Théorie des groupes

M. Jacques TITS, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de cette année avait pour titre *Groupes algébriques linéaires sur les corps séparablement clos*. Il s'agissait d'une suite du cours précédent, mais alors que celui-là avait surtout été consacré à la construction d'exemples, souvent « exotiques », celui-ci a plutôt eu pour objet la preuve de théorèmes de structure de portée générale. La plupart des résultats obtenus dans la première partie du cours, qui a occupé de loin le plus grand nombre d'heures, concernait les groupes algébriques linéaires sur un corps *quelconque* ; cependant, pour beaucoup de démonstrations, le cas d'un corps de base séparablement clos s'est avéré crucial, le cas général s'en déduisant par une descente galoisienne banale : cela justifiait en quelque sorte le titre du cours. Celui-ci a consisté en trois parties consacrées respectivement à

— des théorèmes de structure et, en particulier, de conjugaison (corps de base quelconque) ;

— une esquisse de classification des groupes pseudo-simples (groupes sans k-sous-groupe distingué propre non trivial) sur un corps k séparablement clos ;

— des conditions d'existence de « mauvais » éléments unipotents rationnels.

Les résultats exposés dans la première partie ont, pour la plupart, été obtenus (par des méthodes parfois différentes) en collaboration avec A. Borel, et annoncés dans une note aux *C. R. Acad. Sci.* (**287** (1978), 55-57), désignée ci-après par [CR].

I. Théorèmes de structure

1. *Groupes avec tore déployé d'opérateurs*

Un outil essentiel de la théorie classique des groupes de Lie est l'application exponentielle de l'algèbre de Lie dans le groupe. Une telle application n'existe pas pour les groupes algébriques (sauf pour les groupes unipotents en caractéristique 0), mais l'existence d'un tore déployé d'opérateurs en fournit parfois un substitut efficace. Les énoncés de cette première section illustrent cette remarque.

1.1. Dans ce résumé, k désigne un corps, k_s une clôture séparable, $\bar{k}$ la clôture algébrique de k_s et G un k-groupe algébrique connexe. Tous les groupes algébriques considérés sont affines.

Soient S un $\bar{k}$-tore de G et $X = X^*(S)$ le groupe des caractères rationnels de S. Si Y est un espace vectoriel (resp. un groupe algébrique) sur lequel S opère, on appelle *poids* de S dans Y les caractères de S qui composent la représentation linéaire de S dans Y (resp. dans Lie Y), et l'on note $\Pi(S,Y)$ l'ensemble de ces poids. Soit Ψ une partie de X. Un $\bar{k}$-espace vectoriel sur lequel S opère est appelé un *Ψ-espace* si tous les poids de S dans cet espace appartiennent à Ψ et un $\bar{k}$-groupe sur lequel S opère (ou S-groupe) est un Ψ-groupe s'il est connexe et si son algèbre de Lie est un Ψ-espace. Si Y est un $\bar{k}$-espace vectoriel (resp. un $\bar{k}$-groupe) sur lequel S opère, on note Y_Ψ le sous-espace (resp. le sous-groupe) de Y engendré par tous ses Ψ-sous-espaces (resp. tous ses Ψ-sous-groupes). Pour un S-groupe Y, l'ensemble Ψ est dit *clos dans Y* si Lie $Y_\Psi = (\text{Lie } Y)_\Psi$; cette propriété ne dépend évidemment que de $\Psi \cap \Pi(S,Y)$. (N.B. On a donné dans le cours un exemple montrant qu'un S-groupe Y peut posséder un plus grand Ψ-sous-groupe sans pour autant que Ψ soit clos dans Y). Une partie de X (resp. de $\Psi \subset X$) est dite *close* (resp. *relativement close*) si elle est fermée pour l'addition (resp. si elle est l'intersection de Ψ avec une partie close de X).

1.2. L'usage que l'on fait des notions introduites ci-dessus repose de façon essentielle sur les propositions suivantes qui ont été établies dans le cours. Nous conservons les notations S, X, Ψ du n° 1.1. Soit Y un S-$\bar{k}$-groupe (c'est-à-dire un $\bar{k}$-groupe sur lequel S opère).

PROPOSITION 1. — *Toute partie relativement close d'une partie de X close dans Y est close dans Y ; en particulier, toute partie close de X est close dans Y.*

COROLLAIRE 1. — *Soient Y_i $(i = 1, \ldots, m)$ des S-$\bar{k}$-groupes et $\varphi_i : Y_i \to Y$ des $\bar{k}$-homomorphismes dont les images engendrent Y. Alors, tout poids de S dans Y est somme de poids de S dans le produit direct des Y_i.*

En fait, ceci n'est un corollaire de la proposition 1 qu'une fois établie l'assertion pour $m = 1$.

COROLLAIRE 2. — *Un vecteur propre de poids χ de S dans Lie Y est tangent à $Y_{N^*\chi}$.*

Disons que l'ensemble Ψ est *stablement clos* dans Y si pour tout sous-groupe normal connexe Y_1 de Y, stable par S, il est clos dans Y/Y_1. J'ignore si une partie de X peut être close dans Y sans l'être stablement.

PROPOSITION 2. — *Supposons que Y soit nilpotent et que 0 ne soit pas un poids de S dans Y. Soient Ψ une partie de X close dans Y, et $\Psi_1, \ldots, \Psi_m$ des parties de X stablement closes dans Y dont Ψ soit la réunion disjointe. Alors, l'application produit*

$$Y_{\Psi_1} \times \ldots \times Y_{\Psi_m} \to Y_\Psi$$

est un isomorphisme de variétés.

PROPOSITION 3. — *Soit λ une forme linéaire réelle sur X à coefficients rationnellement indépendants (autrement dit, une forme ne s'annulant sur aucun élément non nul de X) et soit X_+ (resp. X_-) l'ensemble des éléments de X où λ prend une valeur strictement positive (resp. négative). Considérons les trois sous-groupes connexes $Y_+ = Y_{X_+}$, $Y_- = Y_{X_-}$ et $Y_0 = Y_{\{0\}}$ de Y. Les deux premiers sont unipotents et normalisés par Y_0, et l'application produit $Y_- \times Y_0 \times Y_+ \to Y$ est une immersion ouverte. Si Y est connexe, Y_0 est le centralisateur de S dans Y.*

Supposons maintenant que S soit un k-tore opérant sur le k-groupe G, l'opération étant définie sur k.

PROPOSITION 4. — *Si Ψ est une partie de X stable par le groupe de Galois $Gal(k_s/k)$ et close dans G, alors G_Ψ est un k-groupe. Si de plus Ψ est contenu dans l'ensemble X_+ de la proposition précédente, alors G_Ψ est un k-groupe unipotent déployé.*

PROPOSITION 5. — *Supposons que S soit un k-tore déployé du k-groupe G et soit h un élément de $G(\bar{k})$ tel que ${}^hS$ soit lui aussi un k-tore déployé. Alors, h appartient au produit $G(k).Z(S)$, où $Z(S)$ désigne le centralisateur de S dans G. En particulier, ${}^hS$ est conjugué à S sur k (c'est-à-dire par un élément de $G(k)$).*

1.3. Ces résultats ne se démontrent pas dans l'ordre où ils ont été énoncés ici. Par exemple, il est commode de disposer d'emblée du corollaire 1 dans le cas particulier où Y est unipotent et où les Y_i sont des sous-groupes de Y. De même, les propositions 2 et 3 sont utilisées dans la preuve de la proposition 1, mais un cas particulier de cette dernière, établi indépendamment, intervient dans leur démonstration.

