Théorie des groupes

M. Jacques Tits, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Les *Arbres jumelés,* étudiés dans le cours de cette année, sont cas particuliers des « immeubles jumelés », qui avaient fait l'objet de deux cours précédents, de 1988 à 1990. L'introduction des immeubles jumelés, par Mark Ronan et l'auteur de ces lignes, a eu pour motivation principale le souhait d'appliquer à des immeubles non sphériques des méthodes qui avaient bien réussi dans l'étude des immeubles sphériques et, avant tout, les arguments faisant appel à la notion de chambres opposées. Puisque de telles chambres n'existent pas dans *un* immeuble non sphérique, l'idée a été de chercher les opposées d'une chambre d'un tel immeuble dans *un autre* immeuble, dit *jumelé* avec le premier. Mais au lieu de fonder la notion de jumelage sur celle d'opposition, il s'est avéré plus efficace d'utiliser une fonction définie sur les couples de chambres de deux immeubles, fonction mesurant en quelque sorte le « défaut d'opposition », et appelée *codistance* (voir [11],[12] et le n° 1.4 ci-dessous).

Les arbres jumelés sont les immeubles jumelés non sphériques de rang 2. Il serait cependant trompeur, parce que ce rang est le plus petit possible, de les présenter comme les immeubles jumelés non sphériques « les plus simples ». La situation est assez analogue à ce qu'elle est pour les immeubles sphériques. Dans les deux cas, les questions qui se posent en rang 2 ne sont pas plus simples qu'en rang supérieur, mais de nature différente. En rang ≥ 3, on peut avoir en vue des théorèmes généraux de classification (pour le cas sphérique, cf. [8]). En rang 2 au contraire, la famille de tous les immeubles sphériques (« polygones généralisés ») ou de tous les jumelages d'arbres est *sauvage* (au sens où ce mot est utilisé par exemple en théorie des carquois), défiant tout espoir de classification, même si, dans le cas des arbres jumelés, des procédés décrits dans [3] et [6] permettent *en principe* de construire tous les jumelages et donnent des aperçus intéressants sur la nature de la notion. Dans cette situation apparemment inextricable, une façon de progresser consiste à chercher des conditions « naturelles », dégageant des objets intéressants du fouillis ambiant. La condition d'homogénéité en les couples d'arêtes opposées, explorée au § 3, est de ce type, mais s'avère encore un peu faible pour atteindre le but que l'on vient de décrire. Comme dans le cas des polygones généralisés, la *condition de Moufang,* étudiée au § 4, semble être « la bonne » de notre point de vue : elle est satisfaite par tous les jumelages d'arbres qui se présentent « naturellement » dans d'autres domaines (voir notamment les exemples du § 5), et elle permet au moins un début de classification.

On voit que le cours s'est surtout intéressé aux jumelages ayant un « gros » groupe d'automorphismes. Signalons, sans y insister que cette propriété est loin d'aller de soi : un jumelage est dit *rigide* s'il ne possède d'autre automorphisme que l'identité et il est montré dans [6] que *tout arbre épais semi-homogène* (c'est-à-dire dont les sommets à distance paire ont même ordre, ce qui est une condition nécessaire à l'existence d'un jumeau) *possède* 2^{α} *classes d'isomorphismes de jumelages avec lui-même, où* α *désigne le cardinal de l'ensemble de ses sommets.* Par exemple, pour un arbre localement fini, ce nombre est la puissance du continu.

1. *Définitions et premières propriétés*

(On trouvera dans [5] des compléments d'informations sur les sujets abordés dans ce paragraphe et le suivant, et notamment les démonstrations de certaines assertions qui ne sont qu'esquissées dans ce Résumé).

1.1. *Arbres.* Un arbre Δ est un ensemble non vide $S = \mathrm{Som}\,\Delta$, l'ensemble des *sommets* de Δ, doté d'une *distance* $d : \Delta\times\Delta \to \mathbf{N}$ symétrique (i.e. $d(x,y) = d(y,x)$) possédant les propriétés suivantes, pour $x,y\in S$ et $n = d(x,y)$:

(A0) on a $n = 0$ si et seulement si $x = y$;

(A1) si $z\in S$ et $d(y,z) = 1$, alors $d(x,z) = n \pm 1$; il existe $z\in S$ tel que $d(y,z) = 1$ et $d(x,z)=n+1$;

(A2) si n n'est pas nul, il existe un unique sommet z tel que $d(y,z)=1$ et $d(x,z) = n-1$.

On remarque que, pour nous, un arbre, que l'on peut voir comme un graphe, n'a pas de « sommet pendant » (sommet n'ayant qu'un seul voisin) ; en particulier, il est infini. L'arbre Δ est dit *épais* si tout sommet x possède au moins trois voisins (sommets y tels que $d(x,y)=1$).

1.2. *Arbres jumelés.* Soient $\Delta_+ = (S_+,d)$ et $\Delta_- = (S_-,d)$ deux arbres (lorsqu'aucune confusion n'est à craindre les fonctions distance sont toutes représentées par la même lettre d). Une *codistance* entre Δ_+ et Δ_- est une fonction symétrique $d^* : S_+\times S_- \cup S_-\times S_+ \to \mathbf{N}$ telle que, pour $(x,y) \in S_+\times S_- \cup S_-\times S_+$,

(AJ1) si $z \in S_+\cup S_-$ et $d(y,z) = 1$ (ce qui sous-entend que y et z sont des sommets du même arbre Δ_+ ou Δ_-), alors $d^*(x,z) = d^*(x,y) \pm 1$;

(AJ2) si $d^*(x,y) \neq 0$, il existe un unique sommet z de l'arbre contenant y tel que $d(y,z) = 1$ et $d^*(x,z)=d^*(x,y)-1$.

Deux sommets à codistance 0 sont dits *opposés*. Si l'on interprète la relation d'opposition comme un « éloignement maximum », les axiomes (A2) et (AJ2) disent l'un et l'autre que *y possède un unique voisin plus proche de x que lui-même.*

Deux arbres dotés d'une codistance sont dits *jumelés.*

1.3. *Types.* Deux sommets d'un arbre (resp. de deux arbres jumelés) sont dits *de même type* si leur distance (resp. leur codistance) est paire. L'ensemble des sommets d'un arbre ou de deux arbres jumelés se partage ainsi en deux types que nous noterons toujours 0 et 1. Pour nous, le type des sommets fera partie de la structure d'un arbre ; autrement dit, parlant d'un arbre (ou de deux arbres jumelés), nous supposerons toujours donnée la bijection de l'ensemble des types sur $\{0,1\}$.

