLÉMY, N. POTTIER and D. SAINT-JAMES, « Microscopic dynamical exponents for random-random directed walk on a one dimensional lattice with quenched disorder ». A paraître in *J. Stat. Phys.*

C. ASLANGUL, M. BARTHÉLÉMY, N. POTTIER and D. SAINT-JAMES, « Exposants dynamiques pour une marche au hasard dirigée sur un réseau désordonné à une dimension ». Communication au 10<sup>e</sup> Congrès de Physique Statistique de Paris (1990).

C. ASLANGUL, M. BARTHÉLÉMY, N. POTTIER and D. SAINT-JAMES, « Dynamical exponents for a one dimensional random-random directed walk ». Communication au Congrès du NATO Advanced Studies Institute intitulé : « Large scale molecular systems : quantum and stochastic aspects. Beyond the simple molecular structures ». Acqua Fredda di Maratea, 1990. A paraître dans les Proceedings édités par W. Gans, A. Blumen et A. Amann.



## CONFÉRENCES DONNÉES PAR P. NOZIÈRES

Beg-Rohu, 1<sup>er</sup> au 15 août 1989 (12 conférences), « Shape and growth of crystals ».

Jülich, 25 octobre 1989, « The roughening transition ».

Bruxelles, 10 mai 1990, « Solid surfaces : capillarity vs elasticity ».

## DISTINCTIONS

P. NOZIÈRES a été élu Membre Honoraire de l'Académie des Sciences de Hongrie.