Théorie des groupes

M. Jacques TITS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Sous le titre : « Groupes algébriques sur les corps non parfaits », on se proposait d'étudier, dans le cours de cette année, certaines questions relatives aux groupes algébriques, dans lesquelles des phénomènes d'inséparabilité jouent un rôle important, soit qu'il s'agisse de propriétés vraies sur les corps parfaits et qui cessent de l'être en général (on s'intéresse alors à la fabrication de contre-exemples, ou aux façons de modifier les énoncés pour pouvoir, malgré tout, les étendre à un corps quelconque), soit que les preuves courantes, celles par exemple qui utilisent des arguments de descente galoisienne, cessent d'être valables, ce qui impose la recherche d'autres méthodes de démonstration.

Citons trois « accidents » bien connus qui peuvent arriver à un groupe G sur un corps k non parfait (nous supposons G affine et connexe) :

— le groupe $G(k)$ des points rationnels de G sur k peut n'être pas dense pour la topologie de Zariski (bien que k soit infini) ;

— sans être réductif (sur une clôture algébrique de k), le groupe G peut ne posséder aucun k-sous-groupe unipotent connexe distingué non réduit à l'élément neutre ; nous disons alors que G est *pseudo-réductif* (sur k) ;

— un élément unipotent de $G(k)$ peut être « mauvais », c'est-à-dire n'être contenu dans aucun k-sous-groupe unipotent connexe déployé de G.

La description d'*exemples* de tels phénomènes a pris plus d'extension que prévu et a, en fin de compte, occupé la majeure partie du cours. Plusieurs thèmes qui faisaient partie du plan primitif (conjugaison des tores déployés maximaux, classification des groupes pseudo-réductifs sur un corps séparablement clos, conditions nécessaires à l'existence de mauvais éléments unipotents, etc.) n'ont pu être traités et seront repris l'an prochain.

Les questions qui ont été abordées se groupent autour de deux idées principales :

— densité ou non densité de $G(k)$ dans G ;

— construction d'exemples de groupes pseudo-réductifs.

DENSITÉ

Les k-groupes algébriques G ayant un groupe de points rationnels $G(k)$ dense pour la topologie de Zariski peuvent être vus comme des groupes « abstraits » (à savoir ici $G(k)$) dotés d'une structure supplémentaire, par exemple une algèbre de fonctions dans le cas affine ; cette circonstance permet, dans l'étude de tels groupes algébriques, de s'appuyer sur l'intuition de la théorie des groupes ordinaires, et est particulièrement commode pour la description de certains exemples, d'où l'intérêt pour nous de ces problèmes de densité. Dans le cours, on a commencé par rappeler deux résultats bien connus affirmant la densité de $G(k)$ dans des cas importants.

1. *Deux théorèmes de densité*

Dans ce résumé, « réductif » signifie « réductif connexe », et tous les groupes algébriques (ou k-groupes) considérés sont *affines*.

PROPOSITION 1. — *Soient k un corps et G un k-groupe connexe. Supposons satisfaite l'une des deux conditions suivantes :*

k est parfait ;

G est réductif.

Alors, G est une variété unirationnelle, c'est-à-dire que le corps des fonctions rationnelles sur G est isomorphe à un sous-corps d'une extension transcendante pure de type fini de k. En particulier, si k est infini, $G(k)$ est dense dans G pour la topologie de Zariski.

Cf. [1], 18.2.

PROPOSITION 2. — *Sur un corps K séparablement clos, le groupe $G(K)$ des points rationnels de tout K-groupe (et même de toute K-variété lisse) G est dense dans G pour la topologie de Zariski.*

Cf. [1], AG 13.3. Pour tout corps k, cette proposition permet, ayant choisi une clôture séparable k_s de k, de voir un k-groupe G comme un groupe « abstrait » (à savoir $G(k_s)$) doté d'une k_s-algèbre de fonctions et d'une action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k_s/k)$.

2. *Contre-exemples*

Le fait qu'un groupe connexe G sur un corps infini k n'est pas nécessairement l'adhérence du groupe $G(k)$ de ses points rationnels a été observé pour la première fois par M. Rosenlicht [8]. Les exemples suivants, donnés dans le cours, sont une variante un peu simplifiée de ceux de [8], et montrent que $G(k)$ peut même être réduit à l'élément neutre sans que G le soit. Des remarques de B. Saint-Loup m'ont permis d'en améliorer la présentation.

Soient p un nombre premier, q une puissance de p, k_0 un corps de caractéristique p, $k = k_0(t)$ une extension transcendante pure de degré 1 de k_0 et G le sous-groupe de $\mathbf{Add}^2$ défini, en termes de coordonnées, x, y, par l'équation

$$tx^q + y^q + x = 0. \tag{1}$$

Il est immédiat que G *est lisse et isomorphe au groupe additif sur « la » clôture algébrique de* k. Pour déterminer $G(k)$, prenons x et y dans k et dérivons (1) par rapport à t ; il vient

$$x^q + x' = 0. \tag{2}$$

Posons $x = u/v$, où $u,v \in k_0[t]$ sont des polynômes premiers entre eux et $v \neq 0$. De (2), on déduit que $u^q v^{2-q} = uv' - u'v \in k_0[t]$. Si $q > 2$, il s'ensuit que $v \in k_0$ ou $u = 0$, d'où $x \in k_0[t]$. Mais alors, (2) implique que $x = 0$ puis, vu (1), que $y = 0$. En conclusion :

si $q > 2$, *on a* $G(k) = \{(0, 0)\}$.

Si $q = 2$, G est une conique, donc $G(k)$ est dense dans G. Toutefois, même pour $q = 2$, G n'est pas k-isomorphe au groupe additif car il n'a pas de « point à l'infini » k-rationnel.

Remarque. Des calculs analogues mais un peu plus compliqués montrent que si $c \in k_0{}^\times$ et si G désigne maintenant le sous-groupe de $\mathbf{Add}^2$ d'équation $x^q + ty^q - cx = 0$, avec $q > 2$, alors $G(k) = \{(\zeta, 0 \mid \zeta \in k_0, \zeta^q = c\,\zeta\}$.

3. *Cas d'un tore*

Lorsque le groupe G est un tore, la proposition 1 peut être précisée :

PROPOSITION 3. — *Soit k un corps qui n'est pas extension algébrique d'un corps fini, et soit T un k-tore. Alors, il existe un point rationnel $t \in T(k)$ tel que le groupe $t^{\mathbf{Z}}$ engendré par t soit dense dans T.*

Cf. [9], 1.6. La preuve exposée dans le cours, et dont nous reprenons ci-dessous les étapes principales, est un peu plus simple que celle de [9] et elle en précise aussi certains arguments.

(1) On supposera le corps k de type fini, ce qui est loisible car il suffit de lui substituer son sous-corps engendré par les coefficients d'équations définissant T et, au besoin, un élément transcendant sur le corps premier.

(2) Soient l une extension galoisienne finie de k déployant T (cf. [1], 8.11), $\Gamma = \mathrm{Gal}(l/k)$ son groupe de Galois et X le $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module des caractères rationnels (sur l) de T. Ce module peut être plongé dans un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module libre ; à ce dernier correspond alors un tore dont T est l'image par un épimorphisme. Cela nous permet de supposer, sans nuire à la généralité, que X lui-même est libre, de base notée $(\chi_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$.

(3) Pour établir la proposition, il suffit de prouver l'assertion suivante :

(*) il existe $z_1, \ldots, z_m \in l^\times$ tels que les $\gamma(z_i)$, pour γ parcourant Γ et $1 \leqslant i \leqslant m$, soient multiplicativement indépendants.

