

Théorie des groupes

M. Jacques Tits, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de cette année a poursuivi l'étude des polygones de Moufang, étude dont l'objectif final est la classification complète de ces objets (voir [14] et [16] pour un état de la question). Il a été centré plus particulièrement sur la *description* explicite des quadrangles de Moufang connus : on sait que le cas des quadrangles est le seul qui pose encore quelques problèmes.

1. Rappel : trois définitions équivalentes des n -gones de Moufang

1.1. Soit n un entier ≥ 3 . Un n -gone généralisé épais — ou simplement, comme nous dirons le plus souvent, un n -gone — est, par définition, un graphe non orienté, de diamètre n , de circonférence (maximum de la longueur d'un cycle) égale à $2n$ et dont chaque sommet est d'ordre au moins 3. Convenablement interprétées, ces conditions impliquent que le graphe est non vide, connexe, sans boucle ni double lien.

Dans un graphe quelconque, si a est un sommet, nous notons $V(a)$ le *voisinage* de a , c'est-à-dire l'ensemble des sommets à distance 1 de a . Nous appelons *chemin* de longueur m une suite $\Gamma = (s_0, \dots, s_m)$ de $m + 1$ sommets, sans aller et retour (i.e. $s_i \neq s_i + 2$) et telle que deux éléments consécutifs quelconques de la suite soient les sommets d'une arête. Pour un tel chemin, notons $U(\Gamma)$ le groupe de tous les automorphismes du graphe qui fixent $V(s_i)$ pour $i = 1, \dots, m - 1$ ainsi que Γ lui-même (ce qui est automatique dès que $m \geq 2$).

Appelons $\text{Tr}(\Gamma)$ (resp. $\text{Tr}'(\Gamma)$) la condition suivante : $U(\Gamma)$ permute transitivement les éléments de $V(s_0) - \{s_1\}$ (resp. $V(s_m) - \{s_{m-1}\}$).

Soit Δ un n -gone. On montre ([9], 4.1.1) que, si $\Gamma = (s_0, \dots, s_n)$ est un chemin de longueur n , $U(\Gamma)$ opère librement sur $V(s_0) - \{s_1\}$ (donc aussi sur $V(s_n) - \{s_{n-1}\}$). Le n -gone Δ est dit de *Moufang* si, pour tout Γ (de longueur n),

la condition $\text{Tr}(\Gamma)$ est satisfaite, ce qui revient donc à dire que $U(\Gamma)$ est simplement transitif sur les deux ensembles en question.

1.2. Ayant souvent, dans la suite, à considérer des suites périodiques de période $2n$, $(f_z \mid z \in \mathbf{Z}, f_z = f_{z+2n})$, nous utiliserons la notation abrégée $(f_z)_{2n}$, ou même $(f_z)_l$ pour désigner une telle suite. Soit $(e_z)_l$ un cycle de longueur $2n$ dans un graphe Δ . Pour tout entier z , posons $U_z = U(e_z, \dots, e_{z+n})$ et, si $z, z' \in \mathbf{Z}$, désignons par $U_{[z, z']}$ le groupe engendré par les $U_{z''}$ pour $z \leq z'' \leq z'$. On vérifie aisément (cf. [9], [11]) que si Δ est un n -gone de Moufang, alors les groupes U_z possèdent les propriétés suivantes :

(i) pour $i < j < i + n$, le groupe des commutateurs $[U_i, U_j]$ est contenu dans $U_{[i+1, j-1]}$;

(ii) pour $u \in U_i - \{1\}$, il existe $u', u'' \in U_{i+n}$ tels que $u'uu''$ conjugue U_z sur U_{n+2i-z} pour tout entier z ;

(iii) l'application produit $U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow U_{[1, n]}$ est injective (donc bijective, vu (i)) ;

(iv) le centre du groupe $U_{[1, 2n]}$ engendré par tous les U_z est réduit à l'élément neutre.

Réciproquement, considérons dans un groupe G un système générateur $(U_z)_{2n}$ de $2n$ sous-groupes ordonnés cycliquement, non réduits à l'élément neutre, et satisfaisant aux conditions (i) à (iv). On sait ([12], 2.3) que, pour u donné, les éléments u' et u'' de (ii) sont uniques, ce qui rend légitime de poser $m(u) = u'uu''$. Soient T l'intersection des normalisateurs des U_z dans G , N le groupe engendré par les $m(U_z - \{1\})$ et B le groupe $T.U_{[1, n]}$. Alors, le couple (B, N) est une BN-paire de rang 2 dans G , au sens de [9]. Les sous-groupes paraboliques maximaux contenant B sont les sous-groupes P et P' engendrés par B et, respectivement, $m(U_n - \{1\})$ et $m(U_{n+1} - \{1\})$. Le graphe $\Delta(G; (U_z)_l)$ dont les sommets sont les conjugués de P et P' dans G et dont les arêtes sont les conjuguées de la paire $\{P, P'\}$ est un n -gone de Moufang (immeuble de la BN-paire : cf. [9]) sur lequel le groupe G opère fidèlement par conjugaison. Les sommets ${}^gP, {}^gP'$ pour $g \in N$ forment un cycle de longueur $2n$ dans $\Delta(G; (U_z)_l)$. Faisant $\Delta = \Delta(G; (U_z)_l)$ et notant $(e_z)_l$ le cycle en question, numéroté de telle sorte que $e_n = P$ et $e_{n+1} = P'$, appliquant les définitions du début de ce n° 1.2 et notant G le groupe engendré par tous les U_z , on retrouve le système $(G; (U_z)_l)$ dont on est parti. On a ainsi établi une bijection (à isomorphismes canoniques près) entre les couples formés d'un n -gone de Moufang Δ et d'un $2n$ -cycle numéroté de Δ , et les systèmes $(G; (U_z)_l)$ satisfaisant aux conditions (i) à (iv) et

(v) G est engendré par les U_z .

1.3. Dans les applications, et notamment lorsque l'on se propose de décrire « concrètement » certains n -gones de Moufang, il est souvent commode de s'affranchir des conditions (iv) et (v), lesquelles s'avèrent d'ailleurs inessentielles

pour la raison suivante. Soient G un groupe, $(U_z)_I$ un système de $2n$ sous-groupes ordonnés cycliquement et satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii), G° le sous-groupe de G engendré par les U_z , Z le centre de G° et \bar{G}° le quotient G°/Z . Alors, $U_z \cap Z = \{1\}$ pour tout z , de sorte que U_z s'injecte dans \bar{G}° par la projection canonique $G^\circ \rightarrow \bar{G}^\circ$ et peut donc être identifié avec son image dans ce groupe, et le système $(G^\circ; (U_z)_I)$ possède les propriétés (i) à (v) de 1.2.

