Théorie des groupes

M. Jacques TITS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

L'étude des *immeubles jumelés,* commencée en 1988-1989, a été poursuivie cette année. Deux thèmes principaux ont été abordés :

— présentation par générateurs et relations de groupes opérant sur un jumelage et permutant transitivement les paires de chambres opposées ;

— problèmes de classification : réduction au rang 2.

Dans ce résumé, nous reprenons le plus souvent, éventuellement sans explication, les notations et la terminologie du résumé du cours de l'an dernier [8], mais nous rappelons cependant les définitions et conventions essentielles à la compréhension de l'exposé. Tous les immeubles considérés sont supposés *épais,* sauf lorsque le contraire va de soi (cas des complexes de Coxeter).

I. GÉNÉRATEURS ET RELATIONS

1. GROUPES DE COXETER ET RACINES

1.1. Nous nous donnons un ensemble fini I, une matrice de Coxeter $M = (m_{ij})_{i,j \in I}$ (cela signifie que $m_{ij} = m_{ji} \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $m_{ii} = 1$ et $m_{ij} \geqslant 2$ si $i \neq j$) et un système de Coxeter (W, S) de type M : S est donc un ensemble $\{s_i \mid i \in I\}$ en bijection avec I et W est un groupe engendré par S dont les relations $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$ pour i, j tels que $m_{ij} \neq \infty$ forment une présentation. Soit Φ l'ensemble des racines du complexe de Coxeter dont W est l'ensemble des chambres. Selon la définition rappelée dans [8], les éléments de Φ sont des parties de W, mais nous nous référerons aussi à l'interprétation géométrique suivante, plus intuitive. Rappelons (cf. [1]) qu'il existe une représentation linéaire de W dans un espace vectoriel réel V de dimension Card I (la « représentation contragrédiente ») et un cône simplicial fermé $C \subset V$ tels que les s_i soient représentés par des réflexions affines dont les hyperplans fixes sont les hyperplans engendrés par les faces (facettes de codimension 1) de C et que $\Omega = \cup \{xC \mid x \in W\}$ soit un cône convexe.

Les *chambres* du complexe de Coxeter sont les xC, pour $x \in W$, ou, si l'on préfère, les éléments de W eux-mêmes, et l'on appelle *murs* les hyperplans fixés par les conjugués des s_i dans W. Une *racine* est alors l'adhérence dans Ω d'une composante connexe du complémentaire d'un mur dans Ω ; si α est une racine, l'autre racine bordée par le même hyperplan est notée $-\alpha$. Nous désignons par Φ_+ (resp. Φ_-) l'ensemble des racines *positives* (resp. *négatives*) c'est-à-dire contenant (resp. ne contenant pas) la chambre C — ou la chambre 1, selon le point de vue adopté — et par Φ_0 l'ensemble des « racines simples », c'est-à-dire des racines positives dont le bord est fixé par un élément de S.

1.2. Une partie Ψ de Φ est dire *prénilpotente* si chacun des deux ensembles $\cap \{\alpha \mid \alpha \in \Psi\}$ et $\cap \{-\alpha \mid \alpha \in \Psi\}$ contient au moins une chambre. Si $\{\alpha, \beta\}$ est une paire de racines prénilpotente, on pose $[\alpha, \beta] = \{\gamma \in \Phi \mid \gamma \supset \alpha \cap \beta,\ (-\gamma) \supset (-\alpha) \cap (-\beta)\}$.

Lorsque W est fini, on a $\Omega = V$ et les racines sont des demi-espaces fermés. Utilisant un produit scalaire invariant par W, on peut aussi les représenter par des demi-droites fermées de V (dans le cas des groupes de Weyl ordinaires, on retrouve les racines usuelles données à un facteur positif près) et $[\alpha, \beta]$ est alors l'ensemble des demi-droites $\gamma \in \Phi$ contenues dans la somme (i.e. l'angle) des demi-droites α et β ; le fait que $\{\alpha, \beta\}$ est prénilpotent est ici équivalent à l'inégalité $\beta \neq -\alpha$). L'exemple suivant (voir notamment le n° 1.3.2), donné dans le cours en réponse à une question de J.-Y. Hée, montre cependant que la vision bidimensionnelle de l'ensemble $[\alpha, \beta]$ est trompeuse dans le cas général.

1.3. *Un exemple*

Soit Card $I = \dim V = 3$, soit P le plan projectif réel « à l'infini » de V, supposons que m_{ij} est fini pour tout couple (i, j) et que W est de type hyperbolique, c'est-à-dire que Ω est un cône quadratique dont l'image dans P, notée X, est un plan de Lobatchevski. Le bord ∂X de X dans P est donc une conique. Passant aux images à l'infini, on peut maintenant voir les hyperplans radiciels comme des droites de P, ou de X, et les racines comme des demi-plans de Lobatchevski. Observons que

(1.3.1) *dans X, tout demi-plan Y contient une racine.*

En effet, soient $a, b \in \partial X$ les deux points limites du bord ∂Y de Y. Comme les chambres, transformées par les éléments de W de l'image à l'infini de C, sont toutes congruentes entre elles, donc de diamètre borné, dans la métrique de Lobatschevski, l'adhérence (pour la topologie usuelle de P) de l'ensemble des sommets des chambres contient X. Il existe donc un sommet de chambre $c \in Y$ « suffisamment proche de ∂X et éloigné de a et b » (au sens de la topologie de P) pour que l'angle $\widehat{abc}$ soit inférieur aux trois angles intérieurs d'une chambre. Alors, au plus un mur contenant c rencontre le mur ∂Y et, des deux racines bordées par tout autre mur contenant c, l'une est contenue dans Y, q.e.d.

De 1.3.1, il résulte que

(1.3.2) *toute partie prénilpotente Ψ de Φ est contenue dans un ensemble de la forme $[\alpha, \beta]$, où $\{\alpha, \beta\}$ est une paire de racines prénilpotente.*

En effet, on peut supposer Ψ non vide, et il est alors facile de voir que les intersections $\cap \{ \psi \mid \psi \in \Psi\}$ et $\cap \{- \psi \mid \psi \in \Psi\}$ contiennent des demi-plans, donc des racines, soient α et $-\beta$, et l'on a $\alpha \subset \beta$, $-\beta \subset -\alpha$, $\alpha \cap \beta = \alpha$, $(-\alpha) \cap (-\beta) = -\beta$, d'où enfin $\Psi \subset [\alpha, \beta]$.

Notons au passage une autre conséquence de 1.3.1, à savoir que l'ensemble des transformés d'un point x quelconque de ∂X par toutes les réflexions de W, et, *a fortiori*, l'orbite de x sous W, est dense dans ∂X (pour la topologie de P).