En effet, si l'on note alors t l'élément de $T(k)$ sur lequel le caractère $\gamma.\chi_i$ prend la valeur $\gamma(z_i)$, l'adhérence du groupe $t^{\mathbf{Z}}$ pour la l-topologie de Zariski est un l-sous-groupe sur lequel aucun caractère non trivial ne vaut 1 (car, vu l'hypothèse faite sur les z_i, aucun caractère non trivial ne vaut 1 sur t), et cela implique que l'adhérence de $t^{\mathbf{Z}}$ est le groupe T tout entier (cf. [1], 8.2).

(4) Les valuations de k dont il va être question seront toujours supposées discrètes et normées. Pour prouver (*) (donc la proposition 3), il suffit de montrer :

(**) il existe une infinité de valuations de k possédant $[l:k]$ prolongements distincts à l.

En effet, si v_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont m telles valuations, la condition (*) est satisfaite lorsque l'on prend pour z_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ des éléments de l tels que $v_i(z_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker).

(5) Soient k_0 le sous-corps premier de k, k_1 un sous-corps de k, extension transcendante pure de k_0, telle que k soit algébrique et séparable sur k_1 (cf. [3], A V, p. 130, corollaire) et l_1 une extension galoisienne de k_1 contenant l. Comme $[l_1:k_1] = [l_1:l] \,.\, [l:k] \,.\, [k:k_1]$, on voit que l'assertion (**) est vraie pour k et l si elle l'est pour k_1 et l_1. Nous supposerons donc désormais que $k = k_0(t_1, \ldots, t_d)$, où les t_j sont algébriquement indépendants. Posons $R = k_0[t_1, \ldots, t_d]$ ou $\mathbf{Z}[t_1, \ldots, t_d]$ selon que k_0 est fini ou isomorphe à $\mathbf{Q}$.

(6) Soient x un générateur de l sur k et $f(\xi) = \xi^n + a_1\xi^{n-1} + \ldots + a_n$ le polynôme minimal unitaire de x sur k. Nous supposerons que les a_i sont des éléments de R : s'ils ne l'étaient pas, il suffirait de remplacer x et $f(\xi)$ par Ax et $A^n f(A^{-1}\xi)$ en prenant $A \in R - \{0\}$ tel que $Aa_i \in R$ pour tout i. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les racines de f et V l'ensemble fini formé des valuations de k dont l'idéal contient l'un des a_i^{-1} $(a_i \neq 0)$ ou le discriminant de f. Montrons que

(***) si ν est une valuation de k n'appartenant pas à V et dont l'idéal contient un élément de la forme $f(y)$, avec $y \in k$, alors ν possède n extensions distinctes à l.

Cela résulte de ce que si ν' est une extension de ν à l, on a $\nu'(x_i) \geqslant 0$ pour tout i et $\nu'(y - x_i) > 0$ pour une et une seule valeur de i. La première de ces assertions est claire car $\nu'(a_s x_i^s) \geqslant s\nu'(x_i)$ pour $s \leqslant n - 1$ ($a_s \neq 0$) et $\nu'(x_i^n) = n\nu'(x_i)$. Pour la seconde, on se souvient que $\nu'(\Pi(y - x_i)) = \nu'(f(y)) > 0$ et l'on observe que si $\nu'(y - x_i)$ et $\nu'(y - x_j)$ étaient strictement positifs pour des indices i et j différents, on aurait aussi $\nu'(x_i - x_j) > 0$; par conséquent, le discriminant de f appartiendrait à l'idéal de ν', donc à l'idéal de ν.

(7) Pour prouver (**), il suffit, vu (***), de faire voir qu'étant donnée une famille finie de valuations de k, il existe une valuation n'appartenant pas à la famille dont l'idéal contient un élément de la forme $f(y)$, $y \in k$. Or, soient $p_1, \ldots, p_N$ des éléments extrémaux (ou « premiers ») quelconques de R. L'anneau R n'ayant qu'un nombre fini d'unités, il existe $\zeta \in R$ tel que $B = a_n^{-1}f(\zeta a_n p_1 \ldots p_N)$ (qui appartient à R) ne soit pas une unité. Alors, tout élément extrémal de R divisant B est distinct des p_i et définit une valuation dont l'idéal contient $f(\zeta a_n p_1 \ldots p_N)$. Ceci achève la démonstration.

GROUPES PSEUDO-RÉDUCTIFS

Dans cette seconde partie du cours, nous avons le plus souvent supposé que *le corps de base k est séparablement clos.* Cela vaudra toujours, sauf mention expresse du contraire, dans le présent résumé. La plupart des résultats et constructions que nous avons en vue peuvent être formulés sans cette hypothèse, mais cela complique parfois les énoncés, or notre but principal est de montrer que les phénomènes décrits ne sont en rien galoisiens. Lorsque nous passerons, l'an prochain, à des théorèmes de classification, la restriction à des corps séparablement clos deviendra souvent essentielle.

Les groupes décrits ci-dessous ne constituent pas une collection d'exemples choisis plus ou moins au hasard : ils sont au contraire « typiques » en ce sens que, sous des hypothèses assez générales, tous les groupes pseudo-réductifs peuvent être obtenus par des variantes des méthodes décrites ici. On le verra dans le cours de l'année 1992-1993.

4. *Restriction de scalaires : première série d'exemples*

Rappelons qu'un schéma en groupes H sur un anneau A (par exemple un k-groupe, pour $A = k$ que, momentanément, nous ne supposons pas encore séparablement clos) peut être caractérisé par la donnée du foncteur en groupes $R \mapsto H(R)$, foncteur de la catégorie des A-algèbres dans celle des groupes. Si A est une k-algèbre, on note $\Pi_{A/k} H$ (suivant A. Grothendieck), le foncteur en groupes sur la catégorie des k-algèbres défini par $(\Pi_{A/k} H)(R) = H(R \otimes A)$ et l'on dit que $\Pi_{A/k}$ est obtenu à partir de H par *restriction des scalaires* ou par *restriction de Weil* de A à k. Sous des conditions assez générales, $\Pi_{A/k} H$ est un k-groupe (voir [5], II. 1.5, pour plus de détails). Le cas que nous avons principalement en vue est celui où A est un corps, extension finie de k, et où H est lisse ; dans ce cas, on peut dire, de façon imagée, que $\Pi_{A/k} H$ est « le A-groupe H vu comme un k-groupe de dimension $[A:k]$ fois plus grande ».

Supposons désormais k séparablement clos de caractéristique finie p, soient K une extension finie de k et H un K-groupe réductif (donc connexe : cf. § 1). Posons $G = \Pi_{K/k} H$. Le seul sous-groupe distingué d'exposant p de $H(K)$ est le sous-groupe $\{1\}$: cela résulte par exemple du théorème 5 de [4], § 2. Comme $G(k) = H(K)$, il s'ensuit que G est pseudo-réductif. Mais G n'est pas réductif dès que $K \neq k$: son radical unipotent $R_u(G)$ sur une clôture algébrique $\bar{k}$ de K peut être obtenu de la façon suivante. Posons $\bar{K} = K \otimes \bar{k}$. Sur $\bar{k}$, G n'est autre que le groupe $\Pi_{\bar{K}/\bar{k}} H$. À l'épimorphisme de $\bar{k}$-algèbres $\bar{K} \to \bar{k}$ correspond un épimorphisme de groupes algébriques $G_{\bar{k}} = \Pi_{\bar{K}/\bar{k}} H \to H_{\bar{k}}$, dont le noyau est précisément $R_u(G)$. En particulier, $\dim R_u(G) = \dim H \,.\, ([K:k] - 1)$. Lorsque $[K:k] = 2$ (ce qui implique que $\operatorname{car} k = 2$), $R_u(G)$ est canoniquement isomorphe au groupe additif de l'algèbre de Lie de H.

