Théorie des groupes

M. Jacques Tits, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de cette année avait pour titre : *Groupes algébriques simples de rang 2 et algèbres de Clifford de petites dimensions* (cependant la partie concernant les algèbres de Clifford n'a pu être développée, faute de temps ; elle le sera en 1994-1995). On avait en vue le problème, déjà abordé dans le cours de l'année 1977-1978 et dont l'étude sera poursuivie l'an prochain, de la *classification des polygones de Moufang*. Rappelons en quoi il consiste.

1. Polygones de Moufang

Soit n un entier au moins égal à 3. Un *n-gone généralisé* (ou simplement un *n-gone*) est un graphe de diamètre n et de circonférence $2n$. Précisons la signification des mots employés : tous les graphes dont il est question dans ce résumé sont non orientés, sans boucles ni doubles liens ; un *chemin de longueur l* dans un graphe Δ est une suite $(s_0, ..., s_l)$ de $l + 1$ sommets de Δ telle que, pour $0 < i \leqslant l$, $\{s_i, s_{i+1}\}$ soit une arête de Δ, et que $s_{i-1} \neq s_{i+1}$ si, de plus, $i \neq l$; la *circonférence* (en anglais, *girth*) de Δ est le minimum de la longueur d'un chemin fermé.

Les notations et conventions suivantes seront aussi utilisées dans tout le résumé. L'*étoile* d'un sommet x d'un graphe est l'ensemble, noté $E(x)$, des arêtes issues de ce sommet. Si $\{x,y\}$ est une arête d'un graphe, nous désignons par $E(x\backslash y)$ l'étoile $E(x)$ privée de l'arête en question. Nous ne considérons jamais que des n-gones *épais,* c'est-à-dire dans lesquels l'étoile de tout sommet est de cardinal au moins 3. Le « groupe des commutateurs » de deux sous-groupes X et Y d'un groupe, c'est-à-dire le sous-groupe engendré par les commutateurs $xyx^{-1}y^{-1}$, pour $x \in X$, $y \in Y$, sera, comme d'habitude, noté $[X, Y]$.

Soit Δ un n-gone. Pour tout chemin $\Gamma = (s_0, ..., s_n)$ de longueur n, notons $U(\Gamma)$ (resp. $U^*(\Gamma)$) le groupe des automorphismes de Δ fixant les étoiles des sommets $s_1,\dots,s_{n-1}$ (resp. le groupe des automorphismes fixant Γ et les étoiles de s_1 et s_2). On montre que

(L) quel que soit le chemin de $\Gamma = (s_0, \dots, s_n)$ de longueur n, le groupe $U^*(\Gamma)$ (donc aussi $U(\Gamma)$) opère librement sur $E(s_0 \backslash s_1)$.

Le n-gone Δ est dit *de Moufang* si

(T) pour Γ comme ci-dessus, $U(\Gamma)$ opère transitivement sur $E(s_0 \backslash s_1)$.

Vu (L), cela implique que $U^*(\Gamma) = U(\Gamma)$.

Soit maintenant $(e_z)_{z\in\mathbf{Z}}$, avec $e_z = e_{z+2n}$, un chemin fermé de longueur $2n$ dans Δ et, pour tout z, posons $U_z = U(e_z, \dots, e_{z+n})$. Pour $i \leqslant j$, notons $U_{[i,j]}$ le groupe engendré par U_i, U_{i+1}, ..., U_j. Lorsque Δ est un n-gone de Moufang, les sous-groupes U_z de Aut Δ possèdent les propriétés suivantes :

(PM_n1) si $i < j < i + n$, le groupe des commutateurs $[U_i,U_j]$ est contenu dans $U_{[i+1,j-1]}$ ($= \{1\}$ si $j = i + 1$) ;

(PM_n2) si $u \in U_i - \{1\}$, il existe un élément m de $U_{i+n}.u.U_{i+n}$ qui conjugue U_j sur U_{n+2i-j} pour tout j ;

(PM_n3) l'application produit de $U_1 \times \dots \times U_n$ dans $U_{[1,n]}$ est bijective.

Inversement, si G est un groupe et si U_z *($z\in\mathbf{Z}$) sont des sous-groupes de* G engendrant G, tels que $U_z = U_{z+2n}$ pour tout z et que les axiomes (PM_n1) à (PM_n3) soient satisfaits, alors il existe un n-gone de Moufang Δ, un chemin fermé (e_z) de longueur $2n$ dans Δ et un homomorphisme de G dans Aut Δ appliquant les U_z isomorphiquement sur les sous-groupes de même nom de Aut Δ définis plus haut. De plus, Δ et les e_z sont uniques à isomorphisme unique près.

Pour plus de détails sur ces préliminaires et la preuve des assertions qui précèdent, je renvoie au Résumé du cours de l'année 1977-1978 et à [1] et [3] (les nombres entre crochets renvoient à la liste de références, à la fin du présent résumé).

Dans les axiomes (PM_n1) à (PM_n3), on reconnaît des propriétés bien connues des sous-groupes radiciels de groupes algébriques simples de rang relatif 2. A tout tel groupe est donc naturellement associé un n-gone de Moufang. Cela est aussi vrai pour les groupes classiques de rang 2 (sur des corps non commutatifs quelconques) et pour les groupes de Ree de type ${}^2\mathrm{F}_4$; pour la commodité de l'exposé, nous assimilerons ces groupes à des groupes algébriques. Le but final de l'étude poursuivie est de montrer qu'il y a *grosso modo* équivalence entre la notion géométrique de polygone généralisé de Moufang, traduite algébriquement par les axiomes (PM_n1) à (PM_n3), et celle de groupe algébrique, ou assimilé, de rang 2. Un énoncé précis est donné, sous-forme de conjecture, dans [1], 3.3. L'état actuel de la littérature sur cette question est rappelé dans l'introduction de [5]. Les cas $n = 3$ et $n = 8$ de la conjecture ont été traités dans le cours de l'année 1977-1978.