2. Le système $(B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$

2.1. *Axiomes*

Proposition 1. — *Soit G un groupe. La donnée d'un jumelage $(\Delta_+, \Delta_-, \mathcal{W}^*)$ sur lequel G opère en permutant transitivement les paires de chambres opposées, et d'une isométrie de W, doté de la distance $(w, w') \mapsto w^{-1} w'$, sur un appartement de Δ_+ relatif au jumelage (cf. [8], 3.2), est équivalente à la donnée dans G d'un système $(B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ de sous-groupes indexés par Φ, satisfaisant aux conditions suivantes :*

(BR 0) *les B_α engendrent G ;*

(BR 1) *si $\{\alpha, \beta\}$ est une paire de racines prénilpotente, les éléments de $[\alpha, \beta]$ peuvent être rangés en une suite $(\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ayant α pour premier terme et telle que le produit $B_{\alpha_1} \ldots B_{\alpha_m}$ soit un groupe ;*

(BR 2) *l'intersection des groupes B_α et $B_{-\alpha}$ est indépendante de la racine α ;*

(BR 3) *si $\alpha \in \Phi$, il existe $n \in \langle B_\alpha, B_{-\alpha} \rangle$ tel que, pour tout $\beta \in \Phi$, $nB_\beta n^{-1} = B_{s_\alpha(\beta)}$, où $s_\alpha \in W$ est la réflexion fixant le bord de α ;*

(BR 4) *pour toute racine α, B_α a exactement deux doubles classes dans $\langle B_\alpha, B_{-\alpha} \rangle$;*

(BR 5) *si α est une racine positive, $B_{-\alpha}$ n'est pas contenu dans le groupe engendré par les B_β pour $\beta \in \Phi_+$.*

Supposons donnée une opération de G du type en question, identifions un appartement A_+ de Δ_+ avec W, notons A_- l'appartement de Δ_- associé à A_+ (cf. [8], 3.2) et $^\circ : A_+ \to A_-$ l'isomorphisme d'opposition et enfin, pour toute racine α (identifiée à une partie de A_+), posons $\alpha^- = -\alpha^\circ$ et désignons par B_α le fixateur de (α, α^-) dans G. Il est alors facile de vérifier que les B_α satisfont aux axiomes (BR 0) à (BR 5).

Réciproquement, soient donnés le groupe G et des sous-groupes B_α ayant ces propriétés, notons B_+ (resp. B_-) le groupe engendré par les B_α pour $\alpha \in \Phi_+$ (resp. Φ_-), pour $w \in W$, soit M_w l'ensemble des éléments n de G tels que $nB_\alpha n^{-1} = B_{w(\alpha)}$ pour toute racine α, notons N la réunion des M_w et $\nu : N \to W$ l'homomorphisme défini par $\nu(M_w) = \{w\}$. Des résultats établis dans le cours de l'an dernier ([8], 7.2) montrent alors que, pour achever la preuve de la proposition, il suffit de faire voir que

(2.1.1) le système (G, B_+, B_-, ν) satisfait aux conditions (BNJ 1) à (BNJ 5) de *loc. cit.*

Cela se démontre en même temps que la présentation du n° 2.2 ci-dessous.

Remarque. La proposition 1 reste vraie si, dans l'énoncé des axiomes (BR 3) à (BR 5), on suppose que α appartient à Φ_0.

2.2. *Présentation*

Notons PP (resp. PP_+) l'ensemble des paires de racines (resp. de racines positives) distinctes prénilpotentes et POP (resp. POP_+) l'ensemble des paires *ordonnées* — ou couples — de racines avec ces propriétés. Pour toute partie Ψ de Φ, soit B_Ψ le sous-groupe de G engendré par les B_ψ, $\psi \in \Psi$; cette convention donne un sens aux expressions $B_{[\alpha,\beta]}$ pour $\{\alpha, \beta\} \in$ PP (cf. 1.2) et $B_{\{\pm\alpha\}}$ pour $\alpha \in \Phi$. Désignons par $\tilde{B}_+$ (resp. $\tilde{G}$), la somme des $B_{[\alpha,\beta]}$ pour $\{\alpha, \beta\} \in PP_+$ (resp. des $B_{[\alpha,\beta]}$ pour $\{\alpha, \beta\} \in$ PP et des $B_{\{\pm\alpha\}}$ pour $\alpha \in \Phi_0$), amalgamés suivant les B_α, B_β (resp. et les B_α, $B_{-\alpha}$) ; en termes plus corrects, $\tilde{B}_+$ est la limite inductive (cf. e.g. [6], n° 5) du système formé par les groupes B_α ($\alpha \in \Phi$) et $B_{[\alpha,\beta]}$ ($\{\alpha, \beta\} \in PP_+$) relativement au système formé par les injections canoniques $B_\alpha \to B_{[\alpha,\beta\}}$ pour $(\alpha, \beta) \in POP_+$, et $\tilde{G}$ est défini de façon analogue.

PROPOSITION 2. — (i) *L'homomorphisme canonique. $\tilde{B}_+ \to B_+$ est un isomorphisme.*

(ii) *Le noyau de l'homomorphisme canonique $\tilde{G} \to G$ est engendré par des éléments de la forme $nbn^{-1} b'^{-1}$ où, pour des racines $\alpha \in \Phi_0$, $\beta \in \Phi$ convenables, n est un élément de $B_{\{\pm\alpha\}}$ permutant B_α et $B_{-\alpha}$ par conjugaison, $b \in B_\beta$ et $b' = B_{s_\alpha(\beta)}$ (pour la notation s_α, cf. l'axiome (BR 3)).*

2.3. *Ensembles ordonnés, domaines fondamentaux et sommes amalgamées*

La preuve de (2.1.1) et de la proposition 2 exposée dans le cours reproduisait à peu de choses près celle de la proposition 4 et du théorème 2 de [7]. Son idée principale s'exprime par le lemme suivant (corollaire 1 de [6]), dont la démonstration est facile. Rappelons (cf. [6]) qu'une application $\varphi : A' \to A$ d'un ensemble ordonné dans un autre est appelée un *revêtement* si, pour tout élément x' de A', elle induit une bijection de $\{y' \in A' \mid y' \leqslant x'\}$ sur $\{y \in A \mid y \leqslant \varphi(x')\}$ et une bijection de $\{y' \in A' \mid y' \geqslant x'\}$ sur $\{y \in A \mid y \geqslant \varphi(x')\}$, et qu'un ensemble ordonné A est dit *simplement connexe* si tout revêtement de A par un ensemble A' non vide est un isomorphisme.

LEMME 1. — *Soit A un ensemble ordonné simplement connexe, soit G un groupe opérant sur A et soit F une partie simplement connexe de A qui est un domaine fondamental pour G au sens suivant :*

$GF = A$;

pour $x \in F$, on a $Gx \cap F = \{x\}$ et $\{y \in A \mid y \leqslant x\} \subset F$.

Pour $x \in A$, soit G_x le fixateur de x dans G, et pour $x, y \in F$ tels que $x \geqslant y$ (d'où $G_x \subset G_y$), soit $\iota_{xy} : G_x \to G_y$ l'inclusion. Alors, G est somme amalgamée des G_x pour $x \in F$; plus exactement, il est la limite inductive du système de groupes G_x $(x \in F)$ relativement aux homomorphismes ι_{xy} $(x, y \in F ;$ $x \geqslant y)$.