1.4. Avec les notations des deux numéros précédents, posons $U_+ = U_1 U_2 \dots U_n$. Le n -gone Δ est aussi déterminé par le système $(U_+; U_1, \dots, U_n)$. Cela résulte d'une construction donnée dans [11] que nous rappelons à présent. L'ensemble des sommets de Δ est le quotient du produit direct $U_+ \times (e_z)_I$ par la relation d'équivalence \approx suivante : $(u, e) \approx (u', e')$ si et seulement si

$$e = e' = e_i, 1 \leq i \leq n \text{ et } u^{-1}u' \in U_{[1, i]}$$

ou

$$e = e' = e_{n+i}, 1 \leq i \leq n \text{ et } u^{-1}u' \in U_{[i, n]};$$

les arêtes sont les paires de sommets ayant un représentant de la forme $\{(u, e_z), (u, e_{z+1})\}$, $u \in U_+$, $z \in \mathbf{Z}$.

1.5. Soit $(G; (U_z)_I)$ un système satisfaisant aux conditions (i) à (iii) donc définissant par 1.2 un n -gone de Moufang Δ . Pour $i, j \in \mathbf{Z}$ tels que $i+1 < j < i+n$, la composée de l'application commutateur $(x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$ de $U_i \times U_j$ dans $U_{[i+1, j-1]}$ et de la bijection canonique de ce dernier groupe dans $U_{i+1} \times \dots \times U_{j-1}$, inverse de l'application produit, est une application $U_i \times U_j \rightarrow U_{i+1} \times \dots \times U_{j-1}$ que nous notons κ_{ij} .

1.5.1. *Le n -gone Δ est entièrement déterminé par la donnée des groupes U_i ($i = 1, \dots, n$) et du système d'applications $(\kappa_{ij} \mid 1 \leq i < j-1 < n)$.*

Cela résulte du n° 1.4 car, des données en question, on déduit aussitôt, inductivement, les groupes $U_{[1, j]}$ pour $1 < j \leq n$, donc, en particulier, le groupe U_+ . En effet, on a, vu 1.2 (ii), $U_{[1, 2]} = U_1 \times U_2$ et, pour $j > 2$, $U_{[1, j]}$ est produit semi-direct de U_j par $U_{[1, j-1]}$ pour une action du premier de ces groupes sur le second déterminée par le système des κ_{ij} .

En pratique, il est souvent aussi simple, voire même plus, pour des raisons de symétrie qui permet un meilleur choix de notations, de se donner tous les U_i et toutes les applications κ_{ij} , et d'utiliser la forme plus faible suivante de l'assertion 1.5.1 :

1.5.2. *Le n -gone Δ est déterminé par le système des U_i et des κ_{ij} .*

1.6. Si l'on veut établir la classification des n -gones de Moufang à partir de la construction du n° 1.4, il y a lieu de rechercher des conditions nécessaires et suffisantes, aussi simples que possibles, pour qu'un système $(U_+; U_1, \dots, U_n)$ satisfaisant aux conditions 1.2 (i) (pour des indices appartenant à l'intervalle $[1, n]$)

et 1.2 (iii) fournissent effectivement un tel n -gone. La condition suivante est évidemment nécessaire :

(Prol_0) il existe un groupe P contenant U_+ et un sous-groupe U_0 de P tels que l'on ait :

(1) le groupe des commutateurs $[U_0, U_i]$ est contenu dans $U_{[1, i-1]}$ pour $1 \leq i \leq n$, et

(2) pour tout $u \in U_0 - \{1\}$, il existe $u', u'' \in U_n$ tels que $u'uu''$ conjugue U_i sur U_{n-i} (dans P) quel que soit $i \in \{0, \dots, n\}$.

Il en est de même de la condition (Prol_{n+1}) déduite de la précédente en remplaçant les indices $0, 1, \dots, n$ respectivement par $n+1, n, \dots, 1$, et le groupe $U_{[1, i-1]}$ par $U_{[n+2-i, n]}$. Le théorème suivant, prouvé dans le cours (et qui avait déjà été énoncé en des termes un peu différents dans le cours de 1977-1978), affirme que l'ensemble de ces deux conditions est aussi suffisant.

THÉORÈME. — *Le système $(U_+; (U_i)_{1 \leq i \leq n})$ définit un n -gone de Moufang si et seulement si, outre les conditions 1.2 (i) (pour $i, j \in [1, n]$) et 1.2 (iii), il satisfait à (Prol_0) et (Prol_{n+1}).*

Indiquons les principales étapes de la preuve.

Notons L_0 le sous-groupe de P engendré par U_0 et U_n et T_0 l'intersection des normalisateurs de ces deux sous-groupes dans L_0 . La construction du n° 1.4 appliquée au système $(U_+; U_1, \dots, U_n)$ fournit un graphe Δ et un $2n$ -cycle $(e_z)_i$ de celui-ci. On commence par établir le lemme-clé suivant :

LEMME. — *La condition (Prol_0) (resp. (Prol_{n+1})) implique l'existence d'un automorphisme de Δ permutant e_i et e_{-i} (resp. e_i et e_{-2-i}) pour tout i .*

Pour (Prol_0) par exemple, cela se montre en identifiant Δ avec le graphe Δ' dont l'ensemble de sommets est le quotient du produit direct $(L_0 \cdot U_{[1, n-1]}) \times \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ par la relation d'équivalence suivante :

(p, e) est équivalent à (p', e') si $e = e'$ et si, de plus, $p^{-1}p' \in T_0 \cdot U_{[0, i]}$ lorsque $e = e_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et $p^{-1}p' \in L_0$ lorsque $e = e_0$,

les arêtes (de Δ') étant les paires de sommets qui ont un représentant de la forme $\{(p, e_i), (p, e_{i+1})\}$. L'identification de Δ et Δ' consiste en une simple vérification. Le groupe L_0 opère sur Δ' de façon évidente et l'on observe que tout élément $u'uu''$ de L_0 fourni par la deuxième partie de la condition (Prol_0) induit un automorphisme de Δ (identifié à Δ') ayant la propriété voulue par le lemme.

Le cas de (Prol_{n+1}) se traite de façon symétrique.

Pour achever la démonstration du théorème, on établit successivement, et facilement, les assertions suivantes.

(a) Tout chemin de la forme $(e_{n+1}, e_n, s_{n-1}, \dots, s_{n+1-l})$ (resp. $(e_n, e_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{n+l})$), de longueur $l \leq n+1$, peut être transformé en $(e_{n+1}, e_n, e_{n-1}, \dots, e_{n+1-l})$ (resp. $(e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+l})$) par un élément de U_+ . [Induction sur l .]

(b) Les propriétés $\text{Tr}(e_{2n}, e_{2n-1}, \dots, e_n)$ et $\text{Tr}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ (cf. 1.1) sont satisfaites. [Conséquence de (a).]