2. Un théorème de R. Weiss

2.1. Pour que la conjecture dont il vient d'être question ait des chances d'être vraie, il faut avant tout qu'un n-gone de Moufang ne puisse exister que pour $n = 3$, 4, 6 ou 8. Il en est bien ainsi, comme cela a été montré dans [2] (voir aussi le résumé du cours de 1977-1978 déjà mentionné). Peu après l'annonce de ce résultat, R. Weiss [6] a donné une démonstration simple et élégante d'un théorème plus général dont l'exposé a fait l'objet de la première partie du cours de cette année. Voici ce dont il s'agit.

Considérons un arbre épais $\tilde{\Delta}$, un groupe d'automorphismes G de $\tilde{\Delta}$ et un entier $n \geq 3$. Pour tout chemin $\Gamma = (s_0, \ldots, s_n)$ de longueur n dans $\tilde{\Delta}$, définissons les groupes $U(\Gamma)$ et $U^*(\Gamma)$ de la même façon qu'au § 1 mais en y remplaçant Aut Δ par G ; ainsi, $U(\Gamma)$ sera désormais le groupe *des éléments de* G fixant les étoiles de $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$. Le théorème annoncé est alors le suivant :

Théorème (Weiss [6]). — *Si G possède les propriétés (L) et (T) du § 1, on a $n = 3$, 4, 6 ou 8.*

Ici encore, (L) et (T) impliquent l'égalité de $U(\Gamma)$ et $U^*(\Gamma)$. Pour déduire du théorème précédent l'assertion sur les n-gones de Moufang, rappelée au début du paragraphe, il suffit de prendre pour $\tilde{\Delta}$ « le » revêtement universel d'un n-gone de Moufang Δ et pour G l'image réciproque de Aut Δ dans Aut $\tilde{\Delta}$.

La démonstration du théorème donnée dans le cours a suivi en gros celle de R. Weiss, mais avec quelques différences de présentation. Dans le résumé qui suit, j'insisterai plus particulièrement sur les points où la démonstration du cours m'a parue un peu plus simple ou plus conceptuelle que celle de [6].

Dans toute la suite du § 2, $\tilde{\Delta}$ désigne un arbre épais et G un groupe d'automorphismes de cet arbre satisfaisant aux conditions (L) et (T).

2.2. Proposition 1. — *Si $\Gamma = (x, y, \ldots)$ désigne un chemin de longueur n dans $\tilde{\Delta}$, le groupe simplement transitif de permutations de $E(x\backslash y)$ induit par $U(\Gamma)$ ne dépend que de x et y, et non de la partie restante du chemin* Γ.

Ce groupe sera noté $T(x,y)$. Il est clair que l'application qui a toute arête *orientée* (x,y) associe le groupe $T(x,y)$ est invariante par G.

Remarque. — Rappelons qu'un *ensemble de Moufang* (cf. [4], 4.4) est un ensemble E structuré par la donnée d'un ensemble de permutations T autonormalisant, tel que chaque élément de T distinct de la permutation identique possède un unique point fixe dans E et que le fixateur dans T d'un point quelconque $c \in E$ soit transitif (donc simplement transitif) sur $E - \{c\}$. L'exemple classique des droites projectives (sur un corps non nécessairement commutatif) suggère de voir les éléments de T comme des « transvections » (« transvections de centre c » pour les éléments de T fixant c). Remarquons que le groupe de permutations de E engendré par T est deux fois transitif dès que Card $E \geq 3$.

Si x est un sommet de l'arbre $\tilde{\Delta}$, la réunion $T(x)$ des $T(x,y)$ pour y parcourant l'ensemble des sommets de $\tilde{\Delta}$ voisins de x, est manifestement une structure d'ensemble de Moufang dans l'étoile $E(x)$, structure invariante par le fixateur de x dans G. On voit que la donnée du groupe G a pour effet de doter les étoiles de $\tilde{\Delta}$ de structures intéressantes, assez « rigides ». Ces structures, qui ne joueront ici qu'un rôle marginal, doivent pouvoir être utiles pour la classification des couples $(\tilde{\Delta}, G)$ possédant les propriétés (L) et (T) (cf. le n° 2.10).

La proposition suivante est conséquence immédiate de la transitivité de $T(x)$ sur $E(x)$, du fait que les éléments de $T(x)$ sont induits sur $E(x)$ par des éléments de G fixant x, et de (L).

PROPOSITION 2. — (i) *Le groupe G permute transitivement les arêtes de $\tilde{\Delta}$.*

(ii) *Le fixateur dans G d'un sommet x de $\tilde{\Delta}$ permute transitivement les chemins de longueur $n + 1$ et d'origine x.*

(iii) *Deux sommets de G à distance paire l'un de l'autre appartiennent à une même orbite de G (qui en a donc au plus deux dans $\tilde{\Delta}$).*

2.3. Pour l'exposé de la preuve du théorème, il est commode d'étendre la notation $U(\Gamma)$ à des chemins $\Gamma = (s_0, \ldots, s_m)$ de longueur $m \geq 1$ quelconque, en désignant ainsi le groupe de tous les éléments g de G fixant Γ et possédant les propriétés suivantes :

(1) g fixe l'étoile de chacun des sommets $s_1, \ldots, s_{m-1}$;

(2) la permutation de $E(s_0)$ (resp. $E(s_m)$) induite par g appartient à $T(s_0)$ (resp. $T(s_m)$).