L'*ordre* d'un sommet d'un arbre (ou, plus généralement, d'un graphe) est défini comme le cardinal de l'ensemble des voisins de ce sommet. Si deux arbres sont jumelés, deux sommets opposés ont même ordre. Si l'un des arbres est épais, l'autre l'est aussi et l'on montre facilement que deux sommets de même type de l'un quelconque des deux arbres ont un opposé commun dans l'autre ; ils ont donc même ordre. Il s'ensuit que deux arbres épais jumelés sont semi-homogènes (c'est-à-dire que les sommets de même type ont même ordre) et isomorphes.

1.4. *Le point de vue « immobilier ».* Soit $\Sigma = (W,(s_i)_{i\in I})$ un système de Coxeter (cf. [1]). Un *immeuble* de type Σ est un ensemble $\mathscr{C}$ dont les éléments sont appelés *chambres,* doté d'une « distance » $d_{\mathrm{ch}} : \mathscr{C}\times\mathscr{C} \to W$ soumise à des axiomes bien connus, que nous ne rappelons pas (cf. par ex. [11] ou [12]). De même une *codistance* entre deux immeubles $(\mathscr{C}_+,d_{\mathrm{ch},+})$ et $(\mathscr{C}_-,d_{\mathrm{ch},-})$, définissant un *jumelage* entre eux est une fonction $d^*_{\mathrm{ch}} : \mathscr{C}_+\times\mathscr{C}_- \cup \mathscr{C}_-\times\mathscr{C}_+ \to W$ satisfaisant à des conditions que l'on trouve aussi dans les références citées. Deux chambres appartenant respectivement à $\mathscr{C}_+$ et $\mathscr{C}_-$ sont dites *opposées* si leur codistance est égale à 1. Si $I=\{0,1\}$ et si W est le groupe diédral infini $\langle s_0,s_1 \mid s_0^2 = s_1^2 = 1\rangle$, un immeuble (resp. une paire d'immeubles jumelés) de type Σ est un arbre (resp. une paire d'arbres jumelés), les chambres étant les arêtes ; dans ce cas, les indices « ch » des notations seront remplacés par « ar ». Indiquons la correspondance entre distances et codistances dans les deux approches.

Soient c et c' des arêtes distinctes d'un même arbre (resp. deux arêtes non opposées de deux arbres jumelés), x et x' les sommets respectifs de c et c' dont la distance (resp. la codistance) est minimale et $j\in\{0,1\}$ le type de x'. Alors, $d_{\mathrm{ar}}(c,c')$ (resp. $d^*_{\mathrm{ar}}(c,c')$) est l'élément de W de longueur $d(x,x')$ (resp. $d^*(x,x')$) dont l'expression réduite commence par s_j.

En sens inverse, soient c et c' comme ci-dessus, et x un sommet de c et x' un sommet de c' dont les types sont i et i' respectivement. Soit w la distance $d_{\mathrm{ar}}(c,c')$ (resp. la codistance $d^*_{\mathrm{ar}}(c,c')$). Alors $d(x,x')$ (resp. $d^*(x,x')$) $= \inf l(\langle s_i\rangle w\langle s_{i'}\rangle)$, où $l(\xi)$ désigne la longueur du mot réduit en s_0 et s_1 exprimant ξ.

Remarque. Le fait que les formules de transformation pour la distance et pour la codistance sont essentiellement les mêmes s'explique par les propriétés suivantes (valables en rang quelconque) :

— deux chambres d'un immeuble quelconque appartiennent toujours à un *appartement,* c'est-à-dire à un sous-immeuble de Coxeter (groupe de Coxeter doté de la distance $d_{\text{ch}}(w,w')=w^{-1}w'$) ;

— deux chambres de deux immeubles jumelés appartiennent toujours à des appartements opposés, c'est-à-dire entre lesquels la relation d'opposition est un isomorphisme ;

— si deux immeubles sont jumelés, la restriction de la codistance à deux appartements opposés est un jumelage de ceux-ci ;

— si l'on identifie deux immeubles de Coxeter jumelés par leur isomorphisme d'opposition, la codistance s'identifie à la distance.

2. *Bouts d'un jumelage*

2.1. Dans un arbre Δ, un *chemin* (sans rebroussement : cela sera toujours sous-entendu) est une suite de sommets (s_i) telle que $d(s_i,s_j) = |j-i|$. Ici, les indices i, j parcourent un intervalle I de $\mathbf{Z}$ qui peut être *fini, simplement infini* (par exemple, $\mathbf{N}$ ou $-\mathbf{N}$) ou doublement infini ($I=\mathbf{Z}$). L'ensemble sous-jacent (c'est-à-dire abstraction faite de l'indexation) d'un chemin doublement (resp. simplement) infini est appelé un *appartement* (resp. un *demi-appartement*).

2.2. Proposition 1. — *Soient Δ_+, Δ_- des arbres jumelés et $(x_i)_{i\in I}$ un chemin dans Δ_+.*

(i) *Si $y \in$ Som Δ_-, tout minimum local non nul de la suite $(d^*(y,x_i))$ est atteint à l'une de ses extrémités ; en particulier, si I = Z, tout minimum local de cette suite est nul.*

(ii) *Si cette suite n'a qu'un nombre fini de zéros, il en est de même de la suite $d^*(z,x_i)$ pour tout $z \in$ Som Δ_+.*

La preuve est facile et le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire. — *Pour un chemin $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ dans Δ_+, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(i) *il existe un sommet y de Δ_- tel que la suite $(d^*(y,x_i))$ n'ait qu'un nombre fini de zéros ;*

(ii) *pour tout sommet y de Δ_-, il existe un entier N tel que la suite $(d^*(y,x_i))_{i\geq N}$ soit strictement croissante.*

Nous disons qu'un chemin qui possède ces propriétés *tend vers* Δ_-.

2.3. *Demi-appartements alignés, associés, cofinaux*

Soient $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(x'_i)_{i\in\mathbf{N}}$ des chemins dans Δ_+ et Δ_- respectivement et c la borne inférieure des $d^*(x_i,x'_j)$. Les demi-appartements sous-jacents $D = \{x_i \mid i\in\mathbf{N}\}$ et $D' = \{x'_i \mid i\in\mathbf{N}\}$ sont dits

alignés si $d^*(x_i,x'_j) = i+j+c$ (d'où $c = d^*(x_0,x'_0)$),

associés s'ils sont alignés et, de plus, $c=0$,

et *cofinaux* si $\lim_{i\to\infty, j\to\infty} d^*(x_i,x'_j) = \infty$.