(c) Tout chemin de longueur $\leq n-1$ joignant e_n ou e_{n+1} à un sommet du cycle $\Sigma = (e_z)$, est contenu dans ce cycle. [Autre conséquence de (a).]

(d) Le stabilisateur de Σ dans $\text{Aut } \Delta$ permute transitivement les arêtes de Σ . Le groupe $\text{Aut } \Delta$ permute transitivement les arêtes de Δ . [On utilise le lemme.]

(e) La distance de deux sommets de Σ est la même dans Σ et dans Δ . En particulier, Σ est un sous-graphe plein de Δ . [On utilise (d) et (c).]

(f) On peut transporter dans Σ tout chemin de longueur $\leq n+1$, et aussi toute paire d'arêtes, par un automorphisme de Δ (vu (d) et (a)).

(g) $\text{Diam } \Delta = n$ (vu (e) et (f)).

(h) La circonférence de Δ est $2n$. [Cela résulte de (f).]

(i) Le graphe Δ est un n -gone de Moufang (en vertu de (h), (g), (b), (f)).

1.7. On vient de voir qu'un n -gone de Moufang peut être caractérisé par la donnée d'un ensemble de $2n$ groupes U_i ordonnés cycliquement et d'un système d'applications « composants de commutateurs » κ_{ij} ; nous dirons parfois, par abus de langage, que le système $((U_i)_i, (\kappa_{ij}))$, lui-même, est un n -gone (de Moufang), mais il faut prendre garde au fait que la notion d'automorphisme du n -gone dépend du point de vue adopté. Au n° 1.2, où les U_i étaient des sous-groupes d'un groupe G , nous avons associé à tout élément $u \in U_i - \{1\}$ un élément $m(u)$ de G ; la conjugaison par cet élément définit un automorphisme du système $((U_i)_i, (\kappa_{ij}))$, automorphisme que nous noterons aussi $m(u)$. L'automorphisme $m(u)$ ne dépend que de u et du système « abstrait » $((U_i)_i, (\kappa_{ij}))$, et non du plongement de ce système dans un groupe de référence G , même si celui-ci ne satisfait pas aux propriétés (iv) et (v) du n° 1.2 (qui rendent G unique); cela résulte des remarques du n° 1.3.

2. Quadrangles de Moufang, généralités

La suite du cours a été consacrée en grande partie à une *description* des quadrangles de Moufang connus. Ce sera l'objet des paragraphes restants de ce Résumé.

2.1. Notations

On a vu plus haut qu'un quadrangle de Moufang « est » (cf. 1.7) un système de huit groupes ordonnés cycliquement $(U_z)_8$, dotés d'applications $U_z \times U_{z'} \rightarrow U_{z''}$, pour $z < z'' < z' = z+2$ ou $z+3$, ces données étant soumises à des conditions qui

ont été spécifiées au §1. D'après un résultat qui a été établi dans le cours de l'an dernier ([14], §3), et exposé en détail dans [15], un tel système possède une « filtration » par une *donnée radicielle* (U_a) , où a parcourt un système de racines Φ qui peut être de type C_2 ou de type BC_2 . Cette filtration n'est pas toujours unique mais la proposition 6 de [14] (cf. aussi [15], 4.7) montre que, sauf dans le cas que nous appellerons *indifférent*, cas où U_z et U_{z+2} commutent pour tout z , il existe une filtration « naturelle », constituée par les groupes U_z eux-mêmes et par les groupes de commutateurs $[U_{z-1}, U_{z+1}]$ qui ne sont pas réduits à l'élément neutre. Lorsque $\{1\} \neq [U_{z-1}, U_{z+1}] \neq U_z$, la racine indexant le groupe $[U_{z-1}, U_{z+1}]$, que nous notons alors U'_z , est le double de la racine indexant U_z ; c'est le cas d'une donnée radicielle de type BC_2 .

En conclusion, sauf dans le cas indifférent, il existe une correspondance biunivoque naturelle entre les quadrangles de Moufang (U_z) et les données radicielles de type $\Phi = C_2$ et BC_2 . Les groupes U_z sont les groupes de la donnée radicielle qui sont indexés par les racines non divisibles. Nous notons a_z la racine non divisible indexant U_z . Si $2a_z \in \Phi$, on a donc $U_{2a_z} = U'_z$; dans ce cas, nous posons $\bar{U}_z = \bar{U}_{a_z} = U_z/U'_z$. Lorsque nous parlerons d'un quadrangle de type $\Phi = C_2$ ou BC_2 , il sera toujours sous-entendu que nous excluons les quadrangles indifférents.

Les quadrangles de type réduit, c'est-à-dire de type C_2 , seront aussi dits *réduits*. Si $Q = (U_a)$ est un quadrangle de type $\Phi = BC_2$, le système $(U_a \mid 2a \notin \Phi)$ est un quadrangle réduit appelé *réduction de Q*.

Enfin, dans le cas non indifférent, nous ferons la convention de numéroter toujours par des indices impairs les groupes U_z correspondant aux racines de longueur minimum. L'énoncé du §3 montre que, dans le cas indifférent, on ne peut formuler de convention *générale* de ce type, même si, pour tel ou tel quadrangle particulier, les deux parités peuvent se comporter de façon très différente.

2.2. Groupe de Weyl étendu

La liste des quadrangles de Moufang connus est donnée dans [11], 4.3. Ces quadrangles sont de trois types : quadrangles *indifférents* (énumérés au §3 ci-dessous), quadrangles *classiques* (correspondant aux données radicielles décrites dans [4], §10, nos 10.1.1 à 10.1.3 et 10.1.11, où l'on doit poser $m = 2$ et supposer $(X_0, \sigma, \varepsilon) \neq (\{0\}, \text{id.}, 1)$) et quadrangles *exceptionnels*. Nous leur consacrerons respectivement les §§ 3, 4 et 5, mais nous nous proposons d'abord d'indiquer un procédé *uniforme* permettant de les décrire. L'outil essentiel pour cette description sera un certain groupe fini d'ordre 32 appelé *groupe de Weyl étendu*, que nous définissons à présent.