Outre la preuve de la proposition 2, on a donné dans le cours d'autres applications du lemme 1. Reprenons les notations I, m_{ij}, W, (s_i) du n° 1.1 et soient G un groupe, (B, N) une BN-paire dans G de groupe de Weyl W et, pour $J \subset I$, B_J le sous-groupe parabolique $B < s_j \mid j \in J > B$ de G. On sait que G est limite inductive des sous-groupes B, B_i $(i \in I)$ et B_{ij} $(m_{ij} \neq \infty)$ relativement aux inclusions $B \to B_i$ et $B_i \to B_{ij}$. Cette propriété, utilisée pour déduire l'assertion (ii) de la proposition 2 de l'assertion (i), est conséquence du lemme 1 (cf. [6], n° 14, où est établi d'ailleurs un résultat plus général). Mais il s'avère qu'une autre présentation utile et bien connue du groupe G, comme limite inductive des sous-groupes N, B, B_i et $N \cap B_i$ $(i \in I)$, relativement aux inclusions $B \to B_i$, $N \cap B_i \to B_i$ et $N \cap B_i \to N$, peut également se déduire du lemme 1. Pour cela, on prend comme ensemble ordonné A l'ensemble des couples (X, Y), où X est soit l'ensemble vide $\emptyset$ soit un appartement de l'immeuble Δ de $(G ; B, N)$, où Y est soit $\emptyset$ soit un simplexe de codimension $\leqslant 1$ de Δ et où, de plus, $Y \subset X$ si $X \neq \emptyset$ et $Y \neq \emptyset$ si $X = \emptyset$. La relation d'ordre est donnée par

$(X, Y) \leqslant (X', Y')$ si et seulement si $X \subset X'$ (i.e. $X = \emptyset$ ou $X = X'$) et $Y \subset Y'$.

Le domaine fondamental F est constitué par tous les couples (X, Y) formés à partir de $\emptyset$, de la chambre fondamentale (stable par B), des cloisons de cette chambre et de l'appartement fondamental, orbite de la chambre fondamentale sous l'action de N. Le fait que A est simplement connexe est établi à l'aide du lemme 1 de [6], n° 12.

Une version plus géométrique de ce dernier argument m'a été signalée par J.-P. Serre. Partant de l'immeuble Δ, on construit un autre complexe simplicial $C\Delta$ en attachant à Δ, pour chaque appartement, un cône au-dessus de cet appartement, et l'on considère aussi le complexe simplicial bidimensionnel $C\Delta'_2$ formé par les simplexes de dimension $\leqslant 2$ du complexe dual de $C\Delta$. Il résulte de propriétés connues des immeubles que $C\Delta$ est simplement connexe. On en déduit, comme conséquence d'un théorème général sur les groupes fondamentaux de complexes simpliciaux, que $C\Delta'_2$ aussi est simplement connexe. Enfin, le fait que l'ensemble ordonné A considéré plus haut est simplement connexe, et la présentation de G qui en résulte, est une simple reformulation de ce dernier résultat.

3. Le système $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$. Jumelages de Moufang

3.1. *Axiomes*

Dans la plupart des cas que l'on rencontre, les systèmes $(B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ satisfaisant aux axiomes (BR 0) à (BR 5) proviennent, via la proposition 3 ci-dessous, de systèmes de sous-groupes $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ possédant les propriétés suivantes, où l'on pose $U^*_\xi = U_\xi - \{1\}$:

(UR 0) le groupe G est engendré par les U_α et l'intersection des normalisateurs des U_α dans G ;

(UR 1) si $\{\alpha, \beta\} \in$ PP (cf. 2.2), l'ensemble $\{uu'u^{-1}u'^{-1} \mid u \in U_\alpha,\ u' \in U_\beta\}$ est contenu dans le groupe engendré par les U_γ, pour $\gamma \in [\alpha, \beta] - \{\alpha, \beta\}$;

(UR 2) si $\alpha \in \Phi_0$ (cf. 1.1) et $u \in U^*_\alpha$, il existe $u', u'' \in U^*_{-\alpha}$ tels que, pour toute racine β, $u'uu''$ transforme par conjugaison U_β en $U_{s_\alpha(\beta)}$, où s_α est défini comme en (BR 3) ;

(UR 3) si $\alpha \in \Phi_0$, $U_{-\alpha}$ n'est pas contenu dans le groupe engendré par les U_β pour $\beta \in \Phi_+$.

Proposition 3. — *Soient G un groupe, $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ un système de sous-groupes satisfaisant aux conditions* (UR 0) *à* (UR 3) *et T l'intersection des normalisateurs des U_α dans G. Alors, le système constitué par les sous-groupes $B_\alpha = TU_\alpha$ ($\alpha \in \Phi$) possède les propriétés* (BR 0) *à* (BR 5) *de la proposition 1 ; en particulier, ils définissent un jumelage.*

La démonstration est facile, compte tenu du lemme suivant :

Lemme 2. — *Si $(\alpha, \beta) \in$ POP, les éléments de $[\alpha, \beta]$ peuvent être rangés en une suite $(\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$ telle que $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_m = \beta$ et $[\gamma_i, \gamma_j] = \{\gamma_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_j\}$ pour $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$.*

Grosso modo, on peut dire que l'existence de groupes U_α traduit la *propriété de Moufang* de [8], § 5. Plus précisément, supposons que le système de Coxeter (W, S) n'ait pas de facteur direct de rang 1. Alors, si $(B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ provient d'un système $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$, le jumelage qui lui est associé (cf. la proposition 1) est un jumelage de Moufang. Réciproquement, soit $(B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ un système définissant un jumelage de Moufang et supposons que l'intersection des B_α ne contienne aucun sous-groupe distingué non trivial de G, condition que l'on peut toujours réaliser sans modifier le jumelage en passant au quotient par le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans cette intersection. Alors, il existe un groupe G' contenant G et un sous-groupe T' de G' ne contenant aucun sous-groupe distingué non trivial de G', tel que $TG = G'$, que $T' \cap G$ soit l'intersection des B_α, que les produits $B'_\alpha = T'B_\alpha$ soient des groupes et que le système $(G' ; (B'_\alpha)_{\alpha\in\Phi})$ satisfasse aux axiomes (BR 0) à (BR 5) (il définit alors le même jumelage que $(G ; (B_\alpha)_{\alpha\in\Phi})$) *et provienne d'un système* $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$. De plus, pour un choix donné de G', T', le système (U_α) est unique. Ces résultats ne sont qu'une reformulation partielle du théorème 3 de [8].

3.2. *Présentation*

Soient G et $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ comme en 3.1. Dans ce numéro, nous supposerons, pour la simplicité des énoncés, que *G est engendré par les U_α*, mais il est facile de déduire de la proposition 4 ci-dessous une présentation de G dans le cas plus général de l'axiome (UR 0).