Si H est presque simple simplement connexe, on sait que tout sous-groupe propre distingué de $H(K)$ est fini et central (cf. [4], loc. cit.) ; donc, par le même raisonnement que ci-dessus, tout k-sous-groupe propre distingué de G est fini et central. Si H est presque simple mais non simplement connexe, et si $\pi : \tilde{H} \to H$ en est un revêtement simplement connexe, on voit de même que l'image G_1 de l'homomorphisme $\Pi_{K/k} \pi : \Pi_{K/k} \tilde{H} \to G$, qui est un k-sous-groupe ditingué de G, n'a pas de sous-groupe distingué propre infini, mais on peut avoir $G_1 \neq G$; pour cela, il faut que $\operatorname{Ker} \pi$ soit non réduit (autrement dit, possède une « composante infinitésimale »). Par exemple, si $H = \mathbf{PGL}_2$, car $k = 2$ et $K^2 \subset k$, G_1 est un groupe de dimension $2.[K:k] + 1$ alors que $\dim G = 3.[K:k]$. Cette remarque fournit donc de nouveaux exemples de groupes pseudo-réductifs mais non réductifs.

5. *Données radicielles : deuxième série d'exemples en relation avec les isogénies exceptionnelles*

5.1. *Données radicielles et sous-données*

Dans un espace vectoriel réel doté d'un produit scalaire euclidien, considérons un *système de rayons radiciels,* c'est-à-dire un ensemble fini Φ de demidroites « ouvertes » (ensembles de la forme $\mathbf{R}_+^* v$ avec $v \neq 0$) tel que, pour tout $a \in \Phi$, Φ soit stable par la réflexion r_a par rapport à l'hyperplan orthogonal à a. Une partie de Φ est dite *convexe* si elle est l'ensemble de tous les éléments de Φ contenus dans un cône strictement convexe. Les parties convexes maximales de Φ sont aussi appelées *domaines de positivité*. Soit Φ_+ un tel domaine (ses éléments sont dit « positifs ») et soit Φ_0 la « base de Φ relative à Φ_+ », c'est-à-dire l'ensemble des arêtes du cône convexe épointé engendré par Φ_+. Une suite $(a_1, \ldots, a_m)$ d'éléments distincts de Φ est dite *grignotante* si $\{a_i, \ldots, a_m\}$ est convexe pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Soient maintenant G un groupe (« abstrait »), $(U_a)_{a \in \Phi}$ un système de sous-groupes de G indexé par Φ et T l'intersection des normalisateurs des U_a dans G. Pour $a, b \in \Phi$, notons (a, b) l'ensemble des éléments de Φ contenus dans $a + b$, pour $\Psi \subset \Phi$, désignons par U_Ψ le sous-groupe de G engendré par les U_a $(a \in \Psi)$ et posons $U_+ = U_{\Phi_+}$ et $U_- = U_{-\Phi_+}$. Le système $(U_a)_{a \in \Phi}$ sera appelé une *donnée radicielle de type* Φ (cette terminologie, adaptée aux besoins de ce résumé de cours, n'est pas tout à fait la terminologie reçue) si les axiomes suivants sont satisfaits :

(DR1) Si $a, b \in \Phi$ et $b \neq \pm\, a$, alors $(U_a, U_b) \subset U_{(a,\, b)}$ où (U_a, U_b) désigne le groupe engendré par les commutateurs $xyx^{-1}y^{-1}$ pour $x \in U_a$, $y \in U_b$.

(DR2) Pour $a \in \Phi$ et $u \in U_a - \{1\}$, il existe $u', u'' \in U_{-a}$ tels que $u'uu''$ conjugue U_b en $U_{r_a(b)}$ pour tout $b \in \Phi$.

(DR3) Si $a \in \Phi_0$, U_{-a} n'est pas contenu dans U_+.

Nous disons que la donnée radicielle $(U_a)_{a \,\in\, \Phi}$ est *ajustée* (resp. *génératrice*) si G est engendré par T et les U_a (resp. par les U_a). Ici, $(U_a)_{a \,\in\, \Phi}$ désignera toujours une donnée radicielle ajustée dans G. On montre (cf. [11], 1.3) que les éléments u' et u'' de (DR2) sont uniquement déterminés par u, et l'on pose $m(u) = u'uu''$. Posons $G_0 = U_\Phi$ et soient N_0 le groupe engendré par tous les $m(u)$, N le produit TN_0, T_0 l'intersection $N_0 \cap T$, B (resp. B_0) le produit TU_+ (resp. T_0U_+), W le groupe engendré par les r_a $(a \in \Phi)$ et $\nu : N \to W$ l'homomorphisme de noyau T défini par $\nu(m(U_a - \{1\})) = \{r_a\}$, qui identifie W à $N/T = N_0/T_0$.

La proposition suivante est connue (pour des énoncés voisins ou des cas particuliers immédiatement généralisables, cf. [5], I.6.1 et [13], § 2) :

PROPOSITION 4. — (i) *Les systèmes* $(G,B,N,(r_a \,|\, a \in \Phi_0))$ *et* $(G_0,B_0,N_0,(r_a \,|\, a \in \Phi_0))$ *sont des systèmes de Tits, au sens de* [4], IV.2.1 ; *en particulier, l'application* $w \mapsto B\,\nu^{-1}(w)B$ *est une bijection de* W *sur* $B \backslash G / B$.

(ii) *Pour toute suite grignotante* $(a_1, \ldots, a_m)$ *d'éléments de* Φ, *les applications produit* $U_{a_1} \times \ldots \times U_{a_m} \to G$ *et* $T \times U_{a_1} \times \ldots \times U_{a_m} \to G$ *sont injectives et ont pour images des sous-groupes de* G.

(iii) *L'application produit* $U_+ \times T \times U_- \to G$ *est injective.*

(iv) *Pour* $a \in \Phi$, soit T_a *le sous-groupe de* T_0 *engendré par* $m(U_a - \{1\}) \,.\, m(U_a - \{1\})$. *Alors,* T_0 *est engendré par les* T_a, $a \in \Phi_0$.

Donnons-nous maintenant pour tout $a \in \Phi$ un sous-groupe V_a de U_a non réduit à l'élément neutre. Enonçons les conditions :

(SD1) pour a, $b \in \Phi$ tels que $b \neq \pm\, a$, le groupe (V_a, V_b) engendré par les commutateurs $xyx^{-1}y^{-1}$ ($x \in V_a$, $y \in V_b$) est contenu dans le groupe engendré par les V_c, $c \in (a, b)$;

(SD2) si $u \in V_a - \{1\}$, l'élément u' de (DR2) appartient à V_{-a}.

Proposition 5. — *Un système de sous-groupes* $(V_a)_{a\in\Phi}$ *satisfaisant, pour tout a, aux conditions* $\{1\} \neq V_a \subset U_a$, (SD1) *et* (SD2) *est une donnée radicielle.*

La seule propriété qui ne soit pas tout à fait évidente est le fait que, pour a, $b \in \Phi$ et $u \in V_a - \{1\}$, $m(u)$ conjugue V_b en $V_{r_a(b)}$. Si $b = \pm\, a$, cela se voit en considérant l'espace homogène $X = L_a/TU_a$, où L_a désigne le sous-groupe de G engendré par U_a, U_{-a} et T. Le groupe $U_{\pm a}$ possède un unique point fixe $p_\pm$ dans X et est simplement transitif sur $X - \{p_\pm\}$. La condition (SD2) implique que $V_a \,.\, p_- \cup \{p_+\} = V_{-a} \,.\, p_+ \cup \{p_-\}$. Cet ensemble est stable par V_a et V_{-a}, donc par $m(u)$, et l'assertion s'ensuit aussitôt. Si $b \neq \pm\, a$ et si $b_1, \ldots, b_m$ désignent les éléments de Φ contenus dans le demi-plan ouvert $(a \cup (-\,a) \cup \{0\}) + b$, rangés dans l'un des deux ordres naturels (ordres circulaires), on commence par montrer que, vu (SD1), $V_{b_1} \,.\, V_{b_2} \,.\, \ldots \,.\, V_{b_m}$ est un groupe normalisé par V_a et V_{-a}, donc par $m(u)$. La suite est facile.