Les propriétés suivantes sont immédiates, vu la proposition 1 et les axiomes de la codistance.

(1) *Si D et D' sont alignés et si D_{prol} est le demi-appartement obtenu en prolongeant D « à gauche » (c'est-à-dire au-delà de x_0) par un chemin $(x_{-c}, \ldots, x_0)$ arbitraire de longueur c (avec, évidemment, $x_{-1} \neq x_1$), alors D_{prol} et D' sont associés.*

(2) *Si D et D' sont cofinaux, l'ensemble $X = \{(\alpha,\beta)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid d^*(x_\alpha,x'_\beta)=0\}$ est fini ; si X est vide, D et D' sont alignés et non associés ; si X est non vide et si $i,j\in\mathbf{N}$ sont tels que $i+j = \sup\{\alpha+\beta \mid (\alpha,\beta)\in X\}$, alors les sous-demi-appartements $[x_\alpha \mid \alpha\geq i\}$ et $\{x'_\beta \mid \beta\geq j\}$ de D et D' sont associés.*

(3) *Un sommet x de Δ_+ et un sommet x' de Δ_- arbitrairement choisis sont les origines de deux demi-appartements alignés ; ceux-ci sont uniques sauf si x et x' sont opposés.*

2.4. *Bouts*

2.4.1. Deux demi-appartements d'un même arbre sonts dits *cofinaux* s'ils ont un sous-demi-appartement commun. La cofinalité ainsi définie est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont appelées les *bouts* de l'arbre.

2.4.2. Soient Δ_+ et Δ_- deux arbres jumelés et $\mathscr{D}$ l'ensemble dont les éléments sont les demi-appartements de Δ_+ qui tendent vers Δ_- et les demi-appartements de Δ_- qui tendent vers Δ_+. La proposition suivante est immédiate :

PROPOSITION 2. — *Dans l'ensemble $\mathscr{D}$, la relation de cofinalité composée de celles définies en 2.3 et en 2.4.1 est une relation d'équivalence.*

Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées les *bouts du jumelage*. Par définition, l'ensemble des bouts du jumelage s'injecte canoniquement dans l'ensemble des bouts de chacun des deux arbres. Cela donne un sens à l'assertion heuristique : *les bouts du jumelage sont les bouts communs à Δ_+ et Δ_-.*

La proposition 2 est essentiellement la proposition 3.4 de [5], mais elle apparaît ici plus « évidente » que dans *loc. cit.* en raison de la préparation conceptuelle du n° 2.3.

2.5. *Appartements opposés et demi-appartements associés*

PROPOSITION 3. — *Soient Δ_+ et Δ_- des arbres jumelés et A un appartement de Δ_+. Tout sommet de Δ_- est opposé à un sommet de A au moins.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1 (i).

PROPOSITION 4. — *Soient Δ_+ et Δ_- des arbres jumelés et A, A' des appartements de Δ_+ et Δ_- respectivement. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) les bouts de A et A' sont des bouts du jumelage et ils coïncident ;

(ii) *chaque sommet de A' est opposé à un seul sommet de A.*

La preuve est facile.

Lorsque les propriétés (i) et (ii) sont satisfaites, les appartements A et A' sont dits *opposés*. Si x et x' sont des sommets opposés appartenant respectivement aux appartements opposés A et A', chacun des deux demi-appartements découpés par x dans A est manifestement associé à celui des deux demi-appartements découpés par x' dans A' qui a même bout que lui.

Soient $\{x,y\}$ une arête de Δ_+ et $\{x',y'\}$ une arête de Δ_-. Si ces arêtes sont opposées, soient, pour fixer les idées, x opposé à y' et y opposé à x', d'où $d^*(x,x') = d^*(y,y') = 1$, notons D_1, D'_1 (resp. D_2, D'_2) les demi-appartements alignés d'origine x,x' (resp. y,y') ; alors, les appartements constitués respectivement par D_1 et D_2 (connectés par $\{x,y\}$) et par D'_1 et D'_2 (connectés par $\{x',y'\}$) sont manifestement les seuls appartements opposés contenant les deux arêtes en question. Si maintenant $\{x,y\}$ et $\{x',y'\}$ ne sont pas opposées, on peut ordonner les deux couples de telle façon que $d^*(x,x')>d^*(x,y')=d^*(x',y)>d^*(y,y')$. Considérons alors un chemin $(x, y, y_2, ..., y_n)$ de longueur $n = d^*(x,x')-1$ débutant par x, y. On voit aussitôt que y_n et y_{n-1} sont respectivement opposés à x' et y' et que les (uniques) appartements opposés contenant (y_{n-1},y_n) et (x',y') contiennent respectivement (x,y) et (évidemment) (x',y'). Finalement, on a prouvé la

PROPOSITION 5. — *Une arête quelconque a de Δ_+ et une arête quelconque a' de Δ_- sont contenues dans des appartements opposés qui sont uniques si et seulement si a et a' sont opposées.*

3. *Automorphismes.* BN-*Paires jumelées*

3.1. *Rigidité.* — Il a été rappelé dans l'introduction de ce Résumé que l'on s'est principalement intéressé dans le cours aux jumelages d'arbres $J = (\Delta_+,\Delta_-,d^*)$ dont le groupe d'automorphismes est « relativement gros » ; c'est d'ailleurs ce qui se produit dans toutes les applications des jumelages qui ont été données jusqu'ici, peut-être parce que la notion est précisément apparue à l'occasion de recherches de théorie des groupes. Le théorème suivant, cas particulier d'un théorème sur les jumelages d'immeubles (cf. [11], théorème 1, [12], Theorem 1, et, pour le cas des arbres, [5], Theorem 4.1), limite cependant la taille du groupe des automorphismes d'un jumelage et donne, dans certains cas, le moyen de déterminer ce groupe (cf. les exemples du § 5).

THÉORÈME 1. — *Soient J un jumelage d'arbres et (x,y), (x',y') des arêtes opposées des deux arbres jumelés. Alors, le seul automorphisme de J fixant x', y' ainsi que tous les sommets du premier arbre qui sont voisins de x ou de y est la transformation identique.*

3.2. *Groupes d'automorphismes permutant transitivement les couples d'arêtes opposées. Les applications* v

Rappelons que, conformément aux conventions du n° 1.3, tous les automorphismes d'arbres et de jumelages que nous considérons préservent le type (0 ou 1) des sommets. D'autre part, sauf mention expresse du contraire, tous les arbres dont il sera question seront supposés épais.