Les preuves des énoncés du n° 1.2 sont assez standard et exigent peu de moyens. Mis à part les rudiments de la théorie des groupes algébriques, on n'a guère utilisé, pour les démontrer, que le §3 de l'article « Groupes Réductifs » de A. Borel et J. Tits (*Publ. Mat. I. H. E. S.* **27** (1965), 55-151), article noté [GR] par la suite, et la proposition 6 ci-dessous, cas particulier d'un résultat de A. Borel et T.A. Springer (*Tôhoku Math. J.* (2) **20** (1968), 443-497 ; voir p. 490, n° 9.13). Notons que les propositions 2 à 5 ci-dessus généralisent des énoncés de [GR], §3.

PROPOSITION 6. — *Supposons G unipotent connexe. Soient S un k-tore opérant k-morphiquement sur G et H un k-sous-groupe de G stable par S et contenant les points fixes de S dans G. Alors il existe une k-sous-variété H' de G, stable par S et S-k-isomorphe à un espace vectoriel sur lequel S opère linéairement, telle que l'application produit $H \times H' \to G$ soit un isomorphisme de variétés, compatible avec l'action de S.*

2. *Sous-groupes pseudo-paraboliques*

L'un des objectifs principaux de cette première partie du cours était la preuve de la conjugaison sur k des tores déployés maximaux de G (cf. §3, théorème 2). Dans le cas des groupes réductifs, celle-ci se démontre à l'aide des sous-groupes paraboliques et du fait que le quotient de G par un tel sous-groupe est une variété complète. Dans le cas général, les sous-groupes paraboliques ne peuvent plus rendre ce service : on a vu en effet dans le cours de l'an dernier que, même sur un corps k séparablement clos (sur lequel tout tore est déployé), un groupe non résoluble peut ne posséder aucun k-sous-groupe parabolique propre. Cependant, il s'avère qu'une autre classe de sous-groupes, celle des *sous-groupes pseudo-paraboliques* peut prendre le relais grâce au fait que le quotient d'un k-groupe par un tel sous-groupe est, sinon complet, du moins « relativement complet » (cf. le théorème 1 à la fin de cette section).

2.1. Si S est un k-tore opérant sur G (par exemple, un sous-tore de G opérant par automorphismes intérieurs) et si λ est une forme linéaire réelle sur $X = X^*(S)$, nous notons $G_{\lambda \geq 0}$ (resp. $G_{\lambda > 0}$; resp. $G_{\lambda < 0}$) le sous-groupe G_Ψ, où Ψ est l'ensemble des éléments de X où λ est positive (resp. strictement positive ; resp. strictement négative), et nous posons $P(S, \lambda) = G_{\lambda \geq 0} . R_{ud}(G)$, où $R_{ud}(G)$ désigne, comme d'habitude, le radical unipotent déployé de G (plus grand sous-groupe unipotent normal déployé : on sait qu'il existe).

On appelle *k-sous-groupe pseudo-parabolique* ou, plus correctement, *sous-groupe k-pseudo-parabolique* tout sous-groupe de la forme $P(S, \lambda)$, où S est un k-tore déployé de G. La définition fait intervenir le corps k de façon essentielle (moins à cause de S que par la présence de $R_{ud}(G)$, qui dépend de k), mais on verra au n° 3.3 que la notion est invariante par extension séparable du corps de base, en ce sens qu'un k-sous-groupe de G est k-pseudo-parabolique si et seulement s'il est k_s-pseudo-parabolique. Il est facile de voir que si G est réductif ou si k est parfait, les sous-groupes k-pseudo-paraboliques ne sont autres que les k-sous-groupes paraboliques.

2.2. PROPOSITION 7. — *Si P est un sous-groupe k-pseudo-parabolique de G, la fibration $G \to G/P$ possède une k-section rationnelle. L'application canonique $G(k) \to (G/P)(k)$ est surjective.*

Choisissons un tore déployé S de G et une forme linéaire réelle λ sur $X^*(S)$ tels que $P = P(S, \lambda)$. Vu la proposition 6, la fibration $G_{\lambda<0} \to (G_{\lambda<0} \,.\, R_{ud}(G))/R_{ud}(G)$ possède une k-section k-isomorphe à un espace affine ; celle-ci est une k-section rationnelle de $G \to G/P$ en vertu des propositions 2 et 3 du n° 1.2. La deuxième assertion résulte de la première si k est infini, et est bien connue si k est fini.

2.3. Sur un corps algébriquement clos, les sous-groupes paraboliques d'un groupe algébrique connexe H peuvent être définis comme les sous-groupes Q tels que la variété H/Q soit complète (on dit aussi « propre »). Cette propriété est cruciale pour la preuve des théorèmes de conjugaison classiques (tores maximaux, sous-groupes de Borel, etc.). Ici, les théorèmes de conjugaison que nous avions en vue ont été établis à l'aide d'une propriété analogue mais relative au corps de base et vraie pour les sous-groupes pseudo-paraboliques.

Disons qu'une k-variété V est *relativement complète* (sur k) si l'application canonique du groupe $V(k[[t]])$ des points de V à valeurs dans les séries formelles sur k dans le groupe $V(k((t)))$ de ses points à valeurs dans les séries de Laurent est surjective (donc bijective). Intuitivement, cela veut dire que V n'a pas de « point à l'infini sur k ». On sait que, sur un corps algébriquement clos, une variété est complète si et seulement si elle est relativement complète (« critère valuatif de propreté »).

La démonstration du lemme suivant est facile :

LEMME. — *Soit C une k-courbe et x un point simple de C. Alors, tout k-morphisme de $C - \{x\}$ dans une variété relativement complète se prolonge à C.*

Comme dans le cas des variétés complètes, on en déduit, par induction sur la dimension de G, en suivant un raisonnement classique de M. Rosenlicht :

PROPOSITION 8. — *Un k-groupe résoluble déployé G opérant sur une variété relativement complète V telle que $V(k) \neq \emptyset$ possède un point fixe dans $V(k)$.*

2.4. Voici le théorème annoncé au début de cette section :

THÉORÈME 1. — *Si P est un sous-groupe k-pseudo-parabolique du k-groupe G, G/P est une variété relativement complète.*

Ce théorème sera utilisé par l'intermédiaire du corollaire suivant, qui est immédiat compte tenu des propositions 7 et 8 :

COROLLAIRE. — *Pour tout k-sous-groupe résoluble déployé H de G, il existe $g \in G(k)$ tel que ${}^gH \subset P$ (ou encore, $H \subset P^g$).*

2.5. Avant de démontrer le théorème, indiquons un lemme qui sera utile à plusieurs reprises par la suite.

LEMME. — *Tout k-sous-groupe déployé du radical unipotent $R_u(G)$ de G est contenu dans le radical unipotent déployé $R_{ud}(G)$.*

Soient H le sous-groupe en question. Le sous-groupe H_1 engendré par les conjugués de H par tous les éléments de $G(k_s)$ est stable par le groupe de Galois Gal (k_s/k), donc est un k-groupe. Il est unipotent, car contenu dans $R_u(G)$, et normalisé par $G(k_s)$, donc par G (puisque $G(k_s)$ est dense dans G). Enfin, H_1 est déployé sur k_s, car il est engendré par des sous-groupes déployés, donc déployé sur k.