Soient S_a le sous-groupe de T engendré par $m(V_a - \{1\}) \,.\, m(V_a - \{1\})$ pour $a \in \Phi$, S_0 le sous-groupe de T engendré par tous les S_a, $\hat{S}$ l'intersection des normalisateurs des V_a dans T et H_0 le sous-groupe de G engendré par les V_a. Alors, la donnée radicielle $(V_a)_{a\,\in\,\Phi}$ est génératrice dans H_0 et ajustée dans tout groupe H de la forme SH_0, où S est un sous-groupe de T intermédiaire entre S_0 et $\hat{S}$.

5.2. *Données radicielles algébriques*

Après l'« intermède abstrait » du numéro 5.1, nous considérons à nouveau des groupes algébriques définis sur un corps k séparablement clos. Soient G un k-groupe *connexe*, $(U_a)_{a\,\in\,\Phi}$ un système de k-sous-groupes de G indexé par Φ et T le k-sous-groupe de G adhérence de l'intersection des normalisateurs des U_a dans $G(k)$. Si le système $(U_a(k))_{a\,\in\,\Phi}$ est une donnée radicielle de type Φ dans $G(k)$ et si, de plus,

(DRA) pour une suite grignotante $(a_1, \ldots, a_n)$ telle que $\{a_1, \ldots, a_n\} = \Phi_+$, l'application produit

$$\prod_{i=1}^{n} U_{-a_i} \times T \times \prod_{i=1}^{n} U_{a_i} \to G$$

est une immersion ouverte,

nous dirons que le système $(U_a)_{a \in \Phi}$ est une *donnée radicielle de type* Φ *dans* G ; pour la cohérence de la terminologie, il convient ici d'ajouter les qualificatifs *algébrique* et *ajustée*, mais ceux-ci seront simplement sous-entendus. On déduit facilement des axiomes (DR1) à (DR3) que la propriété (DRA) est vraie pour toute suite grignotante dont les éléments forment un domaine de positivité quelconque dans Φ, dès qu'elle l'est pour une telle suite. De même, on peut voir, toujours sous les mêmes hypothèses, que si $(b_1, \ldots, b_m)$ est une suite grignotante quelconque d'éléments de Φ, si $\Psi = \{b_1, \ldots, b_m\}$ et si U_Ψ désigne le sous-groupe de G engendré par le U_{b_i}, alors l'application produit $U_{b_1} \times \ldots \times U_{b_m} \to U_\Psi$ est un isomorphisme de variétés. Dans toute la suite $(U_a)_{a \in \Psi}$ désignera une donnée radicielle dans le groupe connexe G.

Choisissons maintenant pour tout $a \in \Phi$ un k-sous-groupe connexe non trivial V_a de U_a, notons S_0 le sous-groupe « abstrait » de $T(k)$ engendré par les $m(V_a(k) - \{1\}) \,.\, m(V_a(k) - \{1\})$ et $\hat{S}$ le k-sous-groupe de T, adhérence de l'intersection des normalisateurs des V_a dans $T(k)$. La version « algébrique » suivante de la proposition 5 résulte de cette même proposition et d'une comparaison des décompositions de Bruhat de $G(k)$ et de son sous-groupe engendré par les $V_a(k)$.

PROPOSITION 5A. — *Soit S un k-sous-groupe connexe de T intermédiaire entre S_0 et $\hat{S}$. Supposons que les sous-groupes $V_a(k)$ de $G(k)$ satisfassent aux conditions* (SD1) *et* (SD2) *du numéro 5.1. Alors, dans le sous-groupe H de G engendré par S et les V_a (lequel est évidemment connexe), le système $(V_a)_{a \in \Phi}$ est une donnée radicielle de type Φ ; de plus, S est l'adhérence de l'intersection des normalisateurs des V_a dans $H(k)$.*

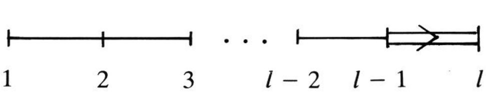
5.3. *Description des exemples*

Soient K une extension finie de k, $\tilde{G}$ un K-groupe absolument presque simple, $\tilde{T}$ un K-tore maximal de $\tilde{G}$, $\Phi^{\cdot}$ le système des racines de $\tilde{G}$ relatives à $\tilde{T}$ et $\tilde{U}_a$, pour $a \in \Phi^{\cdot}$, le K-sous-groupe de $\tilde{G}$ isomorphe au groupe additif et sur lequel $\tilde{T}$ opère (par conjugaison) selon le caractère a. Pour $a \in \Phi^{\cdot}$, nous notons aussi a, sans risque de confusion, le rayon radiciel $\mathbf{R}_+^*.\, a$. Dans l'application que nous allons faire des numéros précédents, Φ sera l'ensemble des rayons radiciels en question, G le groupe $\Pi_{K/k}\, \tilde{G}$, T le groupe $\Pi_{K/k}\, \tilde{T}$ et U_a le groupe $\Pi_{K/k}\, \tilde{U}_a$ (où le premier a est un rayon radiciel et le second la racine correspondante !) ; on sait que $(U_a)_{a \in \Phi}$ est effectivement une donnée radicielle de type Φ dans G.

Désignant comme précédemment par p la caractéristique de k, nous supposons que K^p est contenu dans k et que $\tilde{G}$ possède des racines de deux longueurs différentes dont le rapport est p : cela veut dire que $p = 2$ ou 3, et que le type du groupe $\tilde{G}$, que nous notons X, est B_l, C_l ou F_4 si $p = 2$ et G_2 si $p = 3$. Choisissons encore un K-épinglage de Chevalley du système des $\tilde{U}_a$ (un « K-système de Chevalley », dans la terminologie de [5], II.3.2.2) ; ainsi, chaque $\tilde{U}_a$ est « identifié » sur K au groupe additif **Add**, chaque U_a est identifié à $\Pi_{K/k}$ **Add** et chaque $U_a(k)$ est identifié au groupe additif de K.

Pour pouvoir décrire les groupes V_a auxquels nous voulons appliquer la proposition 5A, il nous reste seulement à choisir un corps K' intermédiaire entre k et K. Nous prenons alors pour V_a le groupe $U_a = \Pi_{K/k}\, \tilde{U}_a$ ou le groupe $\Pi_{K'/k}$ **Add** $\subset U_a$ (adhérence du sous-groupe K' de $U_a(k)$, ce dernier étant identifié à K) selon que la racine a est « courte » ou « longue ». Des calculs simples, utilisant notamment les relations de commutation de Chevalley, montrent que les groupes $V_a(k)$ satisfont aux conditions (SD1), (SD2) du numéro 5.1. Soient S_0 et $\hat{S}$ définis comme en 5.2, S un k-sous-groupe connexe de T intermédiaire entre S_0 et $\hat{S}$, H le sous-groupe de G engendré par S et les V_a, $\bar{S}_0$ et $\bar{H}_0$ les k-sous-groupes de G, adhérences de S_0 et H_0. En vertu du théorème 5 de [4], § 2, déjà utilisé plus haut, tout sous-groupe distingué non trivial de $H(k)$ contient H_0 (car, en raison de l'hypothèse faite sur p et X, le centre de $H(k)$ est réduit à l'élément neutre). Donc, tout k-sous-groupe distingué non trivial de H contient $\bar{H}_0$. En particulier, H est pseudo-réductif et $\bar{H}_0$ (qui n'est autre que le groupe H pour $S = \bar{S}_0$) ne possède pas de k-sous-groupe distingué propre non trivial. Le groupe H_0 est toujours simple, mais si G n'est pas simplement connexe, $\bar{H}_0(k)$ est différent de H_0 donc n'est pas simple (sauf lorsque k est algébriquement clos, bien entendu !).