Cette dernière condition n'est pas intervenue plus haut, pour $m = n$, car elle est manifestement conséquence de (1) dès que $m \geq 3$. En revanche, elle donne tout son intérêt à la définition lorsque $m = 2$, et surtout lorsque $m = 1$ (cas où (1) est vide !).

2.4. Nous choisissons désormais dans $\tilde{\Delta}$ un « chemin doublement infini » $(\ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots)$ et nous posons, pour i, $j \in \mathbf{Z}$ et $i \leq j < n + i$, $U_i = U(e_i, \ldots, e_{n+i})$ et $U_{[i,j]} = U(e_j, \ldots, e_{n+i})$. La proposition suivante est facile à établir.

PROPOSITION 3. — (i) *Si $i \leq j < n + i$, l'application produit*

$$U_i \times \ldots \times U_j \to U_{[i,j]}$$

est une bijection.

(ii) *Si $i < j < i + n$, le groupe des commutateurs $[U_i, U_j]$ est contenu dans $U_{[i+1,\, j-1]}$ $(= \{1\}$ si $j = i + 1)$.*

On observe la similitude de ces propriétés avec (PM_n3) et (PM_n1). En revanche, il n'existe pas d'équivalent de (PM_n2) pour les groupes U_i considérés ici.

2.5. *Remarque.* — Le groupe $U_{[1-n,0]} = U(e_0, e_1)$ fixe l'arête $\{e_0, e_1\}$ et ne fixe aucune autre arête de $\tilde{\Delta}$, sinon il fixerait une seconde arête issue soit de e_0 soit de e_1, ce qui n'est pas possible car il est transitif sur chacun des deux ensembles $E(e_0 \backslash e_1)$ et $E(e_1 \backslash e_0)$. De là, il résulte que le stabilisateur B de l'arête $\{e_0, e_1\}$ dans G est le normalisateur de $U(e_0, e_1)$ dans G. Un raisonnement analogue montre que B est son propre normalisateur. En vertu de la proposition 2(i), l'ensemble des arêtes de l'arbre $\tilde{\Delta}$ s'identifie avec l'espace homogène G/B, et aussi, d'après ce que l'on vient de voir, avec l'ensemble des conjugués de $U_{[1-n,\, 0]}$ dans G. Il est immédiat que les arêtes correspondant à deux tels conjugués X, X' ont un sommet commun si et seulement si $X \cap X'$ est maximal dans l'ensemble des sous-groupes de G de la forme $X \cap (gXg^{-1})$, $g \in G$. On voit ainsi que *le couple $(G, U_{[1-n,\, 0]})$, donc aussi le système $(G\,;\, (U_z)_{z \in \mathbf{Z}})$, détermine canoniquement le couple* $(\tilde{\Delta}, G)$. En revanche, contrairement à ce qui se passe pour les n-gones généralisés, $(\tilde{\Delta}, G)$ ne détermine pas, à conjugaison près, l'ensemble de sous-groupes $\{U_i\}$; en effet, les chemins doublement infinis dans $\tilde{\Delta}$ ne sont évidemment pas tous conjugués sous l'action de G. (Par exemple, lorsque $\tilde{\Delta}$ est « le » revêtement universel d'un n-gone généralisé Δ, il y a une différence essentielle entre les chemins doublement infinis qui sont images réciproques dans $\tilde{\Delta}$ d'appartements — c'est-à-dire de chemins fermés de longueur $2n$ — de Δ et les autres).

2.6. La proposition suivante est cruciale pour la démonstration du théorème de Weiss. Comme d'habitude, le centre d'un groupe X est noté $Z(X)$.

PROPOSITION 4. — *Pour tout entier i, $Z(U_{[i+1,i+n]}) \neq \{1\}$.*

La preuve, assez différente dans la forme de celle de [6] (cf. Lemma 4), s'est faite en trois temps.

(a) *Si $2m > n$ et $u \in U_m - \{1\}$, on a $(uU_0u^{-1}) \cap U_0 = \{1\}$.*

En effet, tout élément de $(uU_0u^{-1}) \cap U_0$ fixe le chemin $(e_0, \ldots, e_m, ue_{m-1}, \ldots, ue_0)$ de longueur $2m > n$, ainsi que les étoiles de e_1 et e_2, et est donc l'identité en vertu de (L).

(b) *Il existe i,j avec* $i < j < i + n$ *tels que* $Z(U_{[i,j]}) \neq \{1\}$.

Soit m le plus grand entier strictement positif tel que, pour tout entier i, $U_{[i+1,i+m]}$ normalise U_i et U_{i+m+1}. Il existe un entier ayant cette propriété puisque U_{i+1} normalise U_i et U_{i+2}, et il en existe un plus grand en vertu de (a). Supposons, sans nuire à la généralité que $U_{[1,1+m]}$ ne normalise pas U_0. Comme U_0 est normalisé par $U_{[1,m-1]}$ ($= \{1\}$ si $m = 0$) et par $U_{[1,m]}$, il est normalisé par U_m, ce qui implique, vu (a), que $2m \leq n$, et il n'est pas normalisé par U_{m+1}. En conclusion, $U_{[1,m]}$ normalise, donc centralise, U_0 et U_{m+1}, et le commutateur de ces deux derniers groupes, qui n'est pas réduit à l'élément neutre, est central dans $U_{[0,m+1]}$.