Soient $\mathcal{L}$ le produit libre des groupes U_α et $\mathcal{R}$ le « groupe des relations », noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{L} \to G$. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}$ de la forme

$$u_\alpha\, u_\beta\, u_\alpha^{-1}\, u_\beta^{-1} \cdot \big(\sum_{i=1}^{m} u_{\gamma_i}\big),$$

où $\{\alpha, \beta\} \in PP$, $[\alpha, \beta] = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ et $u_\xi \in U_\xi$. (On pourrait aussi, sans affecter la validité de la proposition suivante, choisir un ordre total dans chaque $[\alpha, \beta]$ et supposer que les γ_i sont rangés dans cet ordre). Pour $\alpha \in \Phi$, soit $\mathcal{R}_\alpha$ le noyau de l'homomorphisme canonique du produit libre de U_α et $U_{-\alpha}$ dans G et soit M_α l'ensemble des éléments de ce produit libre dont l'image dans G transforme par conjugaison $U_{\pm\alpha}$ en $U_{\mp\alpha}$. Enfin, pour $\alpha, \beta \in \Phi$, soit $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}$ de la forme $m_\alpha\, u_\beta\, m_\alpha^{-1}\, u_\gamma$, où $\gamma = s_\alpha(\beta)$, $m_\alpha \in M_\alpha$ et $u_\xi \in U_\xi$. La proposition suivante est une conséquence facile de la proposition 2.

PROPOSITION 4. — (i) *Le groupe $\mathcal{R}$, noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{L} \to G$, est engendré par*

$$\mathcal{K} \cup (\cup \{\mathcal{R}_\alpha \mid \alpha \in \Phi_0\}) \cup (\cup \{\mathcal{R}_{\alpha,\beta} \mid \alpha \in \Phi_0,\ \beta \in \Phi\}).$$

(ii) *L'ensemble* $\mathcal{K} \cup (\cup \{\mathcal{R}_{\alpha,\beta} \mid \alpha \in \Phi_0, \beta \in \Phi\})$ *engendre un sous-groupe distingué* $\mathcal{L}_1$ *de* $\mathcal{L}$ *et si le système de Coxeter* (W, S) *n'a pas de facteur direct de type* A_1, $G = \mathcal{L}/\mathcal{L}_1$ *est une extension centrale de* G. *Dans ce cas, les images canoniques des* U_α *dans* G *satisfont aussi aux axiomes* (UR 0) *à* (UR 3) *de* 3.1.

Généralisant la remarque 3.7 (a) de [7] aux systèmes (U_α) considérés ici, on a encore donné dans le cours des conditions suffisantes pour que $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ soit contenu dans le groupe engendré par $\mathcal{K}$. Il en est par exemple ainsi quels que soient α et β — et les relations de commutation entre les U_α (i.e. les éléments de $\mathcal{K}$) définissent donc une extension centrale de G — lorsque (W, S) n'a pas de facteur direct de type A_1 et que, de plus, W est fini (ceci généralise un théorème bien connu de Steinberg) ou de type affine et de rang $\geqslant 3$.

4. Relations de commutation pour des paires de racines non prénilpotentes

4.1. *Les groupes* $< B_\alpha, B_\beta >$ *et* $< U_\alpha, U_\beta >$

Dans les présentations du groupe G données par les propositions 2 et 4, les relations entre groupes B_α, B_β ou U_α, U_β concernent seulement les paires de racines $\{\alpha, \beta\}$ prénilpotentes ou telles que $\beta = -\alpha$. On peut se demander si l'introduction de relations supplémentaires impliquant des racines α, β non complémentaires ($\beta \neq -\alpha$) et formant une paire non prénilpotente pourrait conduire à des résultats intéressants. La proposition suivante montre qu'il n'en est rien.

Proposition 5. — *Soient* G *un groupe,* $(B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ *(resp.* $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$*) un système de sous-groupes satisfaisant aux axiomes* (BR 0) *à* (BR 5) *(resp.* (UR 0) *à* (UR 3)*) et* $\{\alpha, \beta\}$ *une paire non prénilpotente de racines non complémentaires* ($\beta \neq -\alpha$). *Alors, l'homomorphisme canonique de la somme de* B_α *et* B_β *amalgamés suivant l'intersection de tous les* B_ξ *(resp. du produit libre de* U_α *et* U_β*) dans* G *est injectif.*

4.2. *Un lemme sur les immeubles*

La proposition 5 se déduit du lemme ci-dessous. Dans ce n° 4.2, nous abandonnons les conventions générales ayant cours dans le restant de ce résumé. Soient Δ un immeuble épais de type (W, S) quelconque (non nécessairement jumelable) et A un appartement de Δ, c'est-à-dire *n'importe quelle* partie de Δ isométrique à W (doté de la distance $(w, w') \mapsto w^{-1}w'$). Une partie de A est appelée *demi-appartement* si c'est l'image d'une racine par une isométrie $W \to A$.

LEMME 3. — *Soient* $D_i \subset A$ $(i = 1, 2)$ *deux demi-appartements disjoints et non complémentaires dans* A *et* X_i *deux sous-groupes de* Aut Δ. *Supposons que, pour* $i = 1$ *ou* 2 *et pour tout* $x \in X_i - X_1 \cap X_2$, *l'ensemble des chambres de* A *fixes par* x *soit un demi-appartement contenu dans* D_i. *Alors, l'homomorphisme canonique de la somme de* X_1 *et* X_2 *amalgamés suivant leur intersection dans* Aut Δ *est injective.*

En termes heuristiques, l'assertion résulte de ce que les transformés de $D_1 \cap D_2$ par les éléments de $< X_1 \cup X_2 >$ se comportent comme les arêtes d'un arbre, le cas où Δ est un arbre étant connu (cf. [3]). Pour la démonstration, on a besoin du fait, prouvé aussi dans le cours, que la réunion de deux demi-appartements de Δ (c'est-à-dire, deux parties de Δ isométriques à des racines) ayant même bord et sans chambre commune est un appartement.

II. UN THÉORÈME D'ISOMORPHISME. RÉDUCTION AU RANG 2

Dans cette deuxième partie, les m_{ij} *sont supposés finis.*

5. ÉNONCÉ ET COMMENTAIRES

5.1. *Enoncé du théorème*

Si Δ est un immeuble de type M, $x \in \Delta$ une chambre et J une partie de I, nous notons $E_J(\Delta, x)$ ou $E_J(x)$ l'ensemble $\{y \in \Delta \mid \mathcal{w}(x, y) \in < s_j \mid j \in J >\}$, c'est-à-dire l'étoile de la facette de type $I - J$ de x, et nous posons $E_2(x) = \cup \{E_J(x) \mid \text{Card } J = 2\}$. L'ensemble $E_J(x)$ est appelé la *sphère de centre* x *et de rayon* $< s_j \mid j \in J>$, ou simplement *de rayon* J. Soient $(\Delta_+, \Delta_-, \mathcal{w}^*)$ et $(\Delta'_+, \Delta'_-, \mathcal{w}'^*)$ deux jumelages de type M, et soient X_+, X_-, X'_+ et X'_- des parties (ensembles de chambres) de Δ_+, Δ_-, Δ'_+ et Δ'_- respectivement ; une application de $X_+ \cup X_-$ sur $X'_+ \cup X'_-$ sera appelée une *isométrie* si elle est compatible, en un sens évident, avec les distances $\mathcal{w}$ (selon une convention de [8], les fonctions W-distances dans les immeubles de type M sont toutes notées $\mathcal{w}$) et les codistances $\mathcal{w}^*$ et $\mathcal{w}'^*$.