2.6. *Preuve du théorème 1*

Soit P un sous-groupe k-pseudo-parabolique de G. On veut montrer que la variété G/P est relativement complète. Des réductions évidentes permettent de supposer k séparablement clos, $R_{ud}(G) = \{1\}$ et $P = P(S, \lambda)$ (cf. 2.1), où S est un tore *maximal* et où λ ne s'annule par sur X en dehors de 0 (on peut faire ces dernières hypothèses car si l'assertion est vraie pour un sous-groupe k-pseudo-parabolique, elle l'est évidemment aussi pour tout k-sous-groupe qui le contient).

Soient G_1 le $\bar{k}$-groupe réductif quotient de G par son radical unipotent $R_u(G)$, et π la projection canonique de G sur G_1. Le tore S se projette $\bar{k}$-isomorphiquement sur un $\bar{k}$-tore maximal de G_1 que nous notons aussi S et que, le cas échéant, nous identifierons avec le tore de G ainsi nommé. L'image de P dans G_1 est un sous-groupe de Borel B de G_1. Les groupes $U = G_{\lambda<0}$ et $U_1 = G_{1,\lambda<0}$ sont respectivement un k-sous-groupe unipotent déployé de G et un $\bar{k}$-sous-groupe unipotent *maximal* de G_1, opposé à B, et image de U par π.

Nous devons montrer que si x est un point de $(G/P)(k((t)))$, alors x appartient à $(G/P)(k[[t]])$. L'image de x dans G_1/B appartient à $(G_1/B)(\bar{k}[[t]])$ puisque G_1/B est une variété complète. Nous supposerons, sans nuire à la généralité, que x appartient à la « grande cellule », image de U dans G/P : il suffit, pour se ramener à ce cas, d'effectuer une translation par un élément « général » de l'ensemble $G(k)$, lequel est dense dans G puisque k est séparablement clos.

Tout poids α de S dans U possède un multiple entier dans $\Pi(S, U_1)$, sinon $G_{\mathbf{N}^*\alpha}$ serait un k-sous-groupe unipotent déployé de $R_u(G)$, donc de $R_{ud}(G)$, vu le lemme du n° 2.5. Pour $\alpha \in X$, notons $\downarrow\alpha$ l'ensemble des éléments χ de X tels que α appartienne à $\mathbf{N}^*\chi$. La proposition 2 du n° 1.2 a pour conséquence que l'application produit définit un k-isomorphisme de variétés du produit direct des k-groupes $U_{\downarrow\alpha}$, pour α parcourant $\Pi(S, U_1)$ dans un ordre quelconque, sur U. Manifestement, $\pi(U_{\downarrow\alpha}) = U_{1,\alpha}$. Cela nous permet de décomposer notre problème suivant les poids de S dans U_1, donc de supposer que x appartient à l'image de $U_{\downarrow\alpha}$ dans G/P pour un poids α donné.

Soit p la caractéristique de k, que l'on suppose non nulle (sans quoi il n'y aurait rien à prouver). Les sous-groupes $(U_{\downarrow\alpha})^p$ et $\mathrm{D}U_{\downarrow\alpha}$ (groupe dérivé de $U_{\downarrow\alpha}$) sont réduits à l'élément neutre, toujours en vertu du lemme du n° 2.5, car leur image par π est triviale. Etant commutatif d'exposant p, $U_{\downarrow\alpha}$ est un k-espace vectoriel. Plus précisément, il existe un k-isomorphisme de ce groupe sur son algèbre de Lie, compatible avec l'action de S (cela résulte de la proposition 6). Choisissons dans cet espace un système de coordonnées (x_i) adapté à cette action, c'est-à-dire correspondant à une base formée de vecteurs propres de S. Comme les poids de S dans $U_{\downarrow\alpha}$ sont des sous-multiples de α, on voit que π, qui est additif, est donné par un p-polynôme, c'est-à-dire un polynôme de la forme $\Sigma\, c_i x_i^{q(i)}$, où les $q(i)$ sont des puissances entières de p. Finalement, nous avons ramené la preuve du théorème 2 à celle du lemme suivant, qui est un simple exercice :

LEMME. — *Soient V un k-espace vectoriel et φ un p-polynôme sur V à coefficients dans $\bar{k}$ ne s'annulant pas sur $V(k)$ en dehors du point 0. Alors, $\varphi^{-1}(\bar{k}[[t]]) \cap V(k((t))) \subset V(k[[t]])$.*

3. *Théorèmes de conjugaison. Autres propriétés des sous-groupes pseudo-paraboliques*

3.1. THÉORÈME 2. — *Les tores k-déployés maximaux du groupe G sont conjugués sur k (c'est-à-dire par des éléments de $G(k)$).*

La démonstration procède par induction sur la dimension de G. Supposons l'assertion vraie pour tout groupe dont la dimension est strictement inférieure à dim G. Si $R_{\mathrm{ud}}(G) \neq \{1\}$, l'assertion est vraie pour $G/R_{\mathrm{ud}}(G)$, donc aussi pour G (car l'homomorphisme canonique $G(k) \to R_{\mathrm{ud}}(G)(k)$ est surjectif). Supposons donc $R_{\mathrm{ud}}(G) = \{1\}$. Si G possède un sous-groupe k-pseudo-parabolique propre P, le corollaire du n° 2.4 entraîne que tout tore déployé de G est conjugué sur k à un tore de P ; comme l'assertion est vraie pour P, elle l'est aussi pour G. Supposons donc que G ne possède pas de sous-groupe k-pseudo-parabolique propre. Si S est un k-tore déployé quelconque de G et si λ est une forme linéaire réelle sur $X^*(S)$ ne s'annulant pas en dehors de 0, on a $G = P(S,\lambda) = P(S,-\lambda)$. Cela implique que S n'a pas de poids non nul dans G, donc que $G = Z(S)$ (par la proposition 3). Ainsi, tout sous-tore déployé est central dans G, et l'assertion en résulte.

3.2. PROPOSITION 9. — *Soient P un sous-groupe k-pseudo-parabolique de G et S un tore déployé maximal de P. Alors, S est aussi un tore déployé maximal de G et il existe une forme linéaire réelle λ sur $X^*(S)$ telle que $P = P(S,\lambda)$. Le groupe P est un sous-groupe k-pseudo-parabolique minimal si et seulement si la forme λ ne s'annule sur aucun poids non nul de S dans $G/R_{ud}(G)$; dans ce cas, λ peut être choisi tel que $\lambda^{-1}(0) = \{0\}$.*

La première assertion résulte aussitôt du corollaire du n° 2.4 et du théorème 2.