Dans le cours, les groupes S_0 et $\hat{S}$ ont été déterminés explicitement pour tous les cas envisagés. Les résultats sont particulièrement simples à énoncer lorsque H est simplement connexe, ce que nous supposons maintenant. La théorie classique des groupes déployés fournit, pour chaque racine a, un cocaractère de $\tilde{T}$, $a^{\vee}$: **Mult** $\rightarrow \tilde{T}$, puis, par restriction des scalaires, un morphisme $\Pi_{K/k}$ **Mult** $\rightarrow T$ que nous désignons également par $a^{\vee}$. Notons S_a l'image par a de $\Pi_{K/k}$ **Mult** ou de $\Pi_{K'/k}$ **Mult** selon la racine a est courte ou longue. On sait (c'est une propriété de $\mathbf{SL}_2$) que $S_a(k)$ n'est autre que le sous-groupe de $T(k)$ engendré par $m(V_a(k) - \{1\}) \,.\, m(V_a(k) - \{1\})$. On vérifie alors que S_0 est le produit *direct* des $S_a(k)$ pour a parcourant une base du système de racines $\Phi^{\cdot}$, donc $\bar{S}_0$ est produit direct des S_a correspondants, on a $S_0 = \bar{S}_0(k)$ et $H_0 = \bar{H}_0(k)$. Quant à $\hat{S}$, le calcul montre qu'il est égal à S_0 sauf lorsque $X = C_l$, auquel cas $\hat{S} = T$, et lorsque $X = B_l$ pour *l pair*. Dans ce dernier cas, si l'on note $a_1, \ldots, a_l$ les éléments d'une base de $\Phi^{\cdot}$ numérotés de la façon usuelle :



,

on a $\hat{S} = \bar{S}_0 \,.\, (a_1 a_3 ... a_{l-1})$ ($\Pi_{K/k}$ **Mult**). Ce comportement particulier du type B_l pour l pair est à mettre en relation avec le fait que sur un corps de caractéristique 2, une isogénie spéciale d'un groupe adjoint de type C_l sur un groupe simplement connexe de type B_l existe si et seulement si l est pair [1] (par contraste avec l'isogénie bien connue de $\mathbf{SO}_{2l+1}$ sur $\mathbf{Sp}_{2l}$, c'est-à-dire de B_l adjoint sur C_l simplement connexe, qui existe pour tout l). Le lien entre ces deux phénomènes est le suivant. Conservons les notations précédentes, avec $X = B_l$, l pair, et soient $\tilde{G}_1$ un K-groupe adjoint de type C_l et $\varphi : \tilde{G}_1 \to \tilde{G}$ une isogénie spéciale. Alors, l'image de l'homomorphisme $\Pi_{K/k}\, \varphi$ de $\Pi_{K/k}\, \tilde{G}_1$ dans G est le groupe H décrit plus haut pour $K' = k$ et $S = \hat{S}$. De façon générale, les images de restrictions de scalaires d'isogénies spéciales sont des groupes du type considéré dans le présent paragraphe.

Lorsque $X = C_l$ ou B_l, la construction décrite plus haut peut être généralisée de la façon suivante. Soient L un K'-sous-espace vectoriel de K contenant 1 et L' un k-sous-espace vectoriel de K' contenant 1. Si $X = C_l$ (resp. B_l), on peut, pour une racine a longue (resp. courte), remplacer le groupe V_a choisi plus haut par l'adhérence du sous-groupe L' (resp. L) de $U_a(k)$, identifié à K. Les groupes H obtenus de la sorte sont, une fois encore, pseudo-réductifs. Deux groupes H résultant de choix de L' (resp. L) différents ne sont isomorphes que si les espaces L' (resp. L) dont ils proviennent ne diffèrent que par un facteur élément de K' (resp. K). On obtient donc ainsi des familles de groupes pseudo-réductifs dépendant de « modules » (il est vrai que ceci était déjà le cas pour les exemples du § 4 puisque l'extension K de k peut dépendre de paramètres essentiels). Pour $X = B_l$, on retrouve, parmi les groupes H qui viennent d'être construits, les groupes $\mathbf{O}^+$ ou **Spin** de certaines formes quadratiques défectives.

Comme $B_2 = C_2$, on peut, lorsque $l = 2$, combiner les deux généralisations précédentes et définir ainsi des groupes « doublement exotiques », dépendant du choix de deux espaces vectoriels $L \subset K'$ et $L' \subset K$.

Les groupes de points rationnels des groupes définis dans ce paragraphe apparaissent naturellement dans la classification des immeubles des types B_l, C_l et F_4, et des quadrangles et hexagones de Moufang (cf. [9], § 8 et 10.3.2, et [12], 4.5 et 4.7).

6. *Variante « abstraite » de la construction précédente : troisième série d'exemples*

(Dans l'usage que nous en faisons ici, le mot « abstrait » ne doit pas évoquer la notion de « groupe abstrait » ; il se rattache plutôt à l'idée de « variété abstraite », à la Weil.)

---

1. Ceci est déjà mentionné incidemment par C. Chevalley dans [6], p. 24.05, comme me l'a signalé J.-Y. Hée.

6.1. *Les données*

Comme en 5.2, soient k un corps séparablement clos, G un k-sous-groupe connexe, $(U_a)_{a \in \Phi}$ une donnée radicielle de type Φ dans G et T le k-sous-groupe connexe de G adhérence de l'intersection des normalisateurs des U_a dans $G(k)$. Dans la variante annoncée, les V_a $(a \in \Phi)$ et S ne sont plus des sous-groupes des U_a et T, mais des k-groupes connexes donnés séparément, dotés d'homomorphismes (sortes de pseudo-inclusions) $\iota_a : V_a \to U_a$ et $\iota_0 : S \to T$, *injectifs sur les points K-rationnels*. Les conditions (SD1) et (SD2) sont remplacées par les suivantes :

(SDA0) Pour $a \in \Phi$, le morphisme de conjugaison $T \times U_a \to U_a$ se remonte par $\iota_0 \times \iota_a$ et ι_a (en un sens évident) en un *K-morphisme* $S \times V_a \to V_a$.

(SDA1) Pour $a, b \in \Phi$, $b \neq \pm a$, le « morphisme commutateur » de $U_a \times U_b$ dans le produit direct des variétés U_c avec $c \in (a, b)$ (cet ensemble étant rangé en une suite grignotante arbitraire) se remonte par $\iota_a \times \iota_b$ et le produit direct des ι_c en un *k-morphisme* de $V_a \times V_b$ dans le produit direct des V_c.

Avant d'énoncer la condition suivante, notons que, vu les axiomes des données radicielles, il existe, pour $a \in \Phi$, des voisinages ouverts Ω_a et Ω_{-a} de $(1,1,1)$ dans $U_a \times T \times U_{-a}$ et $U_{-a} \times T \times U_a$ et un morphisme de variétés ω_a de Ω_a sur Ω_{-a} tels que ω_a suivi de l'application produit de Ω_{-a} dans G coïncide avec l'application produit de Ω_a dans G.