THÉORÈME 1. — *Soient* $(c_+, c_-) \in \Delta_+ \times \Delta_-$ *et* $(c'_+, c'_-) \in \Delta'_+ \times \Delta'_-$ *des couples de chambres opposées. Alors, toute isométrie* $\varphi_+ : E_2(c_+) \cup \{c_-\} \to E_2(c'_+) \cup \{c'_-\}$ *se prolonge de façon unique en une isométrie* $\bar{\varphi}_+ : \Delta_+ \cup \{c_-\} \to \Delta'_+ \cup \{c'_-\}$.

5.2. *Fondations. Reformulation de l'énoncé*

Selon une terminologie introduite dans [2], nous appelons *fondation de type* M, un système $\mathcal{F} = (E, c_0, (\Delta_{ij} \mid i, j \in I\ ;\ i \neq j))$ formé d'un ensemble pointé

(E, c_0) et d'une famille de parties Δ_{ij} de E indexées par les paires d'éléments distincts de I (en toute rigueur, il faudrait écrire $\Delta_{\{i,j\}}$ au lieu de Δ_{ij}) et dotées de structures d'immeubles telles que :

$c_0 \in \Delta_{ij}$ pour tous i, j ;

Δ_{ij} est un immeuble au-dessus de $\{i, j\}$ de type $\begin{pmatrix} 1 & m_{ij} \\ m_{ij} & 1 \end{pmatrix}$;

pour $i, j \in I$, la sphère $E_{\{i\}}(\Delta_{ij}, c_0)$ ne dépend pas de j ; on la note Δ_i ;

pour tout triple (i, j, k) d'éléments distincts de I, on a $\Delta_{ij} \cap \Delta_{ik} = \Delta_i$.

Une fondation est donc, en gros, un système d'immeubles de rang 2 amalgamés suivant des sous-immeubles de rang 1. Un *appartement* de $\mathcal{F}$ est défini comme une partie de E contenant c_0 dont l'intersection avec chaque Δ_{ij} est un appartement de celui-ci.

Reprenons les notations de l'énoncé du théorème. Le système $\mathcal{F}(\Delta_+, c_+) = (E_2(c_+), c_+, (E_{\{i,j\}}(c_+)))$ est une fondation de type M et l'intersection de $E_2(c_+)$ avec l'appartement $A(c_+, c_-)$ de Δ_+ (cf. [8], 3.2) en est un appartement. Le lemme suivant est facile :

LEMME 4. — *La restriction de $\mathcal{W}$ à $E_2(c_+) \times E_2(c_+)$ est entièrement déterminée par la fondation $\mathcal{F}(\Delta_+, c_+)$ et la restriction de $\mathcal{W}^*$ à $E_2(c_+) \times \{c_-\}$ est déterminée par l'appartement $E_2(c_+) \cap A(c_+, c_-)$ de cette fondation.*

On voit donc que le théorème peut s'exprimer en termes plus imagés (mais un peu moins précis) de la façon suivante :

L'immeuble Δ_+ est canoniquement déterminé par la fondation $\mathcal{F}(\Delta_+, c_+)$ et l'appartement $E_2(c_+) \cap A(c_+, c_-)$ de celle-ci.

5.3. *Un problème non résolu*

Les données $\mathcal{F}(\Delta_+, c_+)$ et $E_2(c_+) \cap A(c_+, c_-)$ déterminent non seulement Δ_+ mais aussi Δ_-. En effet, il résulte de propriétés élémentaires des jumelages (cf. [8], 3.1 et 2.3 (b)) qu'avec les notations du théorème, il existe une unique isométrie $\varphi_- : E_2(c_-) \cup \{c_+\} \to E_2(c'_-) \cup \{c'_+\}$ telle que le couple (φ_+, φ_-) soit compatible avec les codistances (ou, ce qui revient au même, avec les relations d'opposition). Appliquant le théorème en intervertissant $+$ et $-$, on obtient une isométrie $\bar{\varphi}_- : \Delta_- \cup \{c_+\} \to \Delta'_- \cup \{c'_+\}$ prolongeant φ_-. Pour que φ_+ soit la restriction à $E_2(c_+) \cup \{c_-\}$ d'un isomorphisme de jumelages $(\Delta_+, \Delta_-, \mathcal{W}^*) \to (\Delta'_+, \Delta'_-, \mathcal{W}'^*)$, il faut et il suffit que l'on ait

(P) $\mathcal{W}'^*(\bar{\varphi}_+(x), \bar{\varphi}_-(y)) = \mathcal{W}^*(x, y)$ pour tous $x \in \Delta_+$ et $y \in \Delta_-$.

J'ignore si la propriété (P) est vraie quels que soient les jumelages et la fonction φ_+ considérés, auquel cas, la fondation $\mathcal{F}(\Delta_+, c_+)$ et l'appartement $E_2(c_+) \cap A(c_+, c_-)$ détermineraient non seulement les immeubles Δ_+ et Δ_-, mais aussi la codistance $\mathscr{W}^*$, donc le jumelage tout entier. En tout cas, il en est ainsi lorsque W est fini, comme il résulte de [8], 2.3 (b) ; on voit donc que le théorème 1 généralise le théorème 4.1.2 (ou plutôt la proposition 4.16) de [4] ; la démonstration, dont les grandes lignes seront indiquées au § 8, est d'ailleurs essentiellement pareille.

6. Rôle de la propriété de Moufang

6.1. Disons que la matrice de Coxeter M — ou le système de Coxeter (W, S) — possède un facteur direct de rang $r <$ Card I s'il existe une partie J de I, de cardinal r, telle que $m_{ij} = 2$ chaque fois que $i \in I - J$ et $j \in J$. Les deux parties de la proposition suivante se démontrent à partir du théorème 1 de la même façon que le théorème 1 de [5], 3.5, à partir de la proposition 4.16 de [4].

Proposition 6. — *Supposons que la matrice de Coxeter M n'a pas de facteur direct de rang $\leqslant 2$, et soit $(\Delta_+, \Delta_-, \mathscr{W}^*)$ un jumelage de type M.*

(i) *Si $i, j \in I$ sont tels que $m_{ij} \geqslant 3$, alors, toute sphère de rayon $\{i, j\}$ (cf. 5.2) dans Δ_+ (et dans Δ_- aussi, évidemment) est un immeuble (un m_{ij}-gone généralisé) de Moufang.*

(ii) *Si la propriété (P) est vraie pour $\Delta_\pm = \Delta'_\pm$ quels que soient c_+, c'_+ et φ_+, alors le jumelage $(\Delta_+, \Delta_-, \mathscr{W}^*)$ lui-même possède la propriété de Moufang.*

Corollaire 1. — *S'il existe un jumelage de type $M = (m_{ij})$, sans facteur direct de rang $\leqslant 2$, on a $m_{ij} = 2, 3, 4, 6$ ou 8 quels que soient $i, j \in I$, $i \neq j$.*

(Rappelons qu'on suppose toujours les m_{ij} finis dans cette seconde partie de l'exposé).