(c) *Fin de la preuve de la proposition.*

Soit t l'entier le plus grand tel que $1 \leq t \leq n$ et qu'il existe $z \in \mathbf{Z}$ pour lequel le centre de $U_{[z+1,\, z+t]}$ ne soit pas réduit à l'élément neutre. Choisissons un entier z ayant cette propriété. Supposons $t \neq n$ et soit $s \leq t$ le plus petit entier strictement positif tel que le centre de $U_{[z+1,\, z+s]}$ possède un élément $u \neq 1$ central dans $U_{[z+1,\, z+t]}$. Le groupe U_z normalise $U_{[z+1,\, z+t]}$, donc aussi son centre. Il s'ensuit que le commutateur $[u, U_z]$ est central dans $U_{[z+1,\, z+t]}$. La minimalité de s entraîne alors que $[u, U_z] = \{1\}$, donc que u appartient au centre de $U_{[z,\, z+t]}$, en contradiction avec la maximalité de t. Cette contradiction résulte de ce que l'on a supposé $t \neq n$. Cela prouve la proposition car, en vertu de la proposition 2(i), tous les sous-groupes $U_{[i+1,\, i+n]} = U(e_{i+n},\, e_{i+n+1})$ de G sont conjugués entre eux.

2.7. Pour toute arête orientée (x,y) de $\tilde{\Delta}$ et tout entier positif r, notons $B(x\,;\,r)$ le boule de centre x et de rayon r, réunion des chemins de longueur r issus de x, $B^{\to}(x,y\,;\,r)$ la réunion de ceux de ces chemins qui sont de la forme $(x,y,\ldots)$, $F(x\,;\,r)$ (resp. $F^{\to}(x,y\,;\,r)$) le fixateur de $B(x\,;\,r)$ (resp. $B^{\to}(x,y\,;\,r)$) dans G et $Z(x,y)$ le centre de $U(x,y)$. On a

$$(*) \qquad B(x\,;\,r) = B^{\to}(x,y\,;\,r) \cup B^{\to}(y,x\,;\,r+1).$$

Soit n' le plus grand entier inférieur à $(n-1)/2$.

A partir d'ici, la preuve du théorème consiste *grosso modo* à montrer qu'il existe des valeurs « assez grandes » de r telles que le groupe $F(x\,;\,r)$ soit non trivial, et que cela contredit les axiomes sauf lorsque n est « suffisamment petit ». Dans le cours, cette partie de la démonstration a suivi [6] d'assez près, aussi, nous n'en donnerons ici qu'un compte rendu plus succinct, sous la forme de quelques lemmes dont les preuves seront seulement esquissées et qui impliquent « presque » le théorème (cf. le n° 2.9).

LEMME 1. — *Si* $r \leq n + 1$, *tout élément de* $Z(x,y)$ *fixant un chemin de longueur* r *de la forme* $(x,y,\ldots)$ *est contenu dans* $F^{\to}(x,y\,;\,r)$.

C'est clair, vu la proposition 2(ii).

LEMME 2. — *Pour toute arête orientée (x, y), $Z(x,y)$ est contenu dans $F^{\to}(x,y\ ;\ n'+1)$ et dans $F(x\ ;\ n')$.*

On suppose, sans nuire à la généralité, que $x = s_0$ et $y = s_1$. Soit g un élément de $Z(x,y)$, dont on veut montrer qu'il appartient à l'intersection des deux fixateurs de l'énoncé. Soit k la borne supérieure (éventuellement infinie) des entiers i tels que g fixe s_i. Si $k \geq n' + 1$, les inclusions à établir résultent du lemme précédent et de la relation $(*)$. Si $k < n' + 1$, on observe que le groupe $U_0 = {}^gU_0$ fixe les étoiles des points $s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, s_k = gs_k, gs_{k+1}, \ldots, gs_{n-1}$, ce qui contredit (L).

Notons qu'il n'a pas été nécessaire de montrer au préalable, comme dans [6], que g ne fixe pas tous les s_i.

LEMME 3. — *Si les groupes $Z(s_0, s_1)$ et $Z(s_{n'+1}, s_{n'+2})$ ne commutent pas entre eux, alors $n = 3$, 4 ou 6.*

On vérifie en effet que tout élément du commutateur fixe le chemin $(s_{1-n'}, s_{2-n'}, \ldots, s_{2n'+1})$ ainsi que les étoiles de $s_{2-n'}$ et $s_{3-n'}$; compte tenu de l'axiome (L), on en déduit que si le commutateur en question n'est pas trivial, on doit avoir $3n' \leq n + 1$, ce qui entraîne l'énoncé.