(SDA2) Pour tout $a \in \Phi$, il existe Ω_a et Ω_{-a} comme ci-dessus tels que ω_a se remonte par $\iota_a \times \iota_0 \times \iota_{-a}$ et $\iota_{-a} \times \iota_0 \times \iota_a$ en un isomorphisme entre voisinages ouverts de $(1,1,1)$ dans $V_a \times S \times V_{-a}$ et $V_{-a} \times S \times V_a$.

6.2. *Le groupe H*

La proposition suivante a fourni les derniers exemples de groupes pseudo-réductifs donnés dans le cours :

PROPOSITION 6. — *Les groupes V_a $(a \in \Phi)$ et S peuvent être plongés dans un k-groupe connexe H de telle façon que $(V_a)_{a \in \Phi}$ soit une donnée radicielle de type Φ dans H, que S soit l'adhérence de l'intersection des normalisateurs des V_a dans $H(k)$ et que les homomorphismes ι_a et ι_0 se prolongent en un homomorphisme $\iota : H \to G$ injectif sur $H(k)$. Cela caractérise le groupe H, les plongements de S et des V_a dans H et l'homomorphisme ι à isomorphismes uniques près.*

6.3. *Esquisse de preuve*

Voici les principales étapes de la démonstration exposée dans le cours.

(1) *Pour toute partie convexe Ψ de Φ, il existe un k-groupe V_Ψ, des k-morphismes $\varphi_a : V_a \to V_\Psi$ $(a \in \Psi)$ et un k-homomorphisme $\iota_\Psi : V_\Psi \to G$*

injectif sur $V_\Psi(k)$, *tels que* $\iota_\Psi \circ \varphi_a = \iota_a$ *pour tout* a *et que le produit direct des* φ_a, *les éléments* a *de* Ψ *étant rangés en une suite grignotante arbitraire, composé avec l'application produit* $V_\Psi \times V_\Psi \times \ldots \times V_\Psi \to V_\Psi$ *soit un isomorphisme de* k-*variétés de* $\Pi\, V_a$ *sur* V_Ψ. *Le groupe* V_Ψ *et les morphismes* φ_a *et* ι_Ψ *sont uniques à isomorphismes uniques près. Les morphismes* $S \times V_a \to V_a$ $(a \in \Psi)$ *fournis par* (SDA0) *se prolongent en une* k-*action du* k-*groupe* S *sur le* k-*groupe* V_Ψ.

Cela résulte aussitôt de (SDA1).

Dans la suite de cette démonstration, nous aurons à considérer, de façon répétée, des k-variétés X qui sont des produits directs dont les facteurs sont tous de la forme V_Ψ ou S. D'après 6.1 et (1), chaque facteur de X est doté d'un homomorphisme privilégié ι_* $(= \iota_\Psi$ ou $\iota_0)$ dans G, et nous noterons ι_X le k-morphisme de X dans G obtenu en composant le produit direct des ι_* en question avec le morphisme produit $G \times \ldots \times G \to G$. Nous désignerons par 1_X le point de X produit des éléments unités des facteurs de X. Si X et Y sont deux variétés du type en question, un morphisme du germe $(X, 1_X)$ dans le germe $(Y, 1_Y)$ (c'est-à-dire une classe de morphismes localement égaux de voisinages ouverts de 1_X dans Y appliquant 1_X sur 1_Y) sera, par abus de langage, nommé un germe de k-morphisme de X dans Y, et noté par une flèche interrompue $\dashrightarrow$. Un tel germe $\alpha : X \dashrightarrow Y$ sera dit *compatible avec* G si $\iota_X = \alpha \circ \iota_Y$. Si Ψ est une partie convexe maximale de Φ (comme Φ_+ par exemple), nous posons $\Sigma_\Psi = V_\Psi \times S \times V_{-\Psi}$.

(2) *Si* Ψ *et* Ψ' *sont deux parties convexes maximales de* Φ, *il existe un unique germe de* k-*morphisme* $\Sigma_\Psi \dashrightarrow \Sigma_{\Psi'}$ *compatible avec* G.

On se ramène par une induction évidente au cas où Ψ et Ψ' diffèrent par un seul élément, c'est-à-dire où il existe $a \in \Psi$ tel que $\Psi' = \Psi - \{a\} \cup \{-a\}$. Dans ce cas, l'énoncé est une conséquence facile de (SDA2). Ici et dans toute la suite de la démonstration, les assertions d'unicité résultent de l'injectivité de ι_0 et des ι_Ψ sur les points k-rationnels.

Posons $\Sigma = \Sigma_{\Phi_+}$ et $\Sigma_- = \Sigma_{-\Phi_+}$.

(3) *Il existe un unique germe de* k-*morphisme* $\pi : \Sigma \times \Sigma \dashrightarrow \Sigma$ *compatible avec* G.

On l'obtient en composant les morphismes et germes de morphismes suivants :

$$\Sigma \times \Sigma = V_{\Phi_+} \times S \times V_{-\Phi_+} \times V_{\Phi_+} \times S \times V_{-\Phi_+}$$
$$\to V_{\Phi_+} \times V_{-\Phi_+} \times S \times S \times V_{\Phi_+} \times V_{-\Phi_+} \text{ (par l'action de } S \text{ sur } V_{\pm\Phi_+})$$
$$\to V_{\Phi_+} \times V_{-\Phi_+} \times S \times V_{\Phi_+} \times V_{-\Phi_+} \text{ (par le morphisme produit de } S)$$
$$\dashrightarrow V_{\Phi_+} \times \Sigma \times V_{-\Phi_+} \text{ (par (2))}$$
$$\to \Sigma \text{ (par les morphismes produits de } V_{\Phi_+} \text{ et } V_{-\Phi_+}).$$

Soit maintenant $\sigma : \Sigma \dashrightarrow \Sigma$ le germe de morphisme obtenu en composant le morphisme $\Sigma \to \Sigma$, produit direct des passages à l'inverse dans les trois facteurs de Σ, le morphisme $\Sigma \to \Sigma_-$ inversant l'ordre de ces trois facteurs et le germe de morphisme $\Sigma_- \dashrightarrow \Sigma$ fournit par (2). Les germes de morphismes π et σ sont le produit et le passage à l'inverse pour une structure de germe de groupe (en un sens évident) sur $(\Sigma, 1_\Sigma)$: le fait que les axiomes des groupes sont satisfaits résulte de ce que G lui-même est un groupe, de la compatibilité des morphismes et germes de morphismes considérés avec G et de l'injectivité de ι_Σ sur $\Sigma(k)$. Finalement, le groupe H de la proposition 6 s'obtient en « intégrant » le germe de groupe $(\Sigma, 1_\Sigma)$: son existence résulte d'un théorème de Weil bien connu (cf. [2], chapitre 5 ; le passage du langage des germes de groupes utilisé ici à celui des groupes birationnels adopté dans [2] ne présente pas de difficulté dans le cas particulier qui nous intéresse).

6.4. *Application : groupes pseudo-réductifs dont le système de racines relatif n'est pas réduit*

Comme précédemment, k désigne un corps séparablement clos. Nous le supposons non parfait, de caractéristique 2. Soient e un élément de $k - k^2$, K le corps $k(\sqrt{e})$ et $\tilde{G}$ le K-groupe $\mathbf{Sp}_{2m}$ dans lequel nous choisissons un K-tore maximal T. Posons $G = \Pi_{K/k}\, \tilde{G}$, soient $\Phi^{\cdot}$, T et les U_a ($a \in \Phi^{\cdot}$) définis comme en 5.3, et choisissons à nouveau un K-épinglage des U_a, ce qui les identifie à $\Pi_{K/k}$ **Add** et, plus précisément, en fait des espaces vectoriels à 2 dimensions dotés d'une base privilégiée (provenant de la base $(1, \sqrt{e})$ de K). Soient alors :

V_a un k-groupe, copie de $\mathbf{Add}^3$ ou de $\mathbf{Add}^2$ selon que la racine a est longue ou courte ;

$\iota_a : V_a \to U_a$ l'homomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x^2 + ey^2, z)$ ou $(x, y) \mapsto (x, y)$ suivant le cas ;

$S = T$ et $\iota_0 : S \to T$ l'identité.