Soient S' un sous-tore déployé de G et λ' une forme linéaire réelle sur $X^*(S')$ telle que $P = P(S',\lambda')$. Vu le théorème 2 appliqué à P, on peut, moyennant conjugaison par un élément de $P(k)$, supposer S' contenu dans S, et l'on a alors $P = P(S,\lambda)$ en prenant pour λ la composée de l'homomorphisme de restriction $X^*(S) \to X^*(S')$ et de la forme λ'.

Soit maintenant μ une forme linéaire réelle sur $X^*(S)$ ne s'annulant pas sauf en 0. Il est clair que, pour tout nombre réel ε suffisamment voisin de 0, le sous-groupe pseudo-parabolique $P(S,\lambda + \varepsilon\mu)$ est contenu dans P, et que l'inclusion est stricte si λ s'annule sur un poids non nul de S dans $G/R_{\mathrm{ud}}(G)$. De plus, si $P = P(S,\lambda)$ n'est pas minimal parmi les sous-groupes k-pseudo-paraboliques, il existe un sous-groupe pseudo-parabolique P' strictement contenu dans P et contenant S : cela résulte du théorème 2 et de la partie de la proposition 9 déjà établie. Mais alors, λ s'annule sur les poids de S dans P/P', lesquels ne sont pas tous nuls et sont des poids de S dans $G/R_{\mathrm{ud}}(G)$.

3.3. Corollaire. — *Un k-sous-groupe P de G est un sous-groupe k-pseudo-parabolique si et seulement s'il est k_s-pseudo-parabolique.*

« Seulement si » est évident. Supposons donc que P soit k_s-pseudo-parabolique, soient S un k-tore déployé maximal de P et T un k-tore maximal de P contenant S. En vertu de la proposition précédente, il existe une forme linéaire réelle μ sur $X^*(T)$ telle que $P = P(T,\mu)$. Le groupe X^0 des caractères de T stables par $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ s'identifie par l'homomorphisme de restriction à un sous-groupe d'indice fini de $X = X^*(S)$. La restriction de μ à X^0 se prolonge de façon unique en une forme linéaire λ sur X et il est clair que $P = P(S,\lambda)$.

3.4. Théorème 3. — *Les sous-groupes k-pseudo-paraboliques minimaux de G sont conjugués sur k.*

Soient P et P' deux sous-groupes k-pseudo-paraboliques minimaux tels que $\dim P \geq \dim P'$, soit S un tore déployé maximal de P et soit λ une forme linéaire réelle sur $X^*(S)$ telle que $P = P(S,\lambda)$. Le groupe $D = S.G_{\lambda>0}.R_{\mathrm{ud}}(G)$ est résoluble déployé, donc, vu le corollaire du n° 2.4, il existe un élément g de $G(k)$ tel que ${}^gD$ soit contenu dans P'. D'autre part, comme ${}^gS$ est un tore déployé maximal de G, donc de P', $Z({}^gS) = {}^gZ(S) \subset P'$ en vertu de la proposition 9. On a donc ${}^gP = {}^g(Z(S)\,.\,D) \subset P'$ et, vu l'hypothèse sur les dimensions, ${}^gP = P'$.

3.5. Proposition 10. — *Soient S un tore déployé de G et λ une forme linéaire réelle sur $X^*(S)$. Alors, $R_{ud}(Z(S))$ est le centralisateur de S dans $R_{ud}(G)$ et l'on a $R_{ud}(P(S,\lambda)) = R_{ud}(G)\,.\,G_{\lambda>0}$.*

La seconde assertion est conséquence immédiate de la première et de la proposition 3. Pour établir la première assertion, on peut supposer $R_{\mathrm{ud}}(G) = \{1\}$ et il faut alors montrer que $R_{\mathrm{ud}}(Z(S))$ est réduit à l'élément neutre. Sur $\bar{k}$, $G/R_{\mathrm{u}}(G)$ est réductif, donc le radical unipotent du centralisateur de l'image de S dans ce groupe est trivial. Par conséquent, $R_{\mathrm{ud}}(Z(S))$ est contenu dans $R_{\mathrm{u}}(G)$, donc aussi dans $R_{\mathrm{ud}}(G)$, vu le lemme du n° 2.5.

Compte tenu de la proposition 9, la proposition 10 entraîne aussitôt :

COROLLAIRE. — *Un sous-groupe k-pseudo-parabolique d'un sous-groupe k-pseudo-parabolique de G est un sous-groupe k-pseudo-parabolique de G.*

3.6. PROPOSITION 11. — *Soient P un sous-groupe k-pseudo-parabolique de G et S un tore maximal du radical déployé $R_d(P)$ de P. Alors, les poids non nuls de S dans $P/R_{ud}(G)$ et dans $R_d(P)/R_{ud}(G)$ sont les mêmes. Si Ψ désigne l'ensemble de ces poids, on a*

$$P = G_\Psi \,.\, Z(S) \,.\, R_{ud}(G).$$

Supposons $R_{\mathrm{ud}}(G) = \{1\}$, ce qui est évidemment loisible. Soient T un tore déployé maximal de P contenant S et μ une forme linéaire réelle sur $X^*(T)$ telle que $P = P(T,\mu)$ (cf. 3.2). Raisonnant sur $\bar{k}$ et passant au quotient par $R_{\mathrm{u}}(G)$, on montre que S est la composante neutre de l'intersection des noyaux des caractères de T qui annulent μ. L'énoncé s'ensuit, compte tenu de la proposition 10.

3.7. *Remarque.* — La proposition 11 montre qu'un sous-groupe k-pseudo-parabolique est déterminé par son radical déployé. Appelons *normalisateur séparable* d'un k_s-sous-groupe de G, ou d'un sous-groupe de $G(k_s)$, l'adhérence de Zariski du normalisateur de ce sous-groupe dans $G(k_s)$. Ce qui vient d'être dit implique qu'un sous-groupe k-pseudo-parabolique P de G et son radical déployé ont le même normalisateur séparable. Mais on verra plus loin que P est son propre normalisateur séparable ; par conséquent :

tout sous-groupe k-pseudo-parabolique P est le normalisateur séparable de son radical déployé $R_d(P)$.

En fait, P est le normalisateur de $R_{\mathrm{d}}(P)$, et même son « normalisateur schématique », mais cela n'a pas été démontré dans le cours. Toutes les assertions de la présente remarque restent vraies si l'on remplace R_{d} par R_{ud}.

3.8. THÉORÈME 4. — *Les sous-groupes résolubles déployés maximaux de G sont les radicaux déployés des sous-groupes k-pseudo-paraboliques minimaux. Ils sont conjugués sur k.*

Nous commencerons par prouver ce théorème dans l'hypothèse (conforme au titre du cours !) où le corps de base k est séparablement clos. Puis nous donnerons quelques brèves indications sur la méthode suivie dans le cas général.