Soient $J = (\Delta_+,\Delta_-,d^*)$ un jumelage d'arbres et G un groupe opérant sur J, c'est-à-dire doté d'un homomorphisme $\alpha : G \to \mathrm{Aut}\, J$. Supposons que G permute transitivement les couples d'arêtes opposées (a,a'), avec $a \in \mathrm{Ar}\Delta_+$, $a' \in \mathrm{Ar}\Delta_-$ (nous désignons par $\mathrm{Ar}X$ l'ensemble des arêtes d'un arbre X). Choisissons une fois pour toutes un tel couple, noté (a_+,a_-), et soient B_+ et B_- les fixateurs respectifs de a_+ et a_- dans G.

PROPOSITION 6 — *Le groupe G permute transitivement les couples d'arêtes (a,b) de Δ_+ ou de Δ_- à distance $d_{\mathrm{ar}}(a,b)$ donnée et les couples $(a,a') \in \mathrm{Ar}\Delta_+ \times \mathrm{Ar}\Delta_-$ à codistance $d^*_{\mathrm{ar}}(a,a')$ donnée.*

Cette proposition, conséquence immédiate de la proposition 5, établit des bijections canoniques

$$v_\epsilon : B_\epsilon\backslash G/B_\epsilon \to W \qquad (\epsilon = + \text{ ou } -)$$

$$v_{+-} : B_+\backslash G/B_- \to W \qquad \text{et} \qquad v_{-+} : B_-\backslash G/B_+ \to W.$$

Vu la définition de B_ϵ, il y a une bijection canonique de B_ϵ sur $\mathrm{Ar}\Delta_\epsilon$. Par abus de langage, nous parlerons parfois de l'arête gB_ϵ, pour $g \in G$; cette arrête possède un sommet de type 0 et un sommet de type 1 que nous notons respectivement $\sigma_0(gB_\epsilon)$ et $\sigma_1(gB_\epsilon)$. Il résulte de la discussion du n° 1.4 que, pour $i,j \in \{0,1\}$ et $g,g' \in G$, on a

$$(1)\ d(\sigma_i(gB_\epsilon), \sigma_j(g'B_\epsilon)) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ i=j \text{ et } g^{-1}g' \in B_\epsilon, \\ \inf l(\langle s_i\rangle\ v_\epsilon(B_\epsilon g^{-1}g'B_\epsilon)\langle s_j\rangle) + 1 \text{ sinon,} \end{cases}$$

et

$$(2)\ d^*(\sigma_i(gB_+), \sigma_j(g'B_-)) = \begin{cases} 0 \text{ si } i=j \text{ et } g^{-1}g' \in B_+B_-, \\ \inf l(\langle s_i\rangle\ v_{+-}(B_+g^{-1}g'B_-)\langle s_j\rangle) + 1 \text{ sinon,} \end{cases}$$

où l désigne la longueur des expressions réduites dans W.

3.3. Reconstitution du jumelage à partir des données $(G, B_\epsilon, \nu_\epsilon, \nu_{+-})$

Le n° 3.2 montre la voie à suivre pour cette reconstitution. Désignant, dans un premier temps, par σ_0 et σ_1 deux symboles « abstraits », on dote chacun des deux ensembles $\{\sigma_0,\sigma_1\} \times G/B_\epsilon$ d'une distance d_ϵ définie par la relation (1) (avec une assimilation de notations évidente) et l'on constate que, dans chacun de ces ensembles,

(3.3.1) *la relation* $\sim$ *définie par* $\xi\sim\xi'$ *si et seulement si* $d_\epsilon(\xi,\xi') = 0$ *est une relation d'équivalence*

On fait du quotient $S_\epsilon = (\{\sigma_0,\sigma_1\} \times G/B_\epsilon)/\sim$ l'ensemble des sommets d'un graphe Δ_ϵ — qui s'avère être un arbre — en prenant pour arêtes les images des couples $\{\sigma_0,\sigma_1\} \times \{gB_\epsilon\}$ par l'application canonique. Enfin, on constate que la fonction

(3.3.2) $d^* : (\{\sigma_0,\sigma_1\} \times G/B_+) \times (\{\sigma_0,\sigma_1\} \times G/B_-) \to \mathbf{N}$ définie par (2) (moyennant les mêmes conventions que ci-dessus) « passe au quotient »

et définit une fonction $d^* : S_+ \times S_- \to \mathbf{N}$ qui, une fois symétrisée, est la codistance du jumelage.

3.4. *Conditions d'existence*

Les considérations du n° 3.3 montrent que tout couple formé d'un jumelage d'arbres et d'une action d'un groupe G sur ce jumelage permutant transitivement les couples d'arêtes opposées peut être décrit par la donnée de deux sous-groupes B_ϵ de G (ϵ = + ou −) et de trois bijections $\nu_\epsilon : B_\epsilon\backslash G/B_\epsilon \to W$, $\nu_{+-} : B_+\backslash G/B_- \to W$ appliquant les doubles classes B_ϵ et B_+B_- sur l'élément neutre de W. Les conditions d'existence que nous avons en vue se formulent plus commodément en termes des applications $C_\epsilon : W \to B_\epsilon\backslash G/B_\epsilon$ et $C_{+-} : W \to B_+\backslash G/B_-$ inverses de celles-là (de sorte que, pour $w\in W$, $C_\epsilon(w)$ et $C_{+-}(w)$ désignent des doubles classes dans G).

THÉORÈME 2. — *Soient G, B_+, B_- comme ci-dessus et $C_\epsilon : W \to B_\epsilon\backslash G/B_\epsilon$ et $C_{+-} : W \to B_+\backslash G/B_-$ des applications surjectives. Comme toujours on note $l(\xi)$ la longueur du mot réduit représentant l'élément ξ de W. Pour que C_+, C_-, C_{+-} soient bijectives et que, leurs inverses étant notées ν_+, ν_-, ν_{+-}, la construction du n° 3.3 fournisse deux arbres (épais) et un jumelage d^* de ceux-ci, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies pour $w\in W$, $s\in\{s_0,s_1\}$ et ϵ = + ou − :*

(BNJ0) $C_\epsilon(1) = B_\epsilon$, $C_{+-}(1) = B_+B_-$, $C_\epsilon(s) \neq B_\epsilon$, $C_{+-}(s) \neq B_+B_-$;

(BN$_\epsilon$0) $|C_\epsilon(s)/B_\epsilon| \geq 2$;

(BN$_\epsilon$1) $C_\epsilon(ws) \subset C_\epsilon(w)C_\epsilon(s) \subset C_\epsilon(w) \cup C_\epsilon(ws)$;

(BNJ1) *si* $l(ws) < l(w)$, *on a* $C_{+-}(ws) = C_{+-}(w)C_-(s)$;

(BNJ1') *si* $l(sw) < l(w)$, *on a* $C_{+-}(sw) = C_+(s)C_{+-}(w)$.