Ces données satisfont aux conditions (SDA0), (SDA1) et (SDA2) du numéro 6.1. Cela se voit par des calculs explicites qui ne présentent guère de difficulté. Il faut se souvenir que si a est une racine longue, alors $a/2$ est un poids, donc un morphisme de T sur **Mult** : c'est à travers celui-ci que T opère sur les deux premiers facteurs de $V_a = \mathbf{Add}^3$. En vertu de la proposition 6, les données V_a, ι_a et S définissent un k-groupe H. On vérifie que le sous-groupe de $H(k)$ engendré par les $V_a(k)$ contient $S(k)$ et coïncide donc avec $H(k)$ lui-même. Il résulte alors du théorème 5 de [4], § 2, que $H(k)$ est un groupe simple. Il s'ensuit que H ne possède pas de k-sous-groupe distingué propre non réduit à l'élément neutre et, en particulier, qu'il est pseudo-réductif sur k.

L'intérêt de cet exemple réside dans le fait que, bien que k soit séparablement clos, le système de racines relatif de H (système des poids non nuls de l'unique tore maximal de S dans Lie H) est *non réduit*, de type BC_m. On verra dans le cours de l'an prochain que ce phénomène ne peut se produire qu'en caractéristique 2.

SÉMINAIRE

Le séminaire a consisté en quatre exposés.

Classe de cohomologie générique dans $H^1(E_8)$

Deux exposés de J.-P. Serre ont eu pour objet ce que l'on pourrait appeler un « groupe générique » de type E_8. Énonçons-en les principaux résultats, qui s'inspirent d'un exposé de A. Grothendieck [7] sans toutefois que l'on puisse les en déduire directement.

Soient k_0 un corps que l'on supposera de caractéristique 0 (bien que l'on puisse sans doute se passer de cette hypothèse à condition de supposer séparables toutes les extensions de corps considérées), et G un k_0-groupe algébrique lisse. Choisissons un plongement de G dans un k_0-groupe égal à $\mathbf{GL}_N$, $\mathbf{SL}_N$ ou $\mathbf{Sp}_{2N}$, pour un entier N permettant le plongement, posons $X = E/G$, et soient p la projection de E sur X et K le corps, extension de k_0, des fonctions rationnelles sur X. Pour tout point x du k_0-schéma X, $p^{-1}(x)$ est un G-*torseur* (espace homogène principal sous G) auquel correspond une classe de cohomologie $\alpha(x) \in H^1(k(x), G)$, où $k(x)$ désigne le corps du point x. En particulier, si x est le point générique de X, on a $k(x) = K$ et $\alpha(x)$ est noté $\alpha_{\text{gén}}$. Cet élément de $H^1(K, G)$ est générique en ce sens que, pour toute extension k de k_0, tout élément de $H^1(k, G)$ est une « spécialisation » de $\alpha_{\text{gén}}$. Plus précisément :

PROPOSITION 7. — *Soit U un ouvert dense de X. Pour toute extension k de k_0 et tout élément α de $H^1(k, G)$, il existe $x \in U(k)$ tel que $\alpha = \alpha(x)$.*

Cela se montre ainsi. Soit P un G-torseur représentant α. Le E-torseur auquel il donne lieu par l'inclusion de G dans E est trivial (car $H^1(E) = \{0\}$ sur tout corps), donc possède un point rationnel sur k. Or, un tel point n'est autre qu'un k-morphisme $\varphi : P \to E$ compatible avec l'action de G. Si x désigne l'image de $\varphi(P)$ par p, on a $k(x) = k$ et $\alpha(x) = \alpha$. Transformant au besoin φ et x par un élément de $E(k)$ approprié, ce qui ne change ni $k(x)$ ni $\alpha(x)$, on peut faire en sorte que x appartienne à $U(k)$.

Soit A une algèbre étale sur un corps k contenant k_0, c'est-à-dire un produit direct $\Pi\, k_s$ d'extensions finies de k. On dit que A « tue » une classe de cohomologie $\alpha \in H^1(k, G)$ si l'image de α dans chacun des $H^1(k_s, G)$ est nulle.

PROPOSITION 8. — *Si $\alpha_{\text{gén}}$ est tué par une K-algèbre étale $A = \Pi K_s$ de degré $\Sigma\,[K_s : K] = m$, alors, pour toute extension k de k_0 et tout élément α de $\mathrm{H}^1(k, G)$, il existe une k-algèbre étale de degré m qui tue α.*

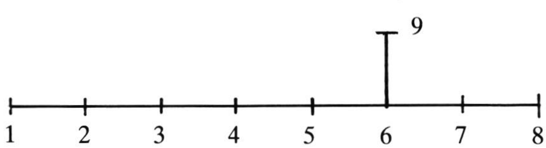
Cela résulte facilement de la proposition 7 où l'on choisit pour U un ouvert au-dessus duquel A définit un revêtement étale.

COROLLAIRE. — *Soit m un entier, $m \geqslant 1$. Supposons qu'il existe une extension k de k_0 et un élément α de $\mathrm{H}^1(k, G)$ tel que le degré de toute extension finie de k tuant α soit divisible par m. Alors, le degré de toute extension finie de K tuant $\alpha_{\text{gén}}$ est divisible par m.*

Appliquons cela aux groupes de type E_8.

PROPOSITION 9. — *Si G est un groupe déployé de type E_8, le degré de toute extension algébrique finie de K tuant $\alpha_{\text{gén}}$ est divisible par 60 ; autrement dit, si l'on désigne par $G_{\text{gén}}$ le K-groupe de type E_8 obtenu en tordant le groupe déployé par $\alpha_{\text{gén}}$, le degré de toute extension algébrique finie de K déployant $G_{\text{gén}}$ est divisible par 60.*

Vu la proposition 8, il suffit de montrer que pour $q = 3$, 4 et 5, il existe un corps k_q, extension de k_0, et un k_q-groupe G_q de type E_8 tel que le degré de toute extension algébrique finie de k_q déployant G_q soit divisible par q. Cela peut se faire à l'aide de la théorie de Bruhat-Tits [5]. Soit k_1 une extension de K_0. D'après le théorème 3.12 de [5], III, à tout groupe H de type E_8 sur le corps des séries formelles $k_1((t))$ est associé une partie $\tau(H)$ de l'ensemble Δ des sommets du diagramme

(E_8) 

,

et l'on montre que si $\tau(H) = \Delta - \{q\}$ pour $q = 3$, 4 ou 5, le degré de toute extension de $k_1((t))$ déployant H est divisible par q. Il reste à s'assurer que l'on peut trouver k_1 « suffisamment compliqué » pour qu'il existe des $k_1((t))$-groupes G_q de type E_8 $(q = 3, 4, 5)$ tels que $\tau(G_q) = \Delta - \{q\}$. Cela découle à nouveau de [5], III.3.12, et de résultats classiques de cohomologie galoisienne. Si $k_0 = \mathbf{Q}$, on peut prendre $k_1 = \mathbf{Q}$. Notons encore que, pour $q = 3$ (resp. 4), l'existence de k_q et G_q peut s'obtenir de façon plus élémentaire : il suffit de prendre pour G_q n'importe quel groupe de type E_8 dont le noyau anisotrope est de type E_6 (resp. D_7).