Soit donc $k = k_s$, et supposons, ce qui est évidemment loisible, que $R_{\mathrm{ud}}(G) = \{1\}$. Soit R un sous-groupe résoluble déployé maximal de G. En vertu du corollaire du n° 2.4, R est contenu dans un sous-groupe k-pseudo-parabolique minimal P et, vu la proposition 9 (n° 3.2), il existe un k-tore maximal S de G et une forme linéaire réelle λ sur $X^*(S)$, ne s'annulant sur aucun élément non nul de $X^*(S)$, tels que $P = P(S,\lambda)$. Le groupe $R \,.\, R_{\mathrm{ud}}(P)$ est résoluble déployé ; vu la maximalité de R, on en déduit que $R \supset R_{\mathrm{ud}}(P) = G_{\lambda>0}$. Le groupe P est produit semi-direct de $Z(S)$ par $G_{\lambda>0}$. Comme S est un tore maximal de G, son centralisateur est résoluble. Vu le lemme du n° 2.5, tout sous-groupe unipotent déployé de $Z(S)$ est contenu dans $R_{\mathrm{ud}}(Z(S))$, donc est trivial par la proposition 10. En particulier, l'image de $R_{\mathrm{u}}(R)$ par la projection canonique de P dans $Z(S)$ est réduite à l'élément neutre, ce qui veut dire que $R_{\mathrm{u}}(R) = G_{\lambda>0}$ et $R = S \,.\, G_{\lambda>0} = R_{\mathrm{d}}(P)$. Compte tenu du théorème 3, cela prouve le théorème 4 dans le cas séparablement clos.

Pour passer au cas général, on s'inspire de l'article « Éléments unipotents... » de A. Borel et J. Tits (*Inventiones Math.* **12** (1971), 95-104). La stratégie est la suivante : il s'agit de montrer que tout sous-groupe unipotent déployé U de G est contenu dans le radical unipotent déployé d'un sous-groupe k-pseudo-parabolique. Pour tout U notons $E(U)$ le produit de U par le *normalisateur séparable* de U. La suite U, $E(U)$, $E^2(U)$, ... est croissante, donc stationnaire, et l'on conclut à l'aide du lemme suivant :

LEMME. — *Si $U = E(U)$, le groupe U est le radical unipotent déployé d'un sous-groupe k-pseudo-parabolique.*

La preuve de ce lemme, qu'il suffit évidemment d'établir pour $k = k_s$, est très semblable à celle de l'assertion correspondante de la proposition 8 de *loc. cit.* Notons qu'on y utilise des propriétés du système des poids d'un tore déployé maximal dans G (pour $R_{\mathrm{ud}}(G) = \{1\}$), propriétés dont nous ne parlerons qu'au paragraphe suivant ; il importe donc de préciser que celui-ci est indépendant du théorème 4.

3.9. *Remarques.* — (i) La preuve du théorème 4 donnée pour $k = k_s$ est valable dès que G possède un k-tore maximal déployé.

(ii) En combinant la proposition 11 et le théorème 4, on voit que l'application ? $\rightarrow R_{\mathrm{d}}$? définit une *bijection* de l'ensemble des sous-groupes k-pseudo-paraboliques minimaux sur celui des k-sous-groupes résolubles déployés maximaux.

4. *Système de racines et groupe de Weyl*

Dans cette section, on supposera toujours $R_{\mathrm{ud}}(G) = \{1\}$.

4.1. PROPOSITION 12. — *Soit S un k-tore déployé maximal de G, dont le normalisateur est noté $N(S)$. Posons $\Phi(S,G) = \Pi(S,G) - \{0\}$ et dotons $X^*(S)$*

d'un produit scalaire euclidien invariant par le groupe $N(S)/Z(S)$ (il est bien connu que celui-ci est fini). Alors :

(i) pour tout poids $a \in \Phi(S,G)$, il existe dans $N(S)(k)$ un élément induisant sur $X^*(S)$ la réflexion r_a par rapport à a ;

(ii) les r_a engendrent le groupe $N(S)/Z(S)$, qui coïncide donc avec $N(S)(k)/Z(S)(k)$.

La preuve est semblable à celle des mêmes assertions pour les groupes réductifs. Pour établir (i), on utilise la conjugaison des sous-groupes k-pseudo-paraboliques minimaux. Pour (ii), on doit se souvenir que le centralisateur de tout tore dans un groupe connexe est connexe.

4.2. PROPOSITION 13. — *Avec les notations du numéro précédent, pour tout a et tout caractère x de S, $r_a(x) - x$ est multiple entier de a.*

Ici encore, on peut s'inspirer du cas des groupes réductifs (cf. [GR], § 5). Il est commode de se ramener au cas où $\dim S = 1$. Pour cela, on a besoin du lemme suivant qui a été utilisé à plusieurs reprises dans le cours.

LEMME. — *Soit Ψ une partie de $X^*(S)$ telle que $- \Psi = N^*\Psi = \Psi$. Alors, $R_{ud}(G_\Psi) = \{1\}$.*

Pour le prouver, on se ramène d'abord, de façon évidente, au cas où k est séparablement clos et où S est un tore maximal de G (cette dernière réduction s'opère en remplaçant S par un tore maximal qui le contient et Ψ par son image réciproque dans le groupe des caractères de ce tore par l'homomorphisme de restriction). L'hypothèse $\Psi = - \Psi$ implique que l'image H de G_Ψ dans $G/R_u(G)$ est réductive. Donc, le radical unipotent déployé de G_Ψ est contenu dans $R_u(G)$, donc dans $R_{ud}(G)$ vu le lemme du n° 2.5, q.e.d.

4.3. THÉORÈME 5. — *L'ensemble $\Phi(S,G)$ des poids non nuls de S dans G est un système de racines. Il en est de même de $\Phi(S,G/R_u(G)) = \Pi(S,G/R_u(G)) - \{0\}$.*

La première assertion résulte des deux propositions précédentes. La seconde s'ensuit compte tenu de l'invariance de $\Phi(G/R_u(G))$ par $N(S)/Z(S)$ et du lemme suivant :

LEMME. — *Les ensembles $\Phi(S,G)$ et $\Phi(S,G/R_u(G))$ ont les mêmes éléments non multipliables.*

Il suffit de montrer que si a est un élément non multipliable de $\Phi(S,G/R_u(G))$, il est non multipliable dans $\Phi(S,G)$. Or, si l'on pose $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$, le sous-groupe résoluble déployé G_A de G est contenu dans $R_u(G)$, par hypothèse, donc dans $R_{ud}(G)$, vu le lemme du n° 2.5 ; par conséquent $G_A = \{1\}$, q.e.d.

4.4. Dans le cours de l'an dernier, on avait construit sur un corps séparablement clos un groupe dont le radical unipotent déployé est trivial et dont le système de racines n'est pas réduit. Nous allons voir que cela ne peut se passer qu'en caractéristique 2.