LEMME 4. — *Si les groupes $Z(s_0, s_1)$ et $Z(s_{n'+1}, s_{n'+2})$ commutent entre eux, alors $Z(s_0, s_1)$ est contenu dans $F^{\to}(s_0, s_1\ ;\ n'+2)$ (donc aussi dans $F(s_1\ ;\ n'+1)$), ou bien $Z(s_{n'+1}, s_{n'+2})$ est contenu dans $F^{\to}(s_{n'+2}, s_{n'+1}\ ;\ n'+2)$ (donc aussi dans $F(s_{n'+2}\ ;\ n'+1)$).*

Cela résulte du lemme 1. En effet, supposons que les deux groupes en question commutent. Si $Z(s_0, s_1)$ fixe $s_{n'+2}$, il fixe le chemin $(s_0, \ldots, s_{n'+2})$, tandis que s'il existe un élément g de $Z(s_0, s_1)$ ne fixant pas $s_{n'+2}$, alors $Z(s_0, s_1)$ fixe le chemin $(s_{n'+2}, s_{n'+1} = gs_{n'+1}, gs_{n'+2}, \ldots, gs_{2n'+2})$. (Les deux assertions entre parenthèses résultent aussitôt des deux autres, compte tenu de la deuxième partie du lemme 2).

Preuve du théorème pour n impair. — Si n est impair, on a $2(n'+1) = n + 1$ et, vu (L), $F^{\to}(x,y\ ;\ n'+2)$ est réduit à l'élément neutre pour toute arête orientée (x,y). Mais alors, les lemmes 3 et 4 impliquent qu'ou bien $n = 3$, comme l'affirme le théorème, ou bien il existe une arête (x,y) telle que $Z(x,y) = \{1\}$, ce que contredit la proposition 4.

2.8. Désormais, nous faisons l'hypothèse que n est pair, donc égal à $2(n'+1)$, et ≥ 8. Quitte à réindexer les s_i, nous supposons aussi, sans nuire à la généralité vu les lemmes 3 et 4, que $Z(s_0, s_1)$ est contenu dans $F(s_0\ ;\ n'+1)$. La proposition 2(iii) implique alors que $F(s_m\ ;\ n'+1)$ est non trivial pour tout m pair.

LEMME 5. — *Soient m un entier pair ≥ 2 et x un sommet de $\tilde{\Delta}$.*

(i) Un élément non trivial de $F(x\,;\,n'+1)$ ne peut fixer un sommet de $\tilde{\Delta}$ à distance $n'+2$ de x.

(ii) Si $m \leq (2n-1)/3$, on a $[F(s_0\,;\,n'+1),\ F(s_m\,;\,n'+1)] = \{1\}$.

(iii) Si $[F(s_0\,;\,n'+1),\ F(s_m\,;\,n'+1)] = \{1\}$, on a $m \leq n'+1$.

Les trois assertions sont conséquences faciles de (L). Prouvons par exemple la dernière. Soit g un élément non trivial de $F(s_m\,;\,n'+1)$. Par hypothèse, il commute avec $F(s_0\,;\,n'+1)$ et, vu (i), il ne fixe pas $s_{m-n'-2}$. Cela étant, $F(s_0\,;\,n'+1)$ fixe le chemin $(s_{-n'-1}, s_{-n'}, \ldots, s_{m-n'-1} = gs_{m-n'-1}, gs_{m-n'-2}, \ldots, gs_{-n'-1})$, de longueur $2m$, ainsi que les étoiles de tous les sommets de ce chemin à l'exception des extrémités. Vu (L), cela implique que $2m < n+1$, d'où (iii).

Preuve du théorème pour n pair $\neq 12$. — Les assertions (ii) et (iii) du lemme 5 montrent que l'intervalle $[n'+2, (2n-1)/3]$ ne peut contenir aucun entier pair. Par un calcul élémentaire, on en déduit que $n = 8$ ou 12.

2.9. *Le cas $n = 12$.*

Lorsque $n = 12$, aussi bien la preuve du théorème de Weiss (cf. [6], Lemma 6) que celle de la non-existence de n-gones de Moufang épais (cf. [2], I, fin de la preuve du lemme 5) présente des difficultés spécifiques. N'ayant pas de simplification à proposer concernant ce cas, on ne l'a pas traité dans le cours.

2.10. On a vu au n° 2.1 le lien existant entre le théorème de Weiss et la non-existence de n-gones généralisés (épais) pour $n \neq 3, 4, 6, 8$. Il est naturel de se demander si, étant donné un système $(\tilde{\Delta}, G)$ possédant les propriétés (L) et (T), on peut toujours identifier $\tilde{\Delta}$ « au » revêtement universel d'un n-gone généralisé Δ de telle façon que G soit l'image réciproque dans Aut$\tilde{\Delta}$ d'un groupe d'automorphismes de Δ (nécessairement intermédiaire entre AutΔ et le groupe engendré par les U_i du § 1). Une réponse affirmative à cette question, qui avait été évoquée dans le cours, vient d'être donnée par R. Weiss pour $n = 3$ et pour $n = 6$.

3. DONNÉES RADICIELLES

Dans un plan vectoriel réel doté d'un produit scalaire défini positif, soient α_i, $i \in \mathbf{Z}$, $\alpha_i = \alpha_{i+2n}$, $2n$ demi-droites « ouvertes » (ensembles de la forme $\mathbf{R}_+^* \,.\, x$) indexées par $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et telles que, pour $i, j \in \mathbf{Z}$, α_i et α_{i+j} forment un angle de $j\pi/n$. Désignons par $\tilde{\Phi}$ l'ensemble des demi-droites α_i et réindexons l'ensemble des groupes U_i du § 1 par $\tilde{\Phi}$ en posant $U_i = U_{\alpha_i}$. L'axiome (PM$_n$1) peut alors s'exprimer ainsi :

(PM_n1') Pour $\alpha,\beta\in\tilde{\Phi}$ tels que $\beta\notin\{\alpha, -\alpha\}$, le groupe des commutateurs $[U_\alpha, U_\beta]$ est contenu dans le groupe engendré par les U_γ pour $\gamma\subset\alpha + \beta$.