Rappelons que, dans la situation qui nous intéresse, le groupe de Weyl (ordinaire) W est le groupe diédral d'ordre 8 ayant pour présentation $\langle r_0, r_1 \mid r_0^2 = r_1^2 = (r_0 r_1)^4 = 1 \rangle$. Il opère sur l'ensemble des U_z constituant un quadrangle de Moufang par $r_0(U_z) = U_{4-z}$, $r_1(U_z) = U_{6-z}$. Le groupe de Weyl étendu est défini « abstraitement » par la présentation suivante : $\hat{W} = \langle \hat{r}_0, \hat{r}_1 \mid \hat{r}_0^4 = \hat{r}_1^4 = 1,$

$\hat{r}_0 \hat{r}_1 \hat{r}_0 \hat{r}_1 = \hat{r}_1 \hat{r}_0 \hat{r}_1 \hat{r}_0$, $\hat{r}_0 \hat{r}_1^2 \hat{r}_0^{-1} = \hat{r}_0^2 \hat{r}_1^2$, $\hat{r}_1 \hat{r}_0^2 \hat{r}_1^{-1} = \hat{r}_0^2$. On voit que \hat{r}_0^2 et \hat{r}_1^2 engendrent un sous-groupe distingué, abélien élémentaire d'ordre 4, noyau de l'épimorphisme $\hat{W} \rightarrow W$ qui envoie \hat{r}_i sur r_i , pour $i = 0$ et 1 . L'intérêt du groupe \hat{W} est que, alors que W opère seulement sur l'ensemble $\{U_z\}$, \hat{W} opère sur le quadrangle (U_z) lui-même. Plus précisément :

PROPOSITION. — Si $Q = (U_z)$ est l'un des quadrangles connus (énumérés plus haut) et si $e_i \in U_{i-1}$ ($i = 0, 1$) sont des éléments soumis à la seule condition que e_1 appartienne à U'_1 si $2a_1$ est une racine, alors, l'application $\hat{r}_i \mapsto m(e_i)$ (en donnant à la notation m le sens précisé au n° 1.7) se prolonge en un homomorphisme de \hat{W} dans le groupe des automorphismes du quadrangle Q (c'est-à-dire du système des U_i doté des applications « composants des commutateurs »).

Si Q est associé à un groupe algébrique simple de type relatif C_2 ou BC_2 sur un corps k , c'est-à-dire si les U_z (et éventuellement les U'_z) sont les groupes de k -points des sous-groupes radiciels normalisés par un tore déployé maximal dans un tel groupe (vu 1.3, ceci a un sens même si le groupe considéré n'est pas un groupe adjoint), cette proposition résulte de [1], 7.2, [2], 4.6 et [6], 4.4. Si Q est classique, elle se vérifie à partir des relations données dans [4], 10.1.2 (voir aussi le §4 ci-dessous). Enfin, le cas indifférent se ramène au précédent car tout quadrangle indifférent est contenu, en un sens évident, dans un quadrangle associé à un groupe Sp_4 sur un corps de caractéristique 2 (mais on peut aussi, si l'on veut, utiliser les relations de commutation de [10] ou de [11], 4.3, rappelées au §3 ci-dessous).

2.3. Coordonnées

Soient $Q = (U_z)$ l'un des quadrangles connus énumérés plus haut, et choisissons une fois pour toutes des éléments e_0, e_1 comme dans l'énoncé de la proposition du n° 2.2. Celle-ci fournit une action de \hat{W} sur Q . Posons $V = U_0$, $U = U_1$, $U' = U'_1$ ou $\{1\}$ selon que $2a_1$ est ou non une racine, et $\bar{U} = U/U'$. Notons ω l'élément $\hat{r}_1 \hat{r}_0$ de \hat{W} et posons $\varepsilon = \omega^4$. Un rapide calcul montre que ε n'est autre que l'élément central \hat{r}_0^2 de \hat{W} .

L'élément ω permute cycliquement les U_{2z} ainsi que les U_{2z+1} ce qui permet de repérer les éléments de ces groupes à l'aide d'une « coordonnée » variant respectivement dans V et dans U : pour $v \in V$ (resp. $u \in U$), on pose $v_{2z} = \omega^z(v)$ (resp. $u_{2z+1} = \omega^z(u)$). Du fait de l'action de ε , il y a cependant une ambiguïté (au sens étymologique !), chaque élément des groupes U_z se voyant, en principe, attribuer deux coordonnées. On a donc affaire à un « double système de coordonnées », dans l'esprit de [7], mais comme dans cet article, un jeu sur les indices permet d'écrire des formules de commutations non ambiguës, comme nous allons le voir un numéro suivant. Notons d'autre part que, pour les quadrangles réduits (connus) et pour les quadrangles indifférents, ε est l'identité (cf. 4.4, 5.1) ; l'ambiguïté disparaît donc dans ces cas-là, et par conséquent aussi pour les groupes U_{2z} et pour les groupes U'_{2z+1} dans le cas général.

Indiquons encore une généralisation simple de la procédure précédente. Soit ξ un automorphisme du système $(U_z)_I$ normalisant chaque U_z . Alors, de la même façon que ω , le produit $\omega' = \xi\omega$ permute cycliquement les U_{2z} et les U_{2z+1} et fournit donc dans ces groupes un système de coordonnées ayant V et U pour domaines de définition. Le procédé est surtout intéressant si l'on peut choisir ξ de telle façon que ω' soit d'ordre 4 ; on verra qu'un tel choix existe dans le cas des quadrangles classiques.

2.4. Relations de commutation

Pour décrire le quadrangle Q , il suffit de se donner les groupes $U, V, U' \subset U$ et les quatre fonctions

$$\alpha: \bar{U} \times \bar{U} \rightarrow V, \quad \beta: V \times U \rightarrow U', \quad \gamma: U \times V \rightarrow V, \quad \delta: U \times V \rightarrow U,$$

définies par

$$[x_1, y_3] = \alpha(x, y)_2,$$

$$[x_2, y_4] = \beta(x, y)_3,$$

$$[x_1, y_4] = \gamma(x, y)_2 \cdot \delta(x, y)_3.$$

Les fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dépendent évidemment du système de coordonnées choisi, c'est-à-dire des points-base e_0, e_1 et, dans le cadre plus général de la fin du n° 2.3, de l'automorphisme ξ . Transformant les relations de commutation qui précèdent par ω^s (ou, plus généralement, par ω'^s), ce qui revient à ajouter $2s$ à tous les indices, et faisant varier s , on obtient toutes les relations de commutation entre groupes U_z requises pour définir Q selon le n° 2.2. En fait, la donnée des deux groupes U et V et les trois relations ci-dessus déterminent le groupe U_+ du n° 1.4 et permettent donc déjà de reconstruire Q . Mais l'ensemble des « traduites » de ces relations, complétées par les identifications appropriées entre groupes U_z et U_{z+8} , fournissent même une *présentation* d'une extension centrale du groupe d'automorphismes du quadrangle engendré par les U_z .

Remarque. — Si l'on inverse la numérotation des U_z (ce qui revient à remplacer ω par ω^{-1}), cela modifie le système de coordonnées défini plus haut, et par conséquent aussi les relations de commutation ci-dessus.