J'avais conjecturé, dans le cours, que la réciproque de l'assertion (ii) ci-dessus est vraie et, plus généralement, que si les jumelages considérés dans l'énoncé du théorème 1 sont des jumelages de Moufang, alors φ_+ se prolonge en un isomorphisme du jumelage $(\Delta_+, \Delta_-, \mathscr{W}^*)$ sur le jumelage $(\Delta'_+, \Delta'_-, \mathscr{W}'^*)$. J'ai pu, depuis lors, déduire cela du théorème 1 lui-même et de la proposition 4 du n° 3.2.

6.2. *Structures de Moufang*

La proposition 6 (i) nous apprend que dans un immeuble participant à un jumelage, disons de rang $\geqslant 3$ et de type irréductible, les sphères de rang 2 et de type irréductible sont des immeubles de Moufang. Nous allons voir qu'il existe un résultat analogue pour les sphères de rang 1 mais, les immeubles de rang 1 étant de simples ensembles, sans structure, il ne s'agira plus ici d'une propriété des sphères, vues comme immeubles, mais d'une structure additionnelle « induite » sur les sphères de rang 1 par l'immeuble ambiant, et que nous appelons *structure de Moufang*. Une structure de Moufang sur un ensemble X est définie comme une famille $(U_x)_{x \in X}$ indexée par X de groupes de permutations de X soumis aux conditions suivantes :

pour tout $x \in X$, U_x fixe x et est simplement transitif (*i.e.* régulier) sur $X - \{x\}$;

dans le groupe engendré par les U_x (groupe qui est donc doublement transitif dès que Card.X $\geqslant 3$), le fixateur de x normalise U_x.

PROPOSITION 7. — *Si Δ est, soit un immeuble de Moufang de type sphérique, soit l'un des deux immeubles composant un jumelage dont le type n'a pas de facteur direct de rang $\leqslant 2$, les sphères de rang 1 de Δ ont une structure de Moufang canonique.*

La signification précise de cet énoncé, *a priori* un peu vague, ressortira de l'esquisse de démonstration qui suit.

Considérons d'abord le cas où Δ participe à un jumelage *de Moufang* $\Delta = (\Delta_+, \Delta_-, \mathscr{W}^*)$ (ce qui couvre le premier cas de l'énoncé). Soit $X = E_{\{i\}}(c)$ une sphère de rang 1 de Δ et soit c_- une chambre de Δ_- opposée à c. À ces choix correspond (suivant [8], § 6) un système $(U_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ de groupes d'automorphismes du jumelage. Si $\alpha_i \in \Phi_0$ désigne la racine simple dont le bord est fixé par s_i, le groupe de permutations de X induit par U_{α_i} et ses conjugués par les éléments de $U_{-\alpha_i}$ constituent la structure de Moufang en question dans l'énoncé. Il faut évidemment prouver que cette structure est indépendante du choix de c et c_- : c'est facile.

Supposons à présent que Δ participe à un jumelage que l'on ne suppose plus de Moufang, mais dont le type n'a pas de facteur direct de rang $\leqslant 2$. Bien que le théorème 1 ne suffise plus à prouver la propriété de Moufang pour le jumelage, on peut voir qu'il permet encore de définir des groupes U_{α_i} et $U_{-\alpha_i}$, dont on se sert pour montrer que la structure de Moufang induite sur $X = E_{\{i\}}(c)$ par l'immeuble de Moufang $E_{\{i,j\}}(c)$ pour j tel que $m_{ij} \neq 2$ (cf. la proposition 6(i) et le premier cas, déjà envisagé, de la proposition 7) ne dépend pas de j ni du choix de c, d'où l'assertion.

6.3. *Fondations de Moufang*

Une fondation $(E, c_0, (\Delta_{ij} \mid i, j \in I\ ;\ i \neq j))$ (cf. 5.2) de type M sans facteur direct de rang 1 est dite de Moufang si, pour toute paire $\{i, j\}$ telle que $m_{ij} \geqslant 3$, Δ_{ij} est un immeuble de Moufang et si, pour i, j, k tels que $m_{ij} \geqslant 3$ et $m_{ik} \geqslant 3$, les structures de Moufang induites sur $\Delta_i = \Delta_{ij} \cap \Delta_{ik}$ par Δ_{ij} et Δ_{ik} selon la proposition 7 sont les mêmes. La proposition 6(i) et la proposition 7 ont pour conséquence immédiate le

COROLLAIRE 2. — *Avec les notations du n° 5.2, si M n'a pas de facteur direct de rang* $\leqslant 2$, *la fondation* $\mathcal{F}(\Delta_+, c_+)$ *est une fondation de Moufang.*

Le lemme suivant est facile :

LEMME 5. — *Le groupe des automorphismes d'une fondation de Moufang permute transitivement les appartements de celle-ci.*

La dernière assertion de 5.2, le corollaire 2, le lemme 5 et le résultat annoncé à la fin du n° 6.1 entraînent aussitôt la proposition suivante :

PROPOSITION 8. — *Avec les notations du n° 5.2, la fondation* $\mathcal{F}(\Delta_+, c_+)$ *détermine à isomorphisme* non canonique *près les immeubles* Δ_+ *et* Δ_-. *Elle détermine aussi le jumelage* $(\Delta_+, \Delta_-, \mathcal{W}^*)$ *si l'on exige que celui-ci soit un jumelage de Moufang.*

7. APPLICATION À LA CLASSIFICATION

7.1. *Deux étapes*

Dans ce numéro, la matrice de Coxeter M est supposée sans facteur direct de rang $\leqslant 2$.

Pour la classification des jumelages de Moufang de type M ou, ce qui revient au même, la classification à extension centrale près des systèmes $(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi})$ satisfaisant aux axiomes (UR 1) à (UR 3) et tels que les U_α engendrent G, le corollaire 2 et la proposition 8 du numéro précédent suggèrent une méthode comportant deux étapes :

(A) classification des fondations de Moufang de type M ;

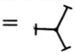
(B) recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fondation de Moufang donnée $\mathcal{F} = (E, c_0, (\Delta_{ij} \mid i, j \in I\ ; i \neq j))$ soit « intégrable », c'est-à-dire soit la fondation $\mathcal{F}(\Delta_+, c_+)$ du n° 5.2 pour un immeuble Δ_+ faisant partie d'un jumelage de Moufang.

Le problème (A) ne présente guère de difficulté de principe, une fois connus les immeubles de Moufang de rang 2. Un exemple, traité dans le cours, sera donné au numéro suivant.