THÉORÈME 6. — *Soit S un tore déployé maximal de G. Si le système de racines $\Phi(S,G/R_u(G))$ est réduit (par exemple, si S est un tore maximal de G) et si car $k \neq 2$, $\Phi(S,G)$ est réduit.*

Posons $G_1 = G/R_u(G)$. Soit $a \in \Phi(S,G)$ tel que $2a$ appartienne aussi à $\Phi(S,G)$ et posons $H = G_{\{a,2a\}}$. L'image de H dans G_1 est commutative d'exposant $p = \text{car}\, k$ (on suppose cette caractéristique non nulle), donc $\mathrm{D}H$ et H^p, qui sont des sous-groupes unipotents déployés de G, sont contenus dans $R_u(G)$, donc dans $R_{ud}(G)$ (toujours par le lemme du n° 2.5), donc sont réduits à l'élément neutre. Ainsi, H est un espace vectoriel stable par S, les poids de S dans cet espace sont a et $2a$, et l'on peut donc écrire $H = H_a \times H_{2a}$. Comme la caractéristique de k est différente de 2, tout S-sous-groupe de H est produit direct de ses intersections avec H_a et H_{2a}. Posons $H \cap R_u(G) = X_1 \times X_2$, avec $X_i \subset H_{ia}$. Comme a n'est pas un poids de S dans G_1, on doit avoir $X_1 = H_a$, c'est-à-dire que H_a est contenu dans $R_u(G)$, donc dans $R_{ud}(G) = \{1\}$, contradiction.

5. *Donnée radicielle et BN-paire*

5.1. Les principaux résultats de ce § 5 sont résumés dans les deux propositions suivantes.

Soit S un k-tore déployé maximal de G. Pour $x \in X^*(S)$, nous notons $\tilde{x}$ l'intersection de $X^*(S)$ avec $\mathbf{R}_+^* \,.\, x$. Soit $\tilde{\Phi}$ l'ensemble des $\tilde{x}$ pour x parcourant $\Phi(S,G)$ (cf. 4.1). Si a et b sont deux éléments de cet ensemble, nous désignons par (a,b) l'ensemble des éléments de $X^*(S)$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients strictement positifs d'un élément de a et d'un élément de b. Pour $a \in \tilde{\Phi}$, le groupe unipotent déployé G_a sera aussi noté U_a, conformément à la tradition.

PROPOSITION 14. — *Supposons $R_{ud}(G) = \{1\}$.*

(i) L'intersection des normalisateurs des U_a, pour $a \in \tilde{\Phi}$, est le centralisateur $Z(S)$ de S.

(ii) Si a et b sont deux éléments de $\tilde{\Phi}$, le groupe engendré par les éléments de G qui sont commutateurs d'un élément de U_a et d'un élément de U_b est contenu dans le sous-groupe $U_{(a,b)}$ de G.

(iii) Si $a \in \tilde{\Phi}$ et si u est un élément de $U_a(k)$ distinct de l'élément neutre, il existe des éléments u' et u'' de $U_{-a}(k)$ tels que $m(u) = u'uu''$ conjugue U_b en $U_{r_a(b)}$ pour tout $b \in \tilde{\Phi}$, r_a étant défini comme au n° 4.1 ; les éléments u' et u'' sont uniques (ce qui justifie la notation $m(u)$) et distincts de l'élément neutre.

(iv) Considérons une forme linéaire réelle sur $X^*(S)$ ne s'annulant sur aucune racine (élément de $\Phi(S,G)$), soit $\bar{\Phi}_+$ l'ensemble des éléments de $\bar{\Phi}$ sur lesquels cette forme est positive et soit a un tel élément. Alors, U_{-a} n'est pas contenu dans le groupe engendré par les U_b pour $b \in \bar{\Phi}_+$.

Avec la terminologie du Résumé de Cours de 1991-1992, cette proposition signifie en gros que les U_a, pour a parcourant $\bar{\Phi}$, forment une *donnée radicielle algébrique ajustée* dans G.

PROPOSITION 15. — *Soient S un k-tore déployé maximal de G, P un sous-groupe k-pseudo-parabolique minimal de G contenant S et $N = N(S)$ le normalisateur de S dans G. Alors, $(P(k), N(k))$ est une BN-paire dans $G(k)$ et son groupe de Weyl est isomorphe à celui du système de racines $\Phi(S,G)$, c'est-à-dire au quotient $N(k)/Z(S)(k)$ (cf. 4.1). Les groupes de points rationnels des sous-groupes k-pseudo-paraboliques de G sont les sous-groupes paraboliques de cette BN-paire ; ceci définit une bijection de l'ensemble des sous-groupes k-pseudo-paraboliques sur l'ensemble des sous-groupes paraboliques de la BN-paire, et si $Z(S)(k)$ est dense dans $Z(S)$ (par exemple si k est séparablement clos), l'inverse de cette bijection est le passage à l'adhérence de Zariski. Deux sous-groupes k-pseudo-paraboliques de G sont conjugués dans G si et seulement si leurs groupes de points rationnels sont conjugués dans $G(k)$.*

La théorie générale des BN-paires permet de tirer de nombreuses conséquences de cette dernière proposition. Citons-en seulement deux :

COROLLAIRE 1. — *Le groupe G possède $2^{\dim S}$ classes de conjugaison de sous-groupes k-pseudo-paraboliques.*

COROLLAIRE 2. — *Si P est un sous-groupe k-pseudo-parabolique de G, $P(k)$ est son propre normalisateur dans $G(k)$.*

De cette dernière assertion, on déduit aussitôt que tout sous-groupe k-pseudo-parabolique de G est son propre normalisateur séparable. En fait, on peut même montrer que

tout sous-groupe k-pseudo-parabolique de G est son propre normalisateur schématique dans G.

Cela n'a pas été fait dans le cours.

5.2. Si l'on excepte la dernière assertion, la proposition 15 résulte de la proposition 14 par des raisonnements classiques que nous ne rappelons pas ici. L'implication « si » de la dernière assertion est évidente, compte tenu de l'assertion précédente. Pour prouver « seulement si », on suppose k infini (le cas fini étant bien connu). Soient P et P' des sous-groupes k-pseudo-paraboliques conjugués (sur $\bar{k}$). Vu la partie supposée déjà prouvée de la proposition 15, il existe un élément g de $G(k)$ tel que l'intersection ${}^gP(k) \cap P'(k)$ soit le groupe $P''(k)$ des points rationnels d'un sous-groupe k-pseudo-parabolique P''.

Les images canoniques de ${}^gP$ et P' dans $G/R_u(G)$ sont des sous-groupes paraboliques conjugués contenant un même sous-groupe parabolique, à savoir l'image de P''. On en déduit facilement que ${}^gP = P'$, d'où ${}^gP(k) = P'(k)$.

5.3. La preuve de la proposition 14 est longue et nous nous bornerons ici à en indiquer les principales articulations.

(a) Des trois parties de l'énoncé, seule (iii) mérite que nous nous y arrêtions ; les autres sont de simples exercices.

(b) Il est commode de prouver (iii) sous la forme un rien plus forte que voici :

($*$) si $a \in \tilde{\Phi}$ et $u \in U_a(k) - \{1\}$, il existe des éléments u' et u'' de U_{-a} tels que $m(u) = u'uu''$ normalise S et induise sur $X^*(S)$ la réflexion r_a.

(Il est bien connu que l'assertion d'unicité de u' et u'' est conséquence des autres axiomes des données radicielles). Rappelons que, par hypothèse, $R_{ud}(G) = \{1\}$.

(c) *Il suffit de prouver* ($*$) *lorsque* $\dim S = 1$.