3. Quadrangles indifférents

Supposons le quadrangle Q indifférent. Par définition (cf. 2.1), cela veut dire que les fonctions α et β sont constantes égales à 1. Le résultat principal de [10] peut s'énoncer de la façon suivante :

Il existe des corps de caractéristique 2, notés K et L , et des monomorphismes $\kappa: K \rightarrow L$ et $\lambda: L \rightarrow K$ dont les composés $\kappa \cdot \lambda$ et $\lambda \cdot \kappa$ sont l'un et l'autre l'élévation au carré, tels que si l'on fait de L (resp. K) un K -espace (resp. un L -espace) vectoriel à gauche à l'aide de κ (resp. λ), alors le groupe U (resp. V) du n° 2.3 est

un sous-espace vectoriel de K (resp. L) et les fonctions γ et δ du n° 2.4 sont les multiplications scalaires, c'est-à-dire que Q est défini par la relation de commutation

$$(3.1) \quad [x_1, y_4] = (xy)_2 \cdot (yx)_3.$$

Réciproquement, de telles données K, L, κ, λ, U et V et les relations (3.1) définissent un quadrangle indifférent.

Ce quadrangle est noté $Q(K, L; \kappa, \lambda; U, V)$.

4. Quadrangles classiques

4.1. Sur les données radicielles de types B_n, C_n et BC_n

Dans le cours, on a décrit les données radicielles en question dans le titre pour n quelconque. Cette partie de l'exposé n'apportait rien d'essentiel par rapport à [4], §10, mais nous en retiendrons ici la remarque suivante, qui n'est pas explicite dans [4] et qui simplifie la description que nous avons en vue pour $n = 2$.

Parmi les données générales du n° 10.1 de [4], données introduites en 10.1.1, figure une certaine constante ε , égale à 1 ou -1 . Cette constante, qui apparaît aussi, ultérieurement, sous la forme de signes $\varepsilon(i)$, alourdit quelque peu les relations des n°s 10.1.2 et 10.1.11 de *loc. cit.* Or, les changements de coordonnées de [4], 10.1.3, montrent que l'on peut toujours s'arranger pour que ε soit égal à 1, sauf dans le cas du groupe symplectique ordinaire (cas où $(X_0, \sigma, \varepsilon) = (\{0\}, \text{id.}, -1)$). Si l'on s'intéresse seulement aux systèmes de rang $m = 2$, comme c'est notre cas, cette exception n'en est même pas une, en raison de l'isomorphisme entre Sp_4 et Spin_5 , et l'on peut *toujours*, sans nuire à la généralité, poser $\varepsilon = 1$. C'est ce que nous ferons.

4.2. Description des quadrangles classiques : énoncé

Soient K un corps doté d'une involution σ (non nécessairement distincte de l'identité), $K_\sigma = \{x - x^\sigma \mid x \in K\}$ le groupe additif des « antitraces », X_0 un K -espace vectoriel à droite non réduit à 0 si σ est l'identité, $f: X_0 \times X_0 \rightarrow K$ une forme hermitienne relative à σ (semi-linéaire en la première variable et linéaire en la seconde) et $q: X_0 \rightarrow K/K_\sigma$ une forme pseudo-quadratique associée à f : cela veut dire qu'il existe une forme sesquilinéaire $b: X_0 \times X_0 \rightarrow K$ telle que $f(x, y) = b(x, y) + b(y, x)^\sigma$ et que $q(x) = b(x, x) + K_\sigma$ (une définition différente mais équivalente est donnée dans [4], 10.1.1). Il est facile de voir que q détermine f . Nous supposons que q ne s'annule pas sur $X_0 - \{0\}$. L'énoncé décrivant les quadrangles classiques est maintenant le suivant :

Il existe un quadrangle de Moufang $Q(K, \sigma, X_0, q)$ tel que, avec les notations de 2.3, 2.4, pour un choix convenable des points e_0, e_1 et de l'automorphisme ξ , U soit le groupe $\{(z, k) \mid z \in X_0, q(z) = k + K_\sigma\}$ doté du produit $(z, k) \cdot (z', k') = (z + z', k + k' + f(z, z'))$, U' le sous-groupe formé des couples $(0, k)$ pour $k \in K_\sigma$ de sorte que U' et \bar{U} s'identifient respectivement aux groupes additifs de K_σ et de X_0 ,

et V le groupe additif de K , et que les fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ définissant le quadrangle soient données par les formules suivantes :

$$\alpha(z, z') = f(z, z') ;$$

$$\beta(k, k') = (kk')^\sigma - kk' ;$$

$$\gamma((z, k), k') = (-zk', k^\sigma kk') ;$$

$$\delta((z, k), k') = -kk'.$$

Ce quadrangle est indifférent si et seulement si σ est l'identité et f est identiquement nulle (ce qui impose que car $K = 2$, puisque q n'est pas nulle).

Si X_0 est réduit à 0, la forme q est également nulle et nous désignerons simplement le quadrangle en question par $Q(K, \sigma)$.

4.3. Preuve. Correspondance entre les notations de ce Résumé et celles de [4]

L'énoncé du n° 4.2 est une simple traduction des relations de commutation de [4], 10.1.11, sous l'hypothèse que $m = 2$ et $(X_0, \sigma) \neq (\{0\}, \text{id.})$. Nous indiquerons brièvement la correspondance de notations qui permet la traduction. Certains symboles ayant une signification différente dans [4] et au §2 ci-dessus, nous pallierons cette difficulté par la convention suivante : lorsqu'un risque de confusion existe, un symbole utilisé au sens de [4], 10.1, et pour lequel les notations du présent résumé suggéreraient un autre emploi, sera écrit en caractère gras. Ainsi, les éléments non divisibles de Φ seront notés \mathbf{a}_i et \mathbf{a}_{ij} ($= \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$), avec $i, j = \pm 1, \pm 2$, quand nous nous référons à [4], et a_z ($z \in \mathbf{Z}, a_z = a_{z+8}$) si nous voulons renvoyer au §2 ci-dessus. De même, nous parlerons éventuellement des groupes $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{ij}$ et de leurs paramétrisations $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{ij}$.

Arrivons-en à la description de la correspondance annoncée. Pour le système Φ , on utilise la bijection

$$(\mathbf{a}_{-2,1}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{1,2}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_{2,-1}, \mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_{-1,-2}, \mathbf{a}_{-2}) \mapsto (a_0, a_1, a_2, \dots, a_7).$$

On voit que les groupes $U = \mathbf{U}_{\mathbf{a}_1}, V = \mathbf{U}_{\mathbf{a}_{-2}}, U' = \mathbf{U}_{2\mathbf{a}_1}$ sont bien les groupes décrits dans l'énoncé du n° 4.2 (pour U' , il faut utiliser les relations de commutation de [4], 10.1.11). Il faut ensuite choisir des éléments $e_i \in U_i - \{1\}$, pour $i = 0, 1$, et un automorphisme ξ du système des $\mathbf{U}_{\mathbf{a}}$ normalisant chacun de ces groupes. Nous nous bornerons ici à considérer le cas non réduit (le plus difficile), où $2\mathbf{a}_1$ est une racine. Choisissons alors une « antitrace » non nulle quelconque $\tau \in K_\sigma - \{0\}$, posons $e_0 = \mathbf{u}_{-1,2}(1)$, $e_1 = \mathbf{u}_1(0, \tau)$ et prenons ξ induit par la transformation linéaire de l'espace vectoriel \mathbf{V} de [4], 10.1, fixant X_0 et opérant sur les \mathbf{e}_i de la façon suivante :