En ce qui concerne le problème (B), le théorème 2 de [2] suggère la conjecture suivante, qui a été vérifiée dans quelques cas :

Conjecture. — *Pour que la fondation* $\mathcal{F}$ *soit intégrable, au sens précisé ci-dessus, il faut et il suffit que, pour toute partie J de I telle que* $M\mid_{J\times J}$ *est de type* A_3 *ou* C_3, *la fondation* $(\cup\{\Delta_{ij} \mid i, j \in J\}, c_0, (\Delta_{ij} \mid i, j \in J\ ; i \neq j))$ *soit intégrable.*

7.2. *Un exemple*

Nous nous proposons de déterminer toutes les fondations de Moufang dans le cas particulièrement simple suivant : $m_{ij} \leqslant 3$ pour tous i et j, le graphe Γ dont les sommets sont les éléments de I et dont les arêtes sont les paires $\{i, j\}$ telles que $m_{ij} = 3$ (graphe qui caractérise donc M) est connexe et ce graphe possède au moins un sous-graphe plein de type D_4 =  .

Soit donc $\mathscr{F} = (E, c_0, (\Delta_{ij}))$ une fondation de type M satisfaisant à ces conditions. De propriétés bien connues des plans de Moufang et des immeubles de type D_4 (cf. [4], 6.12 et 9.11), on déduit les faits suivants :

(1) Si $i \in I$ appartient à un sous-graphe plein de Γ de type D_4, Δ_i est la droite projective d'un corps commutatif k_i dotée de sa structure de Moufang naturelle : l'ensemble sous-jacent $\mathbf{P}_i(k_i)$ peut être identifié à $k_i \cup \{\infty\}$ de telle façon que les groupes U_x constituant la structure en question (cf. 6.2) soient les conjugués du groupe des translations de k_i par les transformations homographiques. On note que la structure de Moufang ainsi définie détermine le corps k_i *à isomorphisme canonique près* (voir à ce sujet la remarque ci-dessous).

(2) Si $\{i, j\}$ est une arête de Γ, Δ_{ij} est l'immeuble d'un plan projectif Π. Si, de plus, Δ_i est la droite projective d'un corps commutatif k_i dotée de sa structure de Moufang naturelle, alors Π est isomorphe au plan projectif $\mathbf{P}_2(k_i)$, Δ_j est également la droite projective d'un corps commutatif k_j et Π *détermine* un isomorphisme $\sigma_{ij} : k_i \to k_j$.

Comme Γ est supposé connexe, on voit qu'à tout $i \in I$ est canoniquement attaché un corps commutatif k_i, et à tout couple (i, j) tel que $m_{ij} = 3$ un isomorphisme $\sigma_{ij} : k_i \to k_j$. De plus, il est clair que $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}^{-1}$. Choisissant dans Γ un sommet origine o, on déduit aussitôt de la discussion qui précède que

les classes d'isomorphisme de fondations de Moufang de type M sont en bijection naturelle avec les classes d'isomorphisme de couples (k, σ), où k est un corps commutatif (on prend $k = k_o$) et où σ est un homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(\Gamma, o)$ du graphe Γ dans le groupe des automorphismes de k.

Si la conjecture du n° 7.1 est vraie, à tout tel couple (k, σ) est associé un jumelage de Moufang $\mathscr{J}(k, \sigma)$, donc divers groupes intéressants, notamment Aut $(\mathscr{J}(k, \sigma))$ et le sous-groupe distingué de celui-ci engendré par les U_α, sous-groupe que nous notons $G(k, \sigma)$. Il y a deux cas où $G(k, \sigma)$ est un groupe connu, à partir duquel on peut construire le jumelage (par la méthode de [8], 7.1), prouvant ainsi la conjecture dans ces cas-là :

(a) si $\sigma(\pi_1(\Gamma, o)) = \{1\}$, $G(k, \sigma)$ est le quotient par son centre du groupe de

Kac-Moody (« simplement connexe ») sur k correspondant à la matrice de Cartan généralisée (A_{ij}) définie par $A_{ij} = 2$, 0 ou -1 selon que $m_{ij} = 1$, 2 ou 3 ;

(b) si Γ est un cycle de longueur n, et si $\alpha \in \operatorname{Aut} k$ désigne l'image par σ d'un générateur du groupe fondamental de Γ, on a $G(k, \sigma) = \mathrm{PSL}_n(R)$, où R est l'anneau non commutatif engendré par k et une indéterminée t telle que $txt^{-1} = \alpha(x)$ pour $x \in k$.

Remarque. Si l'on remplace l'hypothèse, faite dans ce numéro, que Γ possède un sous-graphe plein de type D_4 par celle, plus faible, que Γ, toujours supposé connexe, n'est pas un graphe complet, on trouve, par des raisonnements analogues à ceux faits plus haut, que les Δ_{ij} sont des immeubles de plans projectifs desarguésiens, donc sur des corps gauches, plans qui sont deux à deux isomorphes ou duaux. Une différence essentielle avec le cas particulier qui a été considéré ici est que la structure de Moufang de la droite projective d'un corps gauche k ne détermine plus canoniquement k lui-même, mais seulement, à automorphisme intérieur près, la paire formée de k et de son opposé. La classification des fondations de Moufang de type M reste facile dans ce cas, mais l'énoncé du résultat final est beaucoup moins simple.

7.3. *Remarques sur les groupes de Kac-Moody*

Généralisant l'exemple (a) de 7.2, on obtient une approche géométrique des groupes de Kac-Moody sur les corps lorsque les matrices de Cartan généralisées (A_{ij}) considérées satisfont à la condition (hélas bien restrictive !) $A_{ij}A_{ji} \leqslant 3$ pour tous i, j.

D'autre part, 7.2 fait apparaître pour les groupes « à la Kac-Moody » un phénomène nouveau par rapport à la théorie classique des groupes algébriques simples : l'existence d'une « torsion non galoisienne » que l'on peut exprimer, de façon imagée, en disant que le groupe $G(k, \sigma)$ est défini, non sur un « vrai » corps k, mais sur un « corps tordu » (constitué par le système (k_i, σ_{ij})).

8. Esquisse de démonstration du théorème 1

Comme on l'a dit, la démonstration du théorème 1 exposée dans le cours généralise celle de la proposition 4.16 de [4]. Cette généralisation, loin de compliquer les raisonnements, a l'effet bénéfique d'en rendre l'idée plus transparente en obligeant à dissocier les immeubles Δ_+ et Δ_- qui étaient évidemment confondus dans [4]. La présente esquisse devrait donc pouvoir servir aussi à une meilleure compréhension du § 4 de [4].