3.5. *Remarques sur les conditions de l'énoncé précédent et esquisse de preuve du théorème 2*

(1) Il est facile de voir que si la construction du n° 3.3 fournit un jumelage d'arbres épais, alors les conditions de l'énoncé sont satisfaites. Dans la suite de ce numéro nous supposons qu'elles le sont.

(2) Vu ($BN_\epsilon 1$), toute double classe $C_\epsilon(w)$ est contenue dans un produit de doubles classes $C_\epsilon(s)$. La surjectivité de C implique donc que G est engendré par $C_\epsilon(s_0)$ et $C_\epsilon(s_1)$. Il s'ensuit que B_ϵ est un « sous-groupe de Tits » de G, au sens de [1], IV, § 2, exercice 3. Tous les résultats de cet exercice s'appliquent ici et, reproduisant *mutatis mutandis* la preuve du théorème 2 de [1], IV.2.4, on montre que la condition ($BN_\epsilon 1$) peut se préciser ainsi :

($BN_\epsilon 1'$) $C_\epsilon(w)C_\epsilon(s) = C_\epsilon(ws)$ ou $C_\epsilon(w) \cup C_\epsilon(ws)$ selon que $l(ws) >$ ou $< l(w)$,

que C_ϵ est injectif et que W s'identifie au groupe de Weyl du système (G,B_ϵ) (cf. l'exercice cité, g)). L'espace homogène G/B_ϵ est l'espace des chambres d'un immeuble de type $(W,(s_0,s_1))$ (cf. [12], 3.1), c'est-à-dire d'un arbre. On a ainsi obtenu deux arbres Δ_+ et Δ_-, et l'on vérifie sans difficulté qu'ils sont bien donnés par la construction du n° 3.3.

(3) On sait à présent que $C_\epsilon(w^{-1}) = C_\epsilon(w)^{-1}$ et l'on peut rendre le théorème 1 plus symétrique en introduisant la fonction C_{-+} définie par $C_{-+}(w^{-1}) = C_{+-}(w)^{-1}$.

(4) Multipliant à droite les deux membres de (BNJ1) par $C_-(s)$, utilisant (BN 1) et substituant ws à w, on trouve que

(BNJ_2) si $l(ws) > l(w)$, on a $C_{+-}(w)C_-(s) = C_{+-}(w) \cup C_{+-}(ws)$.

(5) Nous allons montrer que C_{+-} est injectif. Supposons le contraire et soient $w,w' \in W$, $w \neq w'$, tels que $C_{+-}(w) = C_{+-}(w')$, que $l(w) \leq l(w')$ et que $l(w)$ soit minimal avec ces propriétés. Si $w \neq 1$ et si s désigne le dernier facteur de l'expression réduite de w, les relations (BNJ1) et (BNJ2) entraînent que

$$C_{+-}(ws) = C_{+-}(w)C_-(s) = C_{+-}(w')C_-(s) \subset C_{+-}(w's) \cup C_{+-}(w'),$$

d'où $C_{+-}(ws) = C_{+-}(w's)$ ou $C_{+-}(w')$, en contradiction avec la minimalité de $l(w)$. Donc, w=1. Mais alors, si s' est le dernier facteur de l'expression réduite de w', on a, vu (BNJ2),

$$C_{+-}(w's') = C_{+-}(w')C_-(s') = C_{+-}(1)C_-(s') = C_{+-}(1) \cup C_{+-}(s'),$$

d'où $C_{+-}(1) = C_{+-}(s')$, en contradiction avec (BNJ0).

(6) La vérification du fait que la fonction d^* définie au n° 3.3 possède les propriétés d'une codistance est à présent facile.

(7) Un argument simple montre que la transitivité de G sur l'ensemble des couples d'arêtes opposées entraîne que l'arête de Δ_ϵ fixe par B_ϵ est unique. Notons-là a_ϵ et soient A_+ et A_- les appartements opposés contenant a_+ et a_- (cf. la proposition 5). Utilisant des propriétés des fonctions d_{ar} et d^*_{ar} que nous n'avons pas rappelées dans ce Résumé mais que l'on établit facilement en utilisant [12],

on montre qu'il existe des actions du groupe W sur les appartements A_+ et A_- définies par les relations suivantes, où $w,\ w' \in W$ et $\epsilon \in \{+,-\}$:

$$d_{\mathrm{ar}}(wa_\epsilon, w'a_\epsilon) = w^{-1}w',$$
$$d^*_{\mathrm{ar}}(wa_+, w'a_-) = w^{-1}w'.$$

Soit N le groupe des éléments de G stabilisant A_+ et A_-. L'invariance de la distance et de la codistance par N montrent que les permutations de A_+ et A_- induites par un élément n de N sont données par un même élément $\phi(n)$ de W, d'où un homomorphisme $\phi : N \to W$ qui est surjectif parce que, pour $w \in W$, tout élément g de G qui envoie a_+ et a_- sur $w(a_+)$ et $w(a_-)$ respectivement envoie A_+ et A_- sur les appartements opposés contenant $w(a_+)$ et $w(a_-)$, donc sur A_+ et A_- eux-mêmes ; on a donc $g \in N$ et $\phi(g) = w$. Finalement, pour $w \in W$, on a

$$C_\epsilon(w) = B_\epsilon.\phi^{-1}(w).B_\epsilon \quad \text{et} \quad C_{+-}(w) = B_+.\phi^{-1}(w).B_-.$$

Autrement dit, *(B_+,N) et (B_-,N) sont des BN-paires jumelées au sens de [12], 3.2.*

On remarque que les doubles classes modulo B_ϵ et modulo (B_+,B_-) peuvent toutes se décrire en termes d'un groupe N qui n'a pas été introduit au départ. La théorie des BN-paires jumelées contraste en cela avec celle des BN-paires simples (du moins pour les types non sphériques) : on sait en effet qu'il peut exister des « sous-groupes de Tits » ne provenant pas de BN-paires (cf. [12], 3.1, Exemple (b)).