Dans l'étude des groupes algébriques simples de rang relatif 2, on a affaire à une situation *a priori* plus particulière que celle décrite par les axiomes (PM_n1) à (PM_n3), à savoir une *donnée radicielle* constituée par des groupes U_a indexés par les éléments a d'un système de racines Φ. Dans le cas en question, Φ est un système indécomposable de rang 2, donc de type A_2, B_2, BC_2 ou G_2. La différence principale avec la situation précédente est que l'axiome (PM_n1') est remplacé par :

(PM_n1'') Si $a,b\in\Phi$ sont tels que $b\notin -\mathbf{R}_+^*a$, alors le groupe des commutateurs $[U_a, U_b]$ est contenu dans le groupe engendré par les U_c pour $c\in\mathbf{N}^*.a + \mathbf{N}^*.b$ (où l'on pose $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$).

La deuxième partie du cours a eu pour but de montrer qu'en fait, *la situation caractérisée par les axiomes (PM_n1) à (PM_n3) n'est pas plus générale que celle décrite par une donnée radicielle,* du moins lorsque $n \neq 8$ (pour inclure le cas $n = 8$, on doit étendre de façon appropriée la notion de système de racines et, dans l'énoncé de l'axiome (PM_n1''), remplacer $\mathbf{N}^*$ par l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbf{N} + \mathbf{N}.\sqrt{2}$: cf. [3], 1.7.1).

Les trois propositions suivantes, qui précisent l'assertion ci-dessus, ont été établies dans le cours. Lorsqu'il est dit, dans les énoncés de ces propositions, qu'une certaine famille de sous-groupes (contenus dans les U_i du § 1) forme une donnée radicielle de type donné, cela signifie qu'il existe un système de racines Φ du type en question, supporté par $\tilde{\Phi}$ (c'est-à-dire tel que les éléments de $\tilde{\Phi}$ soient les demi-droites de la forme $\mathbf{R}_+^*.a$, où a parcourt Φ), et une indexation de la famille de sous-groupes par Φ qui en fait une donnée radicielle. Les notations n et U_i sont celles du § 1, et N désigne le groupe engendré par les éléments m de la condition (PM_n2). Dans tous les cas, il est clair que le système de racines Φ est unique à homothétie près.

PROPOSITION 5. — *Si $n = 3$ les U_i forment une donnée radicielle de type* A_2.

PROPOSITION 6. — *Supposons $n = 4$. Il existe un entier r tel que U_r soit commutatif. Supposons, sans nuire à la généralité, que U_0 ait cette propriété. Soit T^o l'intersection des normalisateurs de tous les U_i. Le groupe Y intersection de U_1 avec le centre de $U_{[-1,3]}$ contient le groupe des commutateurs $V = [U_0, U_2]$. Les groupes V et Y sont (évidemment) normalisés par T^o ; choisissons arbitrairement un sous-groupe $U_{1'}$ de Y contenant V et normalisé par T^o. Pour tout entier j, notons $U_{(2j+1)'}$ le conjugué de $U_{1'}$ par n'importe quel élément de N conjuguant U_1 sur U_{2j+1}. Alors :*

— *si $U_{1'} = \{1\}$ (resp. $= U_1$), les U_i forment une donnée radicielle de type* B_2 *(resp.* C_2*), les U_{2j} correspondant aux racines longues (resp. courtes) ;*

— si $U_{1'}$ est distinct de $\{1\}$ et de U_1, les U_i et les $U_{(2j+1)'}$, pris ensemble, forment une donnée radicielle de type BC_2, *les derniers correspondant aux racines divisibles (et les U_{2j+1} aux racines mutipliables).*

Remarque. — Comme il n'y a pas de différence entre les systèmes de racines de type B_2 et de type C_2, la distinction faite dans l'énoncé précédent entre ces deux types n'a pas de réelle signification. Elle se justifie cependant lorsque l'on voit cet énoncé comme un cas particulier d'un résultat plus général concernant des systèmes de rang supérieur (de types B_l et C_l) : cf. [5], p. 462.

PROPOSITION 7. — *Supposons $n = 6$. Il existe des entiers j tels que le centralisateur de $U_{j-2} \cup U_{j+2}$ dans U_j ne soit pas réduit à l'élément neutre. Supposons, sans nuire à la généralité, que $j = 0$ ait cette propriété. Alors, les U_i forment une donnée radicielle de type* G_2 *pour laquelle les U_i, i pair, sont indexés par les racines longues.*

Les démonstrations des ces trois propositions ayant été publiées entre-temps (cf. [6]), nous n'en reparlerons plus ici.

RÉFÉRENCES

[1] J. TITS, *Classification of buildings of spherical types and Moufang polygons : a survey* (*in : Teorie Combinatorie, Proc. Intern. Coll., Rome 1973,* vol. 1, 229-246, Accad. Naz. Lincei, 1976).

[2] —, *Non existence de certains polygones généralisés* (I. *Invent. Math.* 36 (1976), 275-284 ; II. *ibid.* 51 (1979), 267-269).

[3] —, *Moufang octagons and the Ree groups of type $^2F_4$* (*Amer. J. Math.* 105 (1983), 539-594).