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1 \tau, \quad \mathbf{e}_{-1} \mapsto \mathbf{e}_{-1} \tau^{-1}, \quad \mathbf{e}_{\pm 2} \mapsto \mathbf{e}_{\pm 2}.$$

Grâce aux formules de [4], 10.1.2, on détermine sans problème l'action de l'élément ω du groupe de Weyl étendu \hat{W} (cf. 2.3) sur l'espace \mathbf{V} par l'intermédiaire du produit $\mathbf{m}_1(0, \tau) \cdot \mathbf{m}_{-1,2}(1)$, puis l'action du produit $\omega' = \xi \omega$; on trouve que

celui-ci fixe X_0 (cela va de soi) et permute la base complémentaire $(\mathbf{e}_{\pm 1}, \mathbf{e}_{\pm 2})$ de \mathbf{V} de la façon suivante :

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_{-2} \mapsto \mathbf{e}_{-1} \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1.$$

En particulier, ω^4 est l'identité sur \mathbf{V} (quand à ω^4 , le même calcul montre qu'il transforme chaque \mathbf{e}_i en son opposé).

Faisant maintenant opérer ω' par conjugaison sur les sous-groupes radiciels \mathbf{U}_a , on obtient les résultats suivants, pour $(z, k) \in U$ et $k' \in K$,

$$\mathbf{u}_1(z, k) \mapsto \mathbf{u}_2(z, k) \mapsto \mathbf{u}_{-1}(z, k) \mapsto \mathbf{u}_{-2}(z, k) \mapsto \mathbf{u}_1(z, k),$$

$$\mathbf{u}_{-2,1}(k') \mapsto \mathbf{u}_{1,2}(k') \mapsto \mathbf{u}_{2,-1}(k') \mapsto \mathbf{u}_{-1,-2}(k') \mapsto \mathbf{u}_{-2,1}(k'),$$

qui, avec la paramétrisation des U_z introduite au n° 2.3 et les choix que l'on a fait ici, se traduisent par les relations

$$(z, k)_3 = \mathbf{u}_2(z, k), (z, k)_5 = \mathbf{u}_{-1}(z, k), \dots$$

$$k'_2 = \mathbf{u}_{-2,1}(k'), k'_4 = \mathbf{u}_{1,-2}(k'), \dots$$

Cela fournit les changements de coordonnées qui permettent de déduire aussitôt les relations de commutation du n° 4.2 de celles de [4], 10.1.11. Des calculs à peine moins immédiats permettent de déterminer l'action de $\varepsilon = \omega^4$ sur les sous-groupes radiciels ; en particulier, on trouve que ε opère trivialement sur les U'_{2z+1} et sur les U_{2z} , donc sur la réduction du quadrangle considéré, conformément à ce que nous avons dit au n° 2.3.

4.4. *Quadrangles réduits et réduction*

Constatons simplement que le quadrangle $Q(K, \sigma, X_0, q)$ est réduit si et seulement si l'on a $\sigma = \text{id.}$ ou $X_0 = \{0\}$. Lorsque $\sigma \neq \text{id.}$ la réduction de $Q(K, \sigma, X_0, q)$ est le quadrangle $Q(K, \sigma)$. Notons que les U_z peuvent être tous commutatifs sans que le quadrangle ne soit ni indifférent, ni réduit ; en vertu des formules du n° 4.2, cela se passe précisément lorsque $\sigma \neq \text{id.}$ et que f est identiquement nul, ce qui veut dire que $\text{car } K = 2$ et que q prend ses valeurs dans K^σ/K_σ , où K^σ désigne l'espace des éléments symétriques de K (éléments invariants par σ).

5. *Quadrangles exceptionnels*

5.1. *Diagrammes. Énumération des types*

Selon la définition donnée plus haut, en 2.1, les quadrangles exceptionnels sont associés aux formes de type relatif C_2 et BC_2 des groupes algébriques exceptionnels. Nous verrons que ces quadrangles appartiennent à trois familles présentant entre elles des analogies de structure remarquables. L'exposé de ces observations, dans le cours, a suggéré à François Digne l'idée qu'il pourrait exister une quatrième famille possédant des propriétés tout à fait similaires, formée de quadrangles associés à des formes de groupes de type D_5 . Cela s'est aussitôt confirmé et dans la suite du présent résumé, suivant ce qui a été fait dans le

cours, je considérerai les formes de D_5 de type relatif BC_2 comme des groupes exceptionnels (nous verrons qu'il n'y a pas lieu d'y joindre les formes de type relatif C_2).

Selon [8], 2.3, on associe à tout groupe algébrique semi-simple G défini sur un corps k un *indice* constitué par un diagramme de Dynkin Δ , un groupe d'automorphismes Γ de Δ (induit par le groupe de Galois d'une clôture séparable de k , et d'ordre 2 au plus dans le cas qui nous intéresse) et une partie Δ_0 invariante par Γ de l'ensemble des sommets de Δ . Dans la représentation graphique que nous utilisons, les orbites de Γ dans Δ_0 , appelées *orbites isotropes*, sont entourées d'un cercle. À chaque sommet d'un diagramme de Dynkin est attaché un entier que nous appellerons ici sa « hauteur », à savoir le coefficient de la « racine simple » représentée par ce sommet dans la racine dominante. À une orbite de Γ dans Δ , nous attribuons aussi une hauteur : la somme des hauteurs de ses éléments. Ces hauteurs peuvent être lues dans les tables de [3].

Nous allons énoncer deux propriétés simples des indices des groupes qui nous intéressent : la première résulte d'un algorithme déjà utilisé dans des cours précédents pour déduire le type relatif d'un groupe de l'indice de ce groupe en comparant la racine dominante absolue et la racine dominante relative (cf. [13], 1.8 (d)) ; la seconde est conséquence immédiate de conditions d'admissibilité bien connues pour l'indice d'un groupe (cf. [8], 3.2.1, 3.2.2).

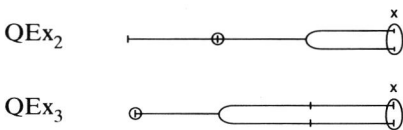
(i) L'indice d'un groupe de type relatif C_2 (resp. BC_2) comporte deux orbites isotropes dont les hauteurs sont 1 et 2 (resp. 2 et 2).