Le fait que les conditions du théorème 2 « impliquent l'existence d'un groupe N » est une assertion de théorie des groupes, mais la preuve que nous en avons esquissée est partiellement géométrique, faisant intervenir les arbres. La traduction de cette preuve en termes de pure théorie des groupes ne semble pas évidente.

3.6. *Reconstitution du jumelage à partir du système (G,B_+,B_-)*

PROPOSITION 7. — *Le système (G, B_+, B_-) détermine le jumelage $(\Delta_+, \Delta_-, d^*)$.*

En effet, la référence à un exercice de [1], utilisée au nº 3.5 (2) ci-dessus, montre que (G,B_+) et (G,B_-) déterminent univoquement les arbres Δ_+ et Δ_-. Les arêtes de ces arbres représentées par B_+ et B_- sont opposées. Comme G permute transitivement les couples d'arêtes opposées, la donnée (G, B_+, B_-) détermine l'ensemble de ces couples, donc aussi le jumelage (cf. [5], p. 465).

Remarque. Parmi les choses qui ont été dites dans ce § 3, beaucoup s'étendent à des groupes de Weyl quelconques (cf. [12]).

4. *Arbres jumelés de Moufang*

4.1. *(D,D')-transitivité*

Soient Δ_+ et Δ_- deux arbres épais jumelés. Si $D = (x_0, x_1, \ldots)$ et $D' = (y_0, y_1, \ldots)$ désignent des demi-appartements alignés contenus dans Δ_+ et Δ_- respectivement, notons $U(D,D')$ le groupe de tous les automorphismes du jumelage fixant Ét x_i et Ét y_i pour $i \geq 1$, où Ét ξ représente l'« étoile de ξ », ensemble des arêtes contenant ξ. Ce groupe opère librement sur l'ensemble des chemins de longueur $c+1 = d^*(x_0,y_0)+1$ prolongeant D « à gauche » (c'est-à-dire au-delà de x_0). En effet, si $\Gamma = (x_{-c-1}, \ldots, x_0)$ désigne un tel chemin, il résulte de 2.3(1) que les arêtes (x_{-c-1},x_{-c}) et (y_0,y_1) sont opposées et les appartements opposés contenant ces arêtes (cf. Prop. 5) contiennent manifestement D et D' ; enfin, tout élément de $U(D,D')$ fixant Γ fixe ces deux appartements ainsi que Ét y_i pour $i \geq 1$, et est donc l'identité en vertu du théorème 1. On dira que le jumelage est *(D,D')-transitif* si le groupe $U(D,D')$ permute transitivement, donc simplement transitivement, les chemins de longueur $c+1$ en question, et qu'il possède la *propriété de Moufang* s'il est (D,D')-transitif pour tout couple (D,D') de demi-appartements alignés. Il est immédiat que *si D et D' sont associés, la (D,D')-transitivité et la (D',D)-transitivité sont équivalentes.*

4.2. *Les U_i*

Considérons deux appartements opposés $A_+ = (e_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ et $A_- = (f_i)_{i\in\mathbf{Z}}$, avec $d^*(e_i,f_j) = |i+j|$. Pour $i\in\mathbf{Z}$, posons $D_i = (e_i,e_{i+1}, \ldots)$, $D'_i = (f_i,f_{i+1}, \ldots)$, $\bar{D}_i = (\ldots, e_{i-1},e_i)$ et $\bar{D}'_i = (\ldots,f_{i-1},f_i)$. Les demi-appartements D_i et D'_j sont alignés si $i+j \geq 0$, tandis que $\bar{D}_i$ et $\bar{D}'_j$ sont alignés si $i+j \leq 0$. Posons $U_i = U(D_i,D'_{-i})$, $\bar{U}_i = U(\bar{D}_i,\bar{D}'_{-i})$, $U_{[-j,i]} = U(D_i,D'_j)$ ($= \{1\}$ si $i+j < 0$) et $\bar{U}_{[j,-i]} = U(\bar{D}_j,\bar{D}'_i)$ ($= \{1\}$ si $i+j > 0$). Les deux propositions suivantes se démontrent aisément. Ici et dans la suite, si X et Y désignent deux parties d'un groupe, nous notons $[X,Y]$ l'ensemble des commutateurs $xyx^{-1}y^{-1}$ pour x et y parcourant X et Y ; la double utilisation des crochets, qui désignent aussi des intervalles de $\mathbf{Z}$, ne devrait pas être source de confusion.

PROPOSITION 8. — *Pour $i+j \geq 1$ on a $[U_{-j},U_i] \subset U_{[-j+1,i-1]}$.*

PROPOSITION 9. — *Supposons le jumelage (D_i,D'_{-i})-transitif (resp. $\bar{D}_i,\bar{D}'_{-i}$)-transitif) pour tout i. Alors, il est (D_i,D'_j)-transitif pour $i+j \geq 0$ (resp. $(\bar{D}_i,\bar{D}'_j)$-transitif pour $i+j \leq 0$) et l'application produit :*

$$U_{-j} \times \ldots \times U_i \to U_{[-j,i]}$$

$$(\text{resp. } \bar{U}_j \times \ldots \times \bar{U}_{-i} \to \bar{U}_{[j,-i]})$$

est bijective.

La preuve se fait par induction sur $i+j$ (resp. $-i-j$).

PROPOSITION 10. — *Si le jumelage est (D_0,D'_0)-transitif et $(\bar{D}_0,\bar{D}'_0)$-transitif, il possède un automorphisme stabilisant A_+ et A_-, fixant e_0 et permutant e_1 et e_{-1}.*

En effet, par hypothèse, U_0 fixe e_0, f_0, e_1 et est transitif sur Ét $e_0 - \{e_1\}$ tandis que $\bar{U}_0$ fixe e_0, f_0, e_{-1} et est transitif sur Ét $e_0 - \{e_{-1}\}$. Le groupe engendré par U_0 et $\bar{U}_0$ fixe donc e_0 et f_0 et est doublement transitif sur l'étoile de e_0. Tout élément de ce groupe qui permute e_1 et e_{-1} permute D_0 et $\bar{D}_0$ (cf. 2.3(3)) ; il stabilise donc A_+ et par conséquent aussi A_- (vu la proposition 5).