Reprenons les notations de l'énoncé du théorème 1. Pour construire $\bar{\varphi}_+$, on veut avoir un procédé qui permette de « copier » dans Δ'_+ toute galerie de Δ_+

(cf. [8], 3.3) issue de c_+. Cependant, afin de pouvoir raisonner par induction, il est nécessaire de transporter une donnée analogue à la donnée φ_+ de départ le long de la galerie considérée. Pour cela, on se souvient d'abord qu'à toute chambre x_+ de Δ_+ est canoniquement associée une chambre qui lui est opposée dans l'appartement $A(c_-, c_+)$, à savoir, la chambre x_- de cet appartement définie par $\mathscr{W}(c_+, x_+) = \mathscr{W}^*(c_+, x_-)$ (cf. [8], 3.3, preuve de la prop. 5), et l'on pose $\mathscr{R}(x_+) = E_2(x_+) \cup \{x_-\}$ (cet ensemble $\mathscr{R}(x_+)$ peut être vu comme un repère mobile pour Δ_+, mais un repère surabondant, comme il résulte du théorème 1 de [8]). On définit de même $\mathscr{R}(x'_+)$ pour $x'_+ \in \Delta'_+$. La machine à copier les galeries est alors fournie par le lemme suivant :

Lemme 6. — *Si x et y sont des chambres adjacentes (i.e. $\mathscr{W}(x, y) \in S$) de Δ_+, si $x' \in \Delta'_+$ et si $\psi : \mathscr{R}(x) \to \mathscr{R}(x')$ est une isométrie, il existe au plus une chambre y' de Δ'_+ adjacente à x' et une isométrie $\theta : \mathscr{R}(y) \to \mathscr{R}(y')$ coïncidant avec ψ sur $E_2(x) \cap E_2(y)$.*

La preuve, qui utilise le théorème 1 de [8], est facile. Lorsque y' et θ existent, nous posons $\theta = T(x, y)\, \psi$.

Le principe de la construction de Δ_+ est à présent clair : pour $x \in \Delta_+$, on considère une galerie $c_+ = x_0, x_1, \ldots, x_m$ joignant c_+ et x dans Δ_+, puis l'on définit inductivement une galerie $c'_+, x'_1, \ldots, x'_m$ dans Δ'_+ et des isométries $\varphi_l : \mathscr{R}(x_l) \to \mathscr{R}(x'_l)$ par $\varphi_0 = \varphi_+$ et $\varphi_{l+1} = T(x_l, x_{l+1})\, \varphi_l$ pour $l = 0, 1, \ldots, m-1$; enfin, on pose $\bar{\varphi}_+(x) = \varphi_m(x)$. Deux problèmes restent à résoudre : l'existence des φ_l (dont l'unicité résulte du lemme 6) et l'indépendance du résultat par rapport au choix de la galerie. Pour cela, on introduit la notion d'isométrie admissible : pour $x \in \Delta_+$ et $x' \in \Delta'_+$, une isométrie de $\mathscr{R}(x)$ sur $\mathscr{R}(x')$ est dire *admissible* si elle se prolonge en une isométrie de $\mathscr{R}(x) \cup \{c_-\}$ sur $\mathscr{R}(x') \cup \{c'_-\}$. Les lemmes suivants fournissent alors la solution des deux problèmes en question.

Lemme 7. — *Si $x, y \in \Delta_+$ sont deux chambres adjacentes, si $x' \in \Delta'_+$ et si $\psi : \mathscr{R}(x) \to \mathscr{R}(x')$ est une isométrie admissible, alors $T(x, y)\, \psi$ existe et est une isométrie admissible.*

Lemme 8. — *Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_m = x_0)$ une galerie fermée de Δ_+. Si $x'_0 \in \Delta'_+$ et si $\psi : \mathscr{R}(x_0) \to \mathscr{R}(x'_0)$ est une isométrie admissible, alors l'isométrie*

$$T(x_m, x_{m-1})\, T(x_{m-1}, x_{m-2}) \ldots T(x_1, x_0)\, \psi,$$

qui existe en vertu du lemme précédent, coïncide avec ψ.

Utilisant le fait que l'ensemble ordonné des facettes de codimension $\leqslant 2$ de Δ_+ est simplement connexe (cf. 2.3 et [6], proposition 2), on ramène la preuve du lemme 8 au cas où la galerie considérée est formée des chambres d'un appartement d'une sphère de rang 2 de Δ_+. La preuve du lemme 7 et du cas particulier en question du lemme 8 se fait par des constructions explicites, semblables à celles de [4], 4.13 à 4.15.

(NB. Le mot « admissible » a une autre signification ici que dans [4].)

Remarque. On pourrait améliorer la démonstration précédente et peut-être prouver la propriété (P) de 5.3 si l'on disposait d'une propriété de simple connexion analogue à la précédente pour l'ensemble des couples de facettes opposées de codimension $\leqslant 2$. Il me paraît peu probable qu'une telle propriété soit toujours vraie mais elle peut l'être dans des cas intéressants, voire dans le cas « générique », en un sens à préciser.

J.T.

Références

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie,* chap. IV à VI (Hermann, Paris, 1972).

[2] M. Ronan et J. Tits, *Building buildings* (*Math. Annalen* 278, 1987, 291-306).

[3] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2 (*Astérisque* 46, 1977).

[4] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs* (*Lecture Notes in Math.* n° 386, Springer-Verlag, 1974).

[5] — *Endliche Spiegelungsgruppen, die als Weylgruppen auftreten* (*Inventiones Math.* 43, 1977, 283-295).

[6] — *Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées* (*Bull. Soc. Math. Belgique,* Sér. A, 38, 1986, 367-387).

[7] — *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields* (*Journal of Algebra* 105, 1987, 542-573).

[8] — *Résumé de cours* (*Annuaire du Collège de France,* 89e année, 1988-1989, 81-96).

Publications

J. Tits, *Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody* (*in :* Séminaire Bourbaki, 1988-1989, exp. n° 700, novembre 1988, *Astérisque, Soc. Math. Fr.,* 177-178, 1989, 7-31).

— *Spheres of radius 2 in triangle buildings, I* (*in :* Finite geometries, buildings and related topics, *Oxford Science Publications,* 1990, 17-28).

— *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups* (*Journal of Algebra,* 131, 1990, 648-677).

Missions et conférences

Exposés

— *Doppelgebäude und Kac-Moody Gruppen,* Bielefeld, octobre 1989.

— *Automorphismengruppen von Bäumen,* Bielefeld, octobre 1989.

— *Groupes d'automorphismes d'arbres,* Séminaire Chevalley, Paris, mars 1990 ; colloque « Arithmétique et Géométrie » (en l'honneur d'A. Haefliger et M. Kervaire), Genève, avril 1990 ; Louvain-la-Neuve, mai 1990.

— *Polygones,* « Des Mathématiques », Ec. Norm. Sup., avril 1990.

— *Gruppen vom Kac-Moody Typ,* première séance du Berliner Mathematisches Colloquium, colloque commun des quatre instituts mathématiques de Berlin, créé après la chute du mur, Berlin, avril 1990 ; Max-Planck Institut, Bonn, juin 1990.

— *Mostro e « Moonshine » : una panoramica,* Lezioni Leonardesche, Milan, mai 1990.

— *Twin buildings and Kac-Moody type groups,* Gand, mai 1990 ; 4 exposés au Symposium « Groups and Combinatorics » de la London Math. Soc., Durham, juillet 1990.

— *Théorème de Witt et classification des groupes algébriques simples sur les corps,* Congrès de la Soc. Math. de Belgique, Bruxelles, juin 1990.

— *Die Klassifikation einfacher algebraischer Gruppen über Körpern : ein Überblick,* Göttingen, juin 1990.

— *Das Riemann-Helmholtz-Lie-sche Raumproblem,* 26e Heinrich-Behnke-Colloquium, Münster, juin 1990.