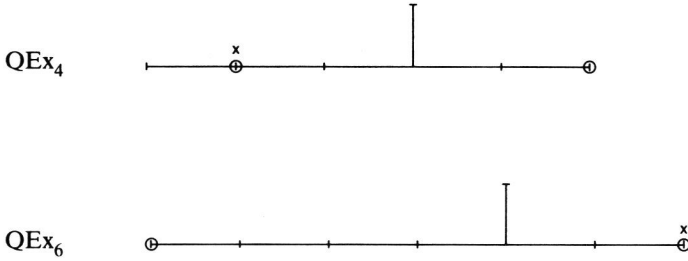
(ii) Si l'on note Δ le diagramme de Dynkin d'un groupe de rang relatif 2, α_i ($i = 0, 1$) les orbites isotropes de ce groupe et Δ_i le diagramme obtenu en retirant de Δ les éléments de α_i et les arêtes qui y aboutissent, alors α_i est invariant par l'involution d'opposition de Δ_{Γ_i} . (Rappelons que l'involution d'opposition d'un diagramme de Dynkin est l'automorphisme de ce diagramme qui conserve chaque composante connexe Δ' du diagramme et qui induit sur Δ' une transformation distincte de l'identité si et seulement si Δ' est de type A_n , $n \geq 2$, de type D_{2m+1} , $m \geq 3$, ou de type E_6 .)

De ces deux seules règles, on déduit aussitôt les conséquences suivantes.

Type C_2 . Les groupes exceptionnels G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 n'ont pas de formes de type relatif C_2 . Cela étant, il n'y a pas de raison de donner aux groupes D_5 de type relatif C_2 (il en existe évidemment !) le statut de groupes exceptionnels.

Type BC_2 . Les indices des groupes exceptionnels (type D_5 inclus) de type BC_2 sont inclus dans la liste suivante :



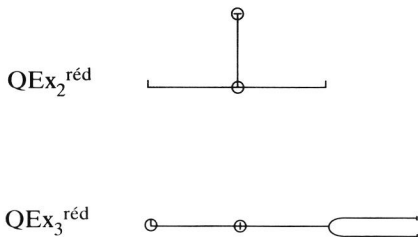


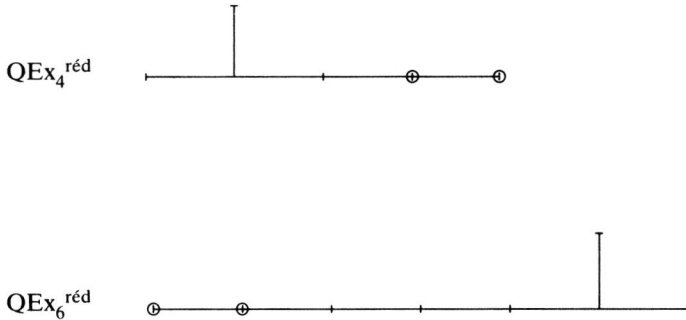
À ceux-ci, il nous faudrait *a priori* ajouter l'indice $\circ \rightleftarrows \circ$, car il ne viole pas les règles (i) et (ii), mais on sait que ce n'est pas un indice admissible (par exemple parce que $\rightleftarrows \circ$ ne l'est pas, pour de nombreuses raisons). Les orbites isotropes de l'indice d'un groupe sont en bijection canonique avec les racines simples relatives. Dans les diagrammes ci-dessus, l'orbite marquée d'une croix est celle qui correspond à la racine simple multipliable ; avec les notations de (ii) ci-dessus, l'orbite α_i est, ou non, marquée d'une croix selon qu'elle est de hauteur 2 ou 1 dans la composante connexe de Δ_{1-i} qui la contient.

L'explication des entiers indexant la notation QEx apparaîtra plus loin.

5.2. Réduction

Soit G un groupe de type relatif BC_2 comme ci-dessus. La réduction du quadrangle associé à G est aussi associée à un groupe algébrique simple que nous notons G^{red} . Il est facile de voir que l'indice de G^{red} peut se déduire de l'indice de G par l'opération suivante : on commence par adjoindre au diagramme de Dynkin le sommet représentant l'opposée de la racine dominante (sommet qui en fait le diagramme de Dynkin complété, ou « graphe de Dynkin complété » dans la terminologie de [3], p. 198), on encercle ce nouveau sommet, on retire du diagramme obtenu l'orbite isotrope marquée d'une croix (et les arêtes qui y aboutissent) et l'on ne conserve du diagramme résultant que la composante connexe contenant des orbites isotropes. Cela donne :





On constate que le groupe G^{red} (que nous ne considérons qu'à isogénie centrale près) est, dans chaque cas, le groupe orthogonal spécial d'une forme quadratique ordinaire d'indice de Witt 2 à $2i+4$ variables, où i est l'indice affectant QEx . Avec les conventions du §4, cela veut dire que QEx_i^{red} est un quadrangle de la forme $Q(K, id., X_0, q)$, où $\dim X_0 = 2i$ et q est une forme quadratique anisotrope.

5.3. Classification

Dans la suite, tous les groupes semi-simples dont il sera question seront considérés à isogénie centrale près ; notons que le quadrangle associé au groupe G introduit plus haut n'est pas affecté par une telle isogénie.

D'après [8], 2.7.1, ce groupe G est déterminé par son indice et son noyau anisotrope *semi-simple*. La comparaison des diagrammes de Dynkin de G et G^{red} montre que ce noyau est

Spin q si $i \neq 4$, et

Spin $q \times SL(H)$, où H est un corps de quaternions et $SL(H)$ le groupe dérivé du groupe multiplicatif de ce corps, si $i = 4$.

Loc. cit., 3.4.4, donne aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un indice et un noyau anisotrope donnés déterminent effectivement un groupe. Dans le cas présent, ces conditions s'expriment commodément à l'aide de l'algèbre de Clifford paire $Clif^+q$, de dimension 2^{2i-1} , de la forme quadratique q . Soit C un facteur simple de cette algèbre : c'est une algèbre de matrices sur un corps que nous notons K . La condition d'existence de G est alors la suivante :

si $i = 2$, $C = K$ est un corps de quaternions de centre k , de sorte que q est la forme quadratique norme réduite de ce corps et $Clif^+q \approx C \times C$;

si $i = 3$, K est une extension quadratique séparable de k , donc $\dim_K C = 2^4$;

si $i = 4$, $K = H$, corps de quaternions de centre k (le corps H est donc, on le voit déterminé par q), par conséquent, $\dim_K C = 2^4$;

si $i = 6$, $K = k$, donc $\dim C = 2^{10}$.

Soit $\Sigma(q)$ le C -module simple ; c'est un Spin q -module que nous appellerons, par abus de langage, le *module semi-spinoriel* de q . On voit que sa dimension est 2^i dans les trois premiers cas et 2^5 lorsque $i = 6$. La discussion a montré que le groupe G , donc le quadrangle de Moufang associé, est entièrement déterminé par la forme quadratique q ; cela nous permet de compléter la notation QEx_i en $\text{QEx}_i(q)$.