Cela résulte facilement du fait que si $a \in \tilde{\Phi}$ et si H désigne le groupe $G_{a\cup(-a)}$, alors la composante neutre $(H \cap S)^{\circ}$ de $H \cap S$ n'est pas contenue dans le noyau des caractères constituant a. Pour prouver ce fait, il suffit d'exhiber un cocaractère de $(H \cap S)^{\circ}$ sur lequel les éléments de a ne s'annulent pas. On l'obtient en considérant une somme d'orbite bien choisie de $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ dans l'ensemble des coracines de $H/R_u(H)$.

(d) *Supposons* $\dim S = 1$. *Alors* $N(S)/Z(S)$ *et* $N(S)(k)/Z(S)(k)$ *sont d'ordre* 2 *et* S *est contenu dans exactement deux sous-groupes* k*-pseudo-paraboliques minimaux, lesquels sont permutés par la conjugaison par tout élément de* $N(S)(k) - Z(S)(k)$.

La première assertion est contenue dans la proposition 12 (n° 4.1). Soit λ une forme linéaire réelle non nulle sur $X^*(S)$; vu 3.2, $P(S,\lambda)$ et $P(S,-\lambda)$ sont les deux seuls sous-groupes k-pseudo-parabolique de G contenant S, et 4.1 implique que tout élément de $N(S)(k) - Z(S)(k)$ les permute.

(e) *Preuve de* ($*$) *pour* k *séparablement clos et* $\dim S = 1$.

Posons $P = Z(S) \,.\, U_a$, $U' = U_{-a}$ et $R = R_u(G)$. Le produit PU' est un ouvert de G stable par multiplication à droite par R ; en effet, on a $R = (R \cap P)\,(R \cap U')$, d'où $PU'R = PRU' = PU'$. Soit u comme dans l'assertion ($*$) et soit n un élément de $N(S)(k) - Z(S)(k)$. L'image canonique de u dans G/R n'est pas l'élément neutre, sinon le plus petit sous-groupe de G contenant u et normalisé par S serait contenu dans $U_a \cap R$, donc dans $R_{ud}(G)$, vu le lemme du n° 2.5. Le $\bar{k}$-groupe $G/R_u(G)$ est de type SL_2 ou PGL_2 ; il s'ensuit que l'image canonique de l'ouvert $unPU'$ de G dans

$G/R_u(G)$, donc l'ouvert lui-même, contient l'élément neutre. Comme l'application produit $P \times U' \to G$ est une k-immersion, il en est de même de l'application produit $unP \times U' \to G$. Il existe donc des éléments $p \in P(k) = Z(S)(k) \, . \, U_a(k)$ et $u_1 \in U'(k)$ tels que $unpu_1 = 1$. L'assertion $(*)$ s'ensuit.

(f) Une fois $(*)$ démontré pour k séparablement clos, on en déduit facilement les propositions 14 et 15 sous la même hypothèse. Disposant ainsi d'une donnée radicielle algébrique sur k_s, on peut alors copier des raisonnements classiques pour les groupes réductifs et les sous-groupes paraboliques, et d'où découlent les assertions suivantes (qu'il suffit d'établir sur k_s car elles se conservent par descente galoisienne) :

L'intersection de deux sous-groupes k-pseudo-paraboliques P et P' est un k-groupe et tout k-tore maximal de $P \cap P'$ intersecte le radical déployé de P suivant un k-tore maximal de celui-ci.

(g) Supposons à nouveau $\dim S = 1$ et soient P et P' deux sous-groupes k-pseudo-paraboliques *minimaux* distincts. D'après ce que l'on vient de voir, tout k-tore maximal de $P \cap P'$ contient un k-tore déployé non trivial, appelons-le S', qui est nécessairement de dimension 1. Vu (d), les groupes P et P' ne sont autres que les deux sous-groupes k-pseudo-paraboliques contenant S'. On a ainsi établi une bijection canonique entre les paires de sous-groupes k-pseudo-paraboliques minimaux distincts et les k-tores déployés maximaux de G. Ceux-ci étant conjugués, on en déduit, compte tenu aussi de (d), que l'action du groupe $G(k)$ par conjugaison sur l'ensemble des sous-groupes k-pseudo-paraboliques minimaux est doublement transitive. L'assertion $(*)$ s'ensuit par un argument facile et standard.

II. Remarques sur la classification

La classification des groupes algébriques connexes sur un corps k arbitraire n'est pas un objectif raisonnable. Il y a à cela au moins deux raisons, illustrées par les observations suivantes :

— la classification des groupes unipotents connexes inclut, comme cas très particulier, celle, déjà inabordable, des algèbres de Lie complexes nipotentes ;

— la classification des groupes orthogonaux est presque équivalente à celle des formes quadratiques.

On écarte au moins ces deux écueils en s'intéressant plus modestement à la classification des k-groupes *presque pseudo-simples* (c'est-à-dire sans k-sous-groupe propre distingué infini) sur un corps *séparablement clos.* Il est vrai que, même circonscrit de la sorte, le problème comporte un préalable peu réaliste, à savoir, la détermination de toutes les extensions algébriques finies de k ; en effet, si K est une telle extension, le groupe $R_{K/k}\mathrm{SL}_2$ possède les propriétés requises et l'extension K en est un invariant. Mais on peut ignorer la difficulté en convenant d'admettre un tel invariant comme élément de classification.

Soient k et G comme ci-dessus, S un k-tore maximal de G, $X = X^*(S)$ son groupe de caractères, $Z = Z(S)$ son centralisateur, $\Phi = \Phi(S,G) \subset X$ le système de racines de G par rapport à S et K *le* corps de définition de $R_{\mathrm{u}}(G)$ (comme k est séparablement clos, cela a un sens non ambigu). Le couple (X,Φ) (appelé parfois « donnée radicielle » dans la littérature, mais non ici bien entendu) et l'extension K de k sont des invariants de G et le problème que nous allons envisager est la classification des groupes G d'invariants donnés. Pour simplifier, nous supposerons le système de racines Φ réduit, mais la méthode que nous allons esquisser peut s'adapter, *mutatis mutandis,* au cas non réduit.

Le quotient $G_1 = G/R_{\mathrm{u}}(G)$ est un K-groupe presque simple. Soit S_1 l'image canonique de S dans G_1. Nous identifions le système de racines $\Phi(S_1,G_1)$ à Φ par l'isomorphisme évident. Pour $a \in \Phi$, nous posons $U_a = G_a$, comme en 5.1, et $U_{1,a} = G_{1,a}$. Comme $G(k)$ a une intersection triviale avec $R_{\mathrm{u}}(G)$, la projection canonique de G sur G_1 induit des monomorphismes des groupes $U_a(k)$, $Z(k)$ et $G(k)$ dans les groupes $U_{1,a}(K)$, $S_1(K)$ et $G_1(K)$, ce qui nous permet d'identifier les premiers à des sous-groupes des seconds. (Vu les propriétés universelles du foncteur de restriction des scalaires, on a même des k-homomorphismes de U_a, Z et G dans $R_{K/k}U_{1,a}$, $R_{K/k}S_1$ et $R_{K/k}G_1$ mais ce ne sont pas nécessairement des monomorphismes au sens de la théorie des groupes algébriques). Comme k est séparablement clos, la k-structure d'un k-groupe est « portée » par le groupe abstrait de ses points rationnels (par exemple comme algèbre de fonctions sur ce groupe). Les k-structures portées par les $U_a(k)$ et $Z(k)$ déterminent celle portée par $G(k)$: celle-ci s'obtient en recollant des translatées de la « grande cellule », elle-même produit direct des U_a et de Z dans un ordre approprié.