Nous supposons désormais le jumelage (D_i,D'_{-i})*- et* $(\bar{D}_i,\bar{D}'_{-i})$*-transitif pour* $i = 0$ *et* 1 *;* il l'est alors pour tout i en vertu de la proposition précédente. Pour un entier i (resp. j) fixé, nous désignerons par $U_{(-\infty,i]}$ (resp. $U_{[j,\infty)}$) la réunion des $U_{[j,i]}$ pour $j \leq i$ et par $\bar{U}_{(-\infty,i]}$ (resp. $\bar{U}_{[j,\infty)}$) la réunion des $\bar{U}_{[j,i]}$ pour $j \leq i$. Géométriquement, $U_{(-\infty,i]}$ (resp. $\bar{U}_{[j,\infty)}$) est le groupe de tous les automorphismes du jumelage qui fixent Ét e_l pour $l>i$ (resp. $<j$) et Ét f_m pour tout m suffisamment grand (resp. suffisamment petit), et $U_{[-i,\infty)}$ (resp. $\bar{U}_{(-\infty,-j]}$) se caractérise exactement de la même façon en permutant seulement les e et les f.

THÉORÈME 3. — *L'action du produit libre des deux groupes* $U_{(-\infty,0]}$ *et* $U_{[1,\infty)}$ *qui prolonge les actions naturelles de ceux-ci sur le jumelage est fidèle et simplement transitive sur l'ensemble des arêtes de* Δ_- *opposées à* $\{e_0,e_1\}$.

C'est une conséquence de la variante suivante du lemme dit « du ping pong » (cf. [4]).

LEMME. — *Soient* X *un ensemble,* ☆ *un point de* X*,* (X_0,X_1) *une partition de* $X-\{☆\}$*,* P_0 *et* P_1 *deux groupes opérant sur* X *et* $\lambda : X \to \mathbf{N}$ *une fonction appelée « hauteur ». Supposons satisfaites les propriétés suivantes :*

(i) $\lambda^{-1}(0) = \{☆\}$ *;*

(ii) si $x \in X_i$ $(i = 0$ *ou* $1)$*, il existe un unique élément* p *de* P_i *tel que* $px \in X_{1-i} \cup \{☆\}$ *et l'on a* $\lambda(px) < \lambda(x)$*.*

Alors, pour son action évidente sur X*, le produit libre de* P_0 *et* P_1 *est simplement transitif (et, en particulier, fidèle).*

En effet, l'énoncé fournit, pour $x \in X_0$ (disons), une suite d'éléments g_1, g_2, g_3, ... appartenant alternativement à P_0, P_1, P_0,..., telle que les points g_1x, g_2g_1x, $g_3g_2g_1x$,..., tant qu'ils sont distincts de ☆, appartiennent alternativement à X_1, X_0, X_1,... et soient de hauteur strictement décroissante. Cette suite de points se termine donc, nécessairement en ☆, donc le produit libre de P_0 et P_1 est transitif sur X. Inversement, si h_1, h_2, h_3, ... appartiennent alternativement, disons, à $P_0-\{1\}$, $P_1-\{1\}$, ..., l'assertion d'unicité de (ii) implique que les points $h_1☆$, $h_2h_1☆$, ... appartiennent alternativement à X_1,X_0, ..., donc que $h_mh_{m-1}...h_1☆ \neq ☆$, d'où la simple transitivité.

Pour appliquer le lemme à la preuve du théorème, on fait les choix suivants :

— X est l'ensemble des arêtes de Δ_- opposées à $\{e_0,e_1\}$, ☆ étant l'arête $\{f_0,f_1\}$;

— si a est un élément de X distinct de ☆ et si y et f_i ($i = 0$ ou 1) sont les sommets des arêtes a et ☆ réalisant le minimum de la distance pour de tels sommets, alors $a \in X_i$ et $\lambda(a) = d(y,f_i)$.

COROLLAIRE. — *Le groupe engendré par les* U_i *et les* $\bar{U}_i$ $(i \in \mathbf{Z})$ *permute transitivement les couples d'arêtes opposées, donc aussi les couples d'appartements opposés et les couples de demi-appartements associés dont les origines sont de type donné. Le jumelage a la propriété de Moufang.*

Cela résulte du théorème, compte tenu de la proposition 5 et de 2.3 (3).

4.3. *Reconstitution du jumelage à partir des groupes* U_i *et* $\bar{U}_i$*. Automorphismes et isomorphismes*

Soient $\tilde{G}$ le groupe de tous les automorphismes du jumelage (Δ_+,Δ_-,d^*) (conservant le type des sommets, selon la convention générale du n° 1.3), et G^o le sous-groupe engendré par les U_i et les $\bar{U}_i$. D'après le corollaire précédent, G^o est aussi engendré par tous les $U(D,D')$, où D et D' sont des demi-appartements associés. Il s'ensuit que G^o est distingué dans $\tilde{G}$. Notons U^o le sous-groupe de G^o produit libre de $U_{(-\infty,0]}$ et $U_{[1,\infty)}$ (cf. le théorème 3).

PROPOSITION 11. — (i) *L'arête* $\{e_0,e_1\}$ *est la seule arête de* Δ_+ *fixe par* U_0 *et par* U_1*, donc aussi la seule arête fixe par* U^o.

(ii) Le fixateur de $\{e_0,e_1\}$ *dans* $\tilde{G}$ *est le normalisateur de* U^o *dans* $\tilde{G}$.

(iii) Le centralisateur de G^o *dans* $\tilde{G}$ *est réduit à l'élément neutre ; en particulier,* G^o *s'identifie à son image dans Aut* G^o.

(i) Cela résulte de ce que toute arête adjacente à $\{e_0,e_1\}$, donc aussi toute arête distincte de $\{e_0,e_1\}$, est bougée par un élément de U_0 ou par un élément de U_1.

(ii) Si un élement de $\tilde{G}$ fixe $\{e_0,e_1\}$, il transforme $\{f_0,f_1\}$ en une arête opposée à $\{e_0,e_1\}$ que l'on peut ramener sur $\{f_0,f_1\}$ par un élément de U^o, vu le théorème 3. Or, tout élément de $\tilde{G}$ fixant $\{e_0,e_1\}$ et $\{f_0,f_1\}$ fixe les appartements opposés A_+ et A_- qu'ils déterminent, donc normalise U^o.

(iii) est clair, vu (i) et la transitivité de G^o sur l'ensemble des arêtes (cf. le corollaire au théorème 3).