5.4. Les groupes U, U', \bar{U}, V

Il resterait, pour chaque quadrangle $\text{QEx}_i(q)$, à décrire les groupes U_z et à donner les relations de commutation entre eux. Faute de temps, on a dû se borner, dans le cours, à de brèves indications, mais la procédure à suivre est claire. Les groupes en question sont les groupes de points rationnels de k -groupes unipotents normalisés par un tore déployé maximal S de G ; ce sont donc des $Z(S)(k)$ -groupes, où $Z(S)$ désigne, comme d'habitude, le centralisateur de S . L'action de $S(k)$ fait de \bar{U}, V et U' (cf. 2.3) des k -espaces vectoriels, puis des $Z(S)(k)$ -modules, dont la structure est facile à déterminer à partir du diagramme de Dynkin : les caractères à travers lesquels $S(k)$ opère sont connus ; ce que l'on a vu du groupe G^{red} montre que U' est de dimension 1 (dans le cours, on en a donné une preuve différente) ; enfin, des considérations standard sur les diagrammes correspondant à chaque cas montrent que \bar{U} est le module semi-spinoriel défini en 5.3. Pour connaître U comme $Z(S)(k)$ groupe, il faut encore déterminer le cocycle décrivant l'extension centrale

$$\{1\} \rightarrow U' \rightarrow U \rightarrow \bar{U} \rightarrow \{1\},$$

ce qui se fait en utilisant la condition d'invariance par $Z(S)(k)$ et aussi la structure connue du groupe algébrique U sur « la » clôture algébrique de k . À ce stade, il est nécessaire de « rigidifier » U et V à l'aide d'épinglages appropriés. Ensuite, on détermine l'action du groupe de Weyl étendu \hat{W} sur $Z(S)(k)$, d'où l'on déduit l'action de $Z(S)(k)$ sur les groupes U_z . Les relations de commutation se déduisent à nouveau de l'invariance par $Z(S)(k)$ en s'aidant de la connaissance des relations de commutation entre sous-groupes radiciels « absolus » (de dimension 1) sur la clôture algébrique de k .

6. Conclusion

Pour conclure, nous pouvons à présent énoncer un programme en quatre points pour la détermination de tous les quadrangles de Moufang.

(i) Montrer que les seuls quadrangles indifférents sont ceux décrits au §3. Cela est fait dans [10].

(ii) Montrer que les seuls quadrangles non indifférents *réduits* sont les quadrangles classiques $Q(K, \sigma)$ et $Q(k, \text{id.}, X_0, q)$ (avec $\dim X_0 \geq 2$ si $\text{car } k = 2$). Un résultat proche de celui-là est établi dans [5], chapitre 5. Les deux familles de

quadrangles qui précèdent ne sont pas disjointes : soient K un corps de quaternions de centre k , q la forme quadratique norme réduite de K et σ une involution de K telle que l'espace vectoriel K_σ des « antitraces » soit de dimension 1 ; alors les quadrangles $Q(K, \sigma)$ et $Q(k, \text{id.}, K, q)$ sont isomorphes. Cet isomorphisme est une manifestation du *principe de trialité*, il se déduit aussi par réduction de l'isomorphisme entre le quadrangle classique $Q(K, \sigma, K, q)$ et le quadrangle exceptionnel $QEx_2(q)$.

(iii) Montrer que les seuls quadrangles non réduits ayant $Q(K, \sigma)$ pour réduction sont les $Q(K, \sigma, X_0, q)$.

(iv) Montrer que le quadrangle $Q(k, \text{id.}, X_0, q)$ n'est réduction d'un quadrangle Q non réduit que si $\dim X_0 = 4, 6, 8$ ou 12 et si q satisfait à l'une des conditions (i) à (iv) du n° 5.3, et que, de plus, l'« extension non réduite » Q est unique sauf dans le cas (i) de 5.3, où $Q(k, \text{id.}, X_0, q)$ est aussi de la forme $Q(K, \sigma)$ (cf. (ii) ci-dessus).

RÉFÉRENCES

[1] A. BOREL et J. TITS, *Groupes Réductifs* (Publ. Math. I.H.E.S., **27** (1965), 55-150).

[2] — et —, *Compléments à l'article : « Groupes réductifs »* (Publ. Math. I.H.E.S., **41** (1972), 253-276).

[3] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres IV, V et VI (Herman, Paris, 1968).

[4] F. BRUHAT et J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées* (Publ. Math. I.H.E.S., **41** (1972), 5-252).

[5] J. FAULKNER, *Groups with Steinberg relations and coordinatization of polygonal geometries* (Mem. Amer. Math. Soc., **10** (1977), 185).

[6] J. TITS, *Normalisateurs de tores. I. Groupes de Coxeter étendus* (Journal of Algebra, **4** (1966), 96-116).

[7] —, *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples* (Publ. Math. I.H.E.S., **31** (1966), 21-58).

[8] —, *Classification of algebraic semi-simple groups* (in Algebraic groups and discontinuous groups, Boulder, 1965, Proc. Symposia in Pure Math., **33** (1) (1966), 33-62).

[9] —, *Buildings of spherical types and finite BN-pairs* (Springer Lecture Notes in Math., **386**, 1974).

- [10] —, *Quadrangles de Moufang. I* (Prépublication, Paris, 1974).
- [11] —, *Classification of buildings of spherical types and Moufang polygons : a survey* (in *Teorie Combinatorie*, Roma 1973, vol. 1, Accad. Naz. dei Lincei, (1976), 229-246).
- [12] —, *Moufang octagons and the Ree groups of type 2F_4* (*Amer. J. Math.*, **105** (1983), 539-594).
- [13] —, *Résumé de cours* (*Annuaire du Collège de France*, 88^e année, 1987-1988, 85-100).
- [14] —, *Résumé de cours* (*Annuaire du Collège de France*, 94^e année, 1993-1994, 101-114).
- [15] —, *Moufang polygons, I. Root data* (*Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **1** (1994), 455-468).

MISSIONS

Exposés

— *Groupes algébriques semi-simples : théorie relative, classification et diagrammes*, quatre exposés, Besançon, octobre 1994.

— *The Monster as a group of symmetries*, colloque *Symmetrien*, Oberwolfach, janvier 1995.

— *Twin trees and twin buildings*, deux exposés, C.W.I. Amsterdam, sous l'égide de l'Institut Français d'Amsterdam, février 1995.

— *Exceptional simple algebraic groups of relative rank two*, deux exposés de séminaire, *ibid.*, février 1995.

Codirection avec P. Slodowy et T.A. Springer d'un Colloque intitulé *Algebraische Gruppen*, Oberwolfach (R.F.A.), avril 1995.

DISTINCTION

Élection comme membre de l'Ordre *Pour le Mérite für Wissenschaften und Künste* (R.F.A.), juin 1995.