La proposition suivante, plus directement inspirée de l'exposé de Grothendieck déjà cité, est valable pour tout G et donne une raison géométrique pour laquelle certains nombres premiers divisent obligatoirement le degré de toute extension de K tuant $\alpha_{\text{gén}}$. Prenons $k_0 = \mathbf{C}$ et, si X est une variété, notons $A(X)$ son anneau de Chow.

PROPOSITION 10. — *Le degré de toute extension de $K = k_0(E/G)$ tuant $\alpha_{\text{gén}}$ annule $A(G)$.*

Pour $G = \mathrm{E}_8$, Grothendieck montre que l'ordre de $A(G)$ est divisible par 2, 3 et 5 ; la proposition 10 entraîne donc la version un peu affaiblie de la proposition 9 où l'on remplace 60 par 30. L'idée de la preuve de la proposition 10 est la suivante. L'injection de G dans E fournit un morphisme $A(E) \to \mathrm{A}(G)$ qui est manifestement surjectif si $E \to E/G$ possède une section rationnelle. Si cette fibration possède seulement une « multisection » de degré m, on montre de même que m annule le quotient $A(G)/\mathrm{Im}A(E)$. Pour E choisi comme ci-dessus (par exemple, pour $E = \mathbf{GL}_N$), $A(E)$ est nul donc m annule $A(G)$.

Toujours dans l'esprit de [7], on peut établir une sorte de réciproque de la proposition précédente, en utilisant des cycles « de petits degrés » de G/B (où B est un sous-groupe de Borel de G) fournis par des représentations irréductibles de G de « petits poids dominants ». Ainsi, pour $G = \mathrm{E}_8$, on construit des extensions de K tuant $\alpha_{\text{gén}}$ et telles que 2, 4 et 5 soient les seuls facteurs premiers communs à leurs degrés. Mais des méthodes plus élémentaires fournissent un meilleur résultat : en effet, on déduit facilement du théorème 2 (ii) du Résumé de Cours de 1990-1991 (ou plutôt de la démonstration de ce théorème), du fait que E_8 a 240 racines et que les seuls facteurs premiers de l'ordre du groupe de Weyl de E_8 sont 2, 3, 5 et 7, que tout groupe de type E_8, sur tout corps k (sans restriction de caractéristique), se déploie sur une extension de k de degré N_1N_2, où N_1 divise $2^5.3$ et où N_2 est un nombre de la forme $2^a.3^b.5^c$ inférieur à 120. Ceci n'a été remarqué qu'après que le séminaire ait eu lieu. Les bornes indiquées ici pour N_1 et N_2 sont celles que l'on obtient le plus directement mais elles peuvent être améliorées de diverses façons.

Un groupe de type E_8 *« pauvre en sous-groupes définis sur le corps de base ».*

Dans deux exposés reprenant et précisant des résultats obtenus dans le cours de l'an dernier, J. Tits a montré que, pour un corps k quelconque, tout k-groupe de type E_8 possédant un k-sous-groupe réductif connexe propre qui n'est pas un tore de dimension 0, 4 ou 8 se déploie sur une extension de k dont le degré est de la forme $2^a.3^b$ ($b \leqslant 2$) ou $2^a.5^b$ ($b \leqslant 1$). Depuis lors ce résultat a pu être étendu aux groupes possédant un k-tore de dimension 4 (cf. [14]). Vu la proposition 9 et le fait que, sur un corps k parfait, tout k-groupe possédant un k-sous-groupe unipotent connexe non trivial possède aussi un k-sous-groupe parabolique propre, on en déduit :

PROPOSITION 11. — *Avec les notations de la proposition 9, les seuls K-sous-groupes connexes du K-groupe $G_{\text{gén}}$ de type* E_8 *sont $G_{\text{gén}}$ lui-même, ses K-tores maximaux et le groupe* 1.

RÉFÉRENCES

[1] A. BOREL, *Linear algebraic groups,* 2d edition (*Graduate Texts in Math.,* n° 126, Springer-Verlag, 1991).

[2] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT and M. RAYNAUD, *Néron Models* (*Ergebnisse der Math.,* 3. Folge, Bd. 21, Spinger-Verlag, 1990).

[3] N. BOURBAKI, *Algèbre,* chap. IV à VII (Masson, Paris, 1981).

[4] —, *Groupes et Algèbres de Lie,* chap. IV à VI (Hermann, Paris, 1968).

[5] F. BRUHAT et J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local* (I. *Publ. Math. I.H.E.S.,* 41 (1972), 5-251 ; II. *ibid.,* 60 (1984), 5-184 ; III. *Journal Fac. Sci. Univ. Tokyo,* Sec. IA, 34 (1987), 671-698).

[6] C. CHEVALLEY, *Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques* (Paris, 1958).

[7] A. GROTHENDIECK, *Torsion homologique et sections rationnelles* (*in* : Séminaire Chevalley, 2e année, *Anneaux de Chow et applications,* exposé n° 5, Paris, 1958).

[8] M. ROSENLICHT, *Some rationality questions on algebraic groups* (*Annali di Math. (IV),* 43 (1957), 25-50).

[9] J. TITS, *Lectures on algebraic groups* (Mimeographed Notes, Yale Univ., 1967).

[10] —, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs* (*Lecture Notes in Math.* Nr. 386, Springer-Verlag, 1974).

[11] —, *Non-existence de certains polygones généralisés* (*Inventiones Math.,* 36 (1976), 275-284).

[12] —, *Classification of buildings of spherical types : a survey* (*Atti Coll. Internat. Teorie Combinatorie,* Rome 1973, vol. 1, 229-246, Accad. dei Lincei, 1976).

[13] —, *Moufang octagons and the Ree groups of type* $^2F_4$ (*Amer. Journal of Math.,* 105 (1983), 539-594).

[14] —, *Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples (C.R. Acad. Sci.,* 315 (1992), 1131-1138).

J. T.

MISSIONS

Exposés

— *On k-groups of exceptional types in which every proper, connected nontrivial subgroup is a maximal torus,* Conference on Quadratic Forms in Algebra, Geometry and Number Theory, Ascona, novembre 1991 ; Colloque organisé à l'occasion du 60ᵉ anniversaire de F.D. Veldkamp, Utrecht, décembre 1991.

— *Du mathématicien à l'honnête homme : la communication difficile,* « Conférences Descartes », à la Koninklijke Nederlandse Akademie der Wetenschappen, Amsterdam, décembre 1991.

— *Groups of Kac-Moody type,* Lie group seminar, C.W.I., Amsterdam, décembre 1991.

— *L'idée de preuve en mathématique et dans le langage courant,* Académie Royale de Belgique, mars 1992.

— *Mathématique, Science de l'indiscutable ?,* exposé à l'occasion de la remise d'un Doctorat honoris causa, Louvain-la-Neuve, 1er avril 1992.

— *Corps de déploiement des groupes algébriques simples*, Louvain-la-Neuve, avril 1992.

— *Algorithms for the theory of buildings,* Bruxelles, avril 1992.

— *Remarks on the isomorphisms between Coxeter groups,* Colloque : « Coxeter groups and computational representation theory », Lyon, juin 1992.

— *La théorie des groupes de Lie semi-simples : l'œuvre d'Elie Cartan et de Hermann Weyl (1900-1950),* Colloque : « Le développement des mathématiques entre 1900 et 1950 », Luxembourg, juin 1992.

DISTINCTIONS

Docteur honoris causa de l'Université Catholique de Louvain, avril 1992.

Foreign honorary member de l'American Academy of Arts and Sciences, avril 1992.

Foreign associate de la National Academy of Sciences, avril 1992.