[4] —, *Twin buildings and groups of Kac-Moody type* (*in : Groups, Combinatorics and Geometry, Durham 1990,* London Math. Soc. Lecture Note Series n° 165, 1992, 249-286).

[5] —, *Moufang polygons, I. Root data* (*Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin,* 3 (1994), 455-468).

[6] R. WEISS, *The nonexistence of certain Moufang polygons* (*Invent. Math.* 51 (1979), 261-266).

SÉMINAIRE

Soient k un corps et G un k-groupe absolument presque simple. Rappelons (voir le cours de l'an dernier) qu'un élément unipotent de $G(k)$ est dit *bon* (relativement à k) s'il est contenu dans le radical unipotent d'un k-sous-groupe parabolique et *mauvais* dans le cas contraire. L'existence dans $G(k)$ de mauvais éléments unipotents est un phénomène rare et l'on souhaite savoir quand il se produit. L'article *Unipotent elements and parabolic subgroups of reductive groups II* (*in Algebraic groups Utrecht 1986, Springer Lecture Notes in Math.*, 1271 (1987), 265-284) donnait l'état de la question au moment où il a été écrit. Le séminaire de cette année a été consacré à l'exposé de progrès récents que nous allons résumer.

Commençons par rappeler quelques faits dont les preuves peuvent être trouvées soit dans l'article cité plus haut soit dans les références qui y sont données.

(1) *Un mauvais élément unipotent reste mauvais après extension séparable du corps de base.*

Il s'ensuit aussitôt que

(2) *Sur un corps parfait, tout élément unipotent est bon.*

Comme tout k-groupe réductif se déploie sur une extension séparable de k, (1) montre que le cas des groupes déployés est crucial pour la question qui nous intéresse. *Nous supposerons désormais que G est déployé.*

(3) *Soit $\pi : \tilde{G} \to G$ un revêtement universel (central) de G. Les mauvais éléments unipotents de $G(k)$ sont, d'une part, les images par π des mauvais éléments unipotents de $\tilde{G}(k)$, et d'autre part, les éléments unipotents de $G(k)$ non contenus dans $\pi(\tilde{G}(k))$; il existe des éléments de ce deuxième type si et seulement si k est non parfait et si sa caractéristique divise le degré de π.*

On voit que (pour G déployé), l'énoncé précédent ramène la question de l'existence de mauvais éléments unipotents au cas où G est simplement connexe, ce que nous supposons dorénavant. Soit X (= A_n, B_n, ..., E_7, ou E_8) le type de G.

(4) *Tout élément unipotent de G est bon dans les cas suivants :*

la caractéristique p de k n'est pas un nombre premier de torsion de X ;

$p = 2$ et $[k : k^2] = 2$.

Rappelons qu'un nombre premier p est de torsion pour X si et seulement si :

$p = 2$ et $X \neq \mathrm{A}_n, \mathrm{C}_n,$

$p = 3$ et $X = \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7,$ ou E_8

ou

$p = 5$ et $X = \mathrm{E}_8$.

Le résultat principal du séminaire a été la proposition suivante :

PROPOSITION S1. — *Rappelons que G est déployé et simplement connexe. Si la caractéristique p du corps k est de torsion pour X et si $[k : k^p] \geq p^2$, alors $G(k)$ possède de mauvais éléments unipotents.*

Les énoncés (2) et (4) et d'autres résultats partiels dont nous ne parlerons pas ici donnent de la vraisemblance à la conjecture suivante :

CONJECTURE. — *La condition suffisante d'existence de mauvais éléments unipotents dans $G(k)$ fournie par la proposition S1 est aussi nécessaire.*

Il resterait seulement à montrer, en effet, que si $p = 3$ et X est exceptionnel $\neq \mathrm{G}_2$, ou si $p = 5$ et $X = \mathrm{E}_8$, tout élément unipotent de $G(k)$ est bon lorsque $[k : k^p] = p$.

Pour prouver la proposition S1, on commence par remarquer que si P est un k-sous-groupe parabolique de G et si L est un facteur presque simple du groupe dérivé d'un sous-groupe de Levi de P (rappelons que, comme G, L est alors déployé et simplement connexe), tout bon élément unipotent de G contenu dans $L(k)$ est bon dans L, car s'il est contenu dans le radical unipotent d'un k-sous-groupe parabolique Q de G, il est aussi contenu dans le radical unipotent de $((P \cap Q) \cdot R_u(P)) \cap L$, qui est un k-sous-groupe parabolique de L. Il suffit donc, par induction, d'établir l'assertion lorsque la caractéristique p de k n'est de torsion pour aucun groupe presque simple L du type envisagé ci-dessus et distinct de G. Cela veut dire que l'on se trouve dans un des cas suivants que nous dirons *irréductibles :*

$p = 2$ et $X = \mathrm{G}_2, \mathrm{B}_3$ ou D_4,

$p = 3$ et $X = \mathrm{F}_4$ ou E_6,

$p = 5$ et $X = \mathrm{E}_8$.

Un k-élément d'un k-groupe H est dit *k-anisotrope* s'il n'est contenu dans aucun k-sous-groupe parabolique propre de H. Ce qui vient d'être dit montre que, pour prouver la proposition S1, il suffit d'établir le résultat suivant (inversement, S2 est aussi conséquence facile de S1, mais peu importe) :

PROPOSITION S2. — *Sous les hypothèses de la proposition S1, si l'on se trouve dans l'un des six cas irréductibles, alors G(k) possède des éléments unipotents anisotropes.*

Soient T un k-tore déployé maximal de G et M une classe latérale de T dans son normalisateur dont l'image dans le groupe de Weyl W est d'ordre p et n'a pas de valeur propre égale à 1 (on constate que dans chacun des six cas irréductibles, W possède un tel élément). Les éléments de M sont alors d'ordre p et l'on établit la proposition S2 en montrant que

M(k) possède des éléments k-anisotropes.