On voit donc le schéma du processus de classification : les invariants (X,Φ) et K déterminent à isomorphisme près le système formé du K-groupe G_1 et de ses sous-groupes $U_{1,a}$ et S_1, et les groupes G que l'on veut classer sont caractérisés par la donnée de sous-groupes abstraits $U_a(k)$ et $Z(k)$ de $U_{1,a}(K)$ et $S_1(K)$ et de k-structures portées par ces sous-groupes. Il faut préciser à quelles conditions un tel système de sous-groupes et de k-structures fournit effectivement un k-groupe G tel que K soit le corps de définition de $R_{\mathrm{u}}(G)$ et que l'homomorphisme de $G(k)$ dans $G_1(K)$ découlant de la construction induise un K-isomorphisme de $G/R_{\mathrm{u}}(G)$ sur G_1. Dans le cours, on a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi : ce sont à peu de chose près les conditions SDA du résumé de cours de 1991-1992 et nous ne les reproduirons pas ici. Il faut aussi déterminer dans quel cas deux systèmes de données (sous-groupes et k-structures) fournissent des groupes G k-isomorphes, mais ceci ne pose pas de gros problème. En revanche, pour pouvoir parler d'une vraie classification, il faut pouvoir, à partir de conditions de type axiomatique, donner une description aussi « concrète » que possible des systèmes de données admissibles. A ce stade, il est nécessaire de faire des distinctions de cas, la forme de l'énoncé final dépendant beaucoup du système de racines Φ et de la caractéristique du corps k (comme le laissent d'ailleurs prévoir les exemples donnés dans le cours de l'an passé). Le résultat final s'énonce très simplement dans trois cas :

si $\Phi = E_8$, *ou si* $\Phi = F_4$ *et car* $k \neq 2$, *ou si* $\Phi = G_2$ *et car* $k \neq 3$, *on a* $G = R_{K/k}G_1$.

Tous les autres cas conduisant à des énoncés plus compliqués, qui n'ont pas été donnés dans le cours ; notons seulement que ce sont, le plus souvent, $Z(k)$ et sa k-structure qui créent des difficultés, l'énumération des systèmes de sous-groupes $(U_a(k))$ avec leurs k-structures s'obtenant en général assez aisément.

III. Bons et mauvais éléments unipotents

Dans cette dernière partie du résumé, G désigne un k-groupe absolument presque simple. Ceci n'est d'ailleurs qu'une hypothèse de commodité : les problèmes étudiés gardent un sens pour un groupe algébrique G quelconque, mais la généralité ainsi accrue a peu d'intérêt et complique inutilement la question.

Un élément unipotent de $G(k)$ est dit *bon* sur k s'il est contenu dans un k-sous-groupe unipotent déployé et *mauvais* dans le cas contraire. Ces propriétés sont préservées par une extension séparable du corps de base : un élément unipotent est bon sur k si et seulement s'il est bon sur k_s (voir le n° 3.6 de l'article cité plus haut, au n° 3.8). Il s'ensuit que sur un corps parfait, tout élément unipotent est bon. On voit aussi que lorsque l'on s'intéresse aux conditions d'existence de mauvais éléments unipotents, le cas d'un corps de base séparablement clos est crucial. Ici, nous supposerons seulement G déployé.

Les exemples les plus simples de mauvais éléments unipotents sont liés à l'existence d'un revêtement inséparable de G. De façon précise, on montre sans difficulté que si G est l'image d'un k-groupe connexe par une isogénie centrale de degré p égal à la caractéristique du corps de base k, auquel cas on sait que l'isogénie est purement radicielle, et si k est imparfait, alors le groupe $G(k)$ possède de mauvais éléments unipotents (c'est une variante de la proposition 5.2 de *Unipotent elements ... II, in « Algebraic Groups Utrecht 1986 », Springer Lecture Notes in Math.*, **1271** (1987), 265-284).

Le résultat précédent suggère de s'intéresser au cas d'un groupe G simplement connexe. Dans *loc. cit.*, n° 2.6, il est montré que, pour G simplement connexe, tous les éléments unipotents de $G(k)$ sont bons sauf peut-être si la caractéristique du corps de base est un nombre premier de torsion pour G (on appelle ainsi les facteurs premiers des coefficients de l'expression de la racine courte dominante comme combinaison linéaire de « racines simples », à savoir, les nombres 2 si G n'est pas de type A ou C, 3 s'il est de type E ou F, et 5 s'il est de type E_8). Le principal résultat de la dernière partie du cours a été la preuve d'une réciproque partielle de l'assertion précédente : *si p est un nombre premier de torsion pour un type X de groupe algébrique simple, il existe un corps k de caractéristique p tel que le k-groupe simplement connexe de type X possède (sur k) un mauvais élément unipotent.* Des précisions obtenues après la fin du cours rendent plausible la conjecture suivante :

CONJECTURE. — *Supposons G simplement connexe. Alors, G possède de mauvais éléments unipotents si et seulement si la caractéristique p du corps de base k est un nombre premier de torsion pour G et $[k : k^p] \geq p^2$.*

Cette conjecture a été vérifiée pour $p = 2$, et « si » est prouvé dans tous les cas. La question fera l'objet d'un séminaire l'an prochain.

J.T.

MISSIONS

Exposés

— *Arbres jumelés,* Journée de Rham, Lausanne, octobre 1992 ; Nancy, janvier 1993 ; même titre en anglais, Weizmann Institute of Science, Rehovot, mai 1993.

— *Zerfällungskörper einfacher algebraischer Gruppen,* Colloque en l'honneur de F. Hirzebruch, Bonn, février 1993.

— *Mauvais éléments unipotents et nombres premiers de torsion des groupes algébriques simples,* Colloque : « Groupes réductifs et représentations », Amiens-Paris, mars 1993 ; même titre en anglais, Groupe de contact du F.N.R.S., Louvain-la-Neuve, juin 1993.

— *Automorphism groups of trees,* Bar Ilan University, Ramat Gan, mai 1993.

— *Applications of buildings to structure problems in the theory of algebraic simple groups,* « Jerusalem Combinatorics '93 », Hebrew University, Jerusalem, mai 1993.

— *Anisotropic unipotent elements and the geometry of buildings,* deux exposés à la conférence : « Groups of Lie type and their geometries », Como, juin 1993.

PUBLICATIONS

J. TITS, *Twin buildings and groups of Kac-Moody type* (*in :* « Groups, Combinatorics and Geometry », Durham, 1990, *London Math. Soc., Lecture Notes Series,* **165** (1992), 249-286).

— , *Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples* (*C.R. Acad. Sci. Paris,* **315** (1992), 1131-1138).

DISTINCTIONS

Prix Wolf de Mathématique 1993.

Honorary Member de la London Mathematical Society 1993.