La démonstration utilise de façon essentielle les articles de F. Bruhat et J. Tits intitulés *Groupes réductifs sur un corps local, I et II* (*Publ. Math. I.H.E.S.* 41 (1972), 5-251, et 60 (1984), 5-184), articles notés [BT] ci-dessous.

Dans ce résumé, nous supposerons pour simplifier que le corps k est de type fini, mais on peut voir que cette restriction n'est pas essentielle. On montre facilement que, vu l'hypothèse faite sur $[k : k^p]$, le corps k possède une valuation discrète de hauteur 1 dont le corps résiduel $\bar{k}$ est non parfait. Choisissons une telle valuation, notons $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers correspondant, $\mathcal{I}$ l'immeuble affine de G relatif à ce choix et A l'appartement de $\mathcal{I}$ associé à T (cf. [BT], II, 4.2.4). À tout point a de $\mathcal{I}$ est associé un $\mathcal{O}$-schéma en groupes $\mathfrak{G}_a$ de fibre générique G et tel que l'étoile de a dans $\mathcal{I}$ soit l'immeuble *sphérique* (immeuble des $\bar{k}$-sous-groupes paraboliques) de la « réduction réductive » (quotient réductif de la fibre fermée) $\bar{\mathfrak{G}}_a^{\text{réd}}$ de $\mathfrak{G}_a$: celui-ci est un $\bar{k}$-groupe réductif et si $a \in A$, l'ensemble des racines de ce groupe n'est autre que l'ensemble des racines de G relatives à T dont le noyau est parallèle à un mur de A contenant a. Nous nous intéresserons ici aux points a de A tels que le système de racines en question soit de type A_1^2, A_1^3, A_1^4, A_2^2, A_2^3 ou A_4^2 selon celui des six cas irréductibles que l'on envisage. Soit Λ l'ensemble des points de A en question. On vérifie que dans chacun des six cas, $\bar{\mathfrak{G}}_a^{\text{réd}}$ n'est pas simplement connexe mais tous ses sous-groupes propres connexes distingués le sont. Il est immédiat que tout élément de $M(k)$ possède un unique point fixe dans A. Si l (= 2, 3, 4, 4, 6 ou 8) désigne le rang de G, l'ensemble $M(k)$ est un espace homogène principal sous $T(k) \simeq (k^\times)^l$ qu'il est facile de paramétrer, ce qui permet de faire aisément des calculs explicites sur ses éléments. Un tel calcul montre qu'il existe $u \in M(k)$ dont le point fixe a dans A appartient à Λ et dont l'image $\bar{u}$ dans $\bar{\mathfrak{G}}_a^{\text{réd}}$ n'est pas l'image d'un $\bar{k}$-point du revêtement universel (central) de ce groupe. Utilisant une variante de l'assertion (3), on déduit de cette dernière condition que $\bar{u}$ est $\bar{k}$-anisotrope dans $\bar{\mathfrak{G}}_a^{\text{réd}}$. Ceci implique que u est k-anisotrope dans G. En effet, on sait que l'immeuble sphérique de G sur k peut être vu comme l'ensemble $\mathcal{I}_\infty$ des « points à l'infini » de l'immeuble affine $\mathcal{I}$ (cf. [BT], I, 5.1.33). Si u n'était pas anisotrope relativement à k, il fixerait un point a_∞ de $\mathcal{I}_\infty$, donc la géodésique de $\mathcal{I}$ joignant a à a_∞, donc aussi la facette de $\mathscr{I}$ contenant un segment initial de cette géodésique, et $\bar{u}$ ne serait pas k-anisotrope. Ainsi s'achève cette esquisse de démonstration de la proposition S2, donc aussi de la proposition S1 dans le cas d'un corps k de type fini.

J.T.

MISSIONS

Exposés

— *Groups and trees,* exposé aux « graduate students », Cambridge University, novembre 1993.

— *Abstract linear representations of simple algebraic groups,* Cambridge University, Algebra Seminar, novembre 1993 ; Max-Planck Institut für Mathematik, Bonn, décembre 1993.

— *Ein Fixpunktsatz für Gebäude allgemeines Typs,* Köln, décembre 1993.

— *Hyperbolic metrics in buildings and applications,* London Mathematical Society, mars 1994 ; *Distances in buildings and applications,* Colloque en l'honneur de J. Thas, Gand, mai 1994.

— *Métriques hyperboliques et points fixes dans les immeubles,* Séminaire Chevalley, juin 1994.

PUBLICATIONS

G. LUSZTIG and J. TITS, *The inverse of a Cartan matrix* (*Anal. Univ. Timişoara, Ser. Şt. Mat.,* XXX (1) (1992), 17-23).

M. RONAN and J. TITS, *Twin trees I* (*Inventiones Math.* 116 (1994), 463-479).

J. TITS, *Sur les produits tensoriels de deux algèbres de quaternions* (*Bull. Soc. Math. Belg., sér. B,* 45 (1993), 329-331).

—, *Moufang polygons, I. Root data,* référence [5] du *Résumé de cours* ci-dessus.