THÉORÈME 4. — *Il y a équivalence entre la donnée du jumelage* (Δ_+,Δ_-,d^*) *à isomorphisme près et celle du système de groupes* $(G^o\,;(U_i,\bar{U}_i)_{i\in\mathbf{Z}})$*. En particulier, deux jumelages sont isomorphes si les systèmes de groupes qui leur sont associés le sont. Si* $\tilde{G}_1$ *désigne l'intersection des normalisateurs des* U_i *et des* $\bar{U}_i$ *dans Aut* G^o*, on a (dans Aut* G^o*)* $\tilde{G} = G^o.\tilde{G}_1$.

Comme G^o et, *a fortiori*, $\tilde{G}$ permutent transitivement les couples d'appartements opposés, (Δ_+,Δ_-,d^*) détermine $(G^o\,;(U_i,\bar{U}_i))$ à isomorphisme près. Réciproquement, ce système de groupes détermine le fixateur de $\{e_0,e_1\}$ donc aussi, par symétrie, celui de $\{f_0,f_1\}$ dans G^o, vu la proposition 11 (ii) ; il détermine donc l'ensemble des couples d'arêtes opposées et, par conséquent, le jumelage (cf. [5], p. 465). (Une preuve plus explicite consisterait à reconstruire effectivement Δ_+ et Δ_- et à utiliser la formule $d^*(e_i,f_j) = |i+j|$.) La deuxième assertion résulte de la première et la troisième est conséquence du corollaire du théorème 3.

4.4. *Construction effective du jumelage à partir des groupes U_i et $\bar{U}_i$ $(i = 0,1)$; conditions nécessaires et suffisantes d'existence*

Une telle construction, qui découle facilement des résultats qui viennent d'être exposés, a été décrite dans un cours précédent (cf. [11], § 9) ; nous n'en rappellerons ici que les étapes essentielles dont nous aurons besoin au paragraphe suivant.

On part des quatre groupes du titre et l'on se donne « abstraitement » des groupes $L_i = \langle U_i,\bar{U}_i\rangle$ $(i = 0,1)$ engendrés respectivement par U_i et $\bar{U}_i$ ainsi qu'une action de l'intersection H_i des normalisateurs de U_i et $\bar{U}_i$ dans L_i sur L_{1-i}. Ces données doivent évidemment satisfaire aux conditions que l'on imagine : U_i et $\bar{U}_i$ sont conjugués dans L_i par un élément s_i tel que $L_i = H_iU_i \cup U_is_iH_iU_i$, et les sous-groupes U_{1-i} et $\bar{U}_{1-i}$ de L_{1-i} sont stables pour l'action de H_i sur ce dernier. Elles déterminent univoquement un groupe N et le système de tous les groupes U_j et $\bar{U}_j$ $(j\in\mathbf{Z})$ de façon suivante. Notons d'abord que le normalisateur N_i de la paire $\{U_i,\bar{U}_i\}$ dans L_i est invariant par l'action de H_{1-i} sur L_i que l'on s'est donnée. On définit alors N comme le quotient du produit libre de N_0 et N_1 par les relations exprimant (sous la forme de conjugaison) les actions ainsi définies de H_0 sur N_1 et de H_1 sur N_0. On montre que l'homomorphisme canonique de H_i dans N est injectif. Le système des U_j et des $\bar{U}_j$ est à présent déterminé à isomorphisme unique près par la condition que N opère sur ce système en permutant ces groupes entre eux de telle façon que N_i permute U_j et $\bar{U}_{2i-j}$ et opère sur $U_i \cup \bar{U}_i$ par conjugaison à l'intérieur de L_i, et que H_i normalise tous les U_j et $\bar{U}_j$ et opère sur U_{1-i} de la façon qui a été prescrite.

Les groupes U_j et $\bar{U}_j$ étant connus « canoniquement », on doit encore, pour achever la construction, se donner des applications « commutateurs » :

(0) $$[,] : U_0 \times U_j \to U_1U_2...U_{j-1} \text{ pour tout } j>0$$

et

(1) $$[,] : U_1 \times U_j \to U_2U_3...U_{j-1} \text{ pour tout } j>1.$$

Ici les produits de droite doivent d'abord (comme ceux de gauche) être interprétés comme des produits directs ensemblistes, mais les applications de commutation sont sujettes à la condition d'être compatibles avec l'existence d'un groupe $U_{[0,\infty)}$ contenant les U_j, dans lequel les produits en question ont leur signification habituelle et dont la loi de groupe soit donnée par ces relations de commutation et leurs transformées par les éléments de N qui induisent une « translation des U_i vers la droite » (ce qui implique en particulier que les lois de commutation choisies doivent être invariantes par H_0 et H_1).

Pour achever la construction selon le théorème 4 ou, plus exactement, selon la méthode décrite dans la preuve du théorème, il reste à donner le groupe G^o. En pratique, on détermine plutôt une extension centrale G^* de G^o, engendrée elle aussi par les U_j et les $\bar{U}_j$ et qu'il suffit ensuite de diviser par l'intersection des centralisateurs de ceux-ci. On a le choix entre deux procédés. Le premier est celui utilisé dans le cours précédent déjà cité (cf. [11], § 9) ; rappelons seulement ici qu'il fournit G^* comme un produit amalgamé de deux groupes P_1 et P_2 et que le sous-groupe commun à ceux-ci (sous-groupe amalgamé) n'est autre que le groupe B_+ du n° 3.4, lequel est ici le produit semi-direct de U^o (cf. 4.3) et du sous-groupe de N engendré par H_0 et H_1. Le second procédé, qui se fonde sur le théorème 2 de [9], consiste en une présentation de G^o par générateurs et relations : l'ensemble générateur est la réunion des U_j et des $\bar{U}_j$; les relations sont les relations internes à ces groupes, les relations entre U_i et $\bar{U}_i$ internes à L_i ($i = 0,1$), les relations de commutation fournies par les applications (0) et (1) ci-dessus et les transformées de toutes ces relations par les éléments de N.

Le groupe de tous les automorphismes d'un jumelage d'arbres de Moufang pour lequel on connaît le système $(L_i\,;U_i,\bar{U}_i)_{i=0,1}$ ainsi que les U_j ($j\in[0,\infty)$) et les commutateurs (0) et (1) ci-dessus, s'obtient, en général assez facilement, par application du théorème 4 (dernière assertion) et de la proposition suivante.

PROPOSITION 12. — *Le groupe $\tilde{G}_I$ du théorème 4 est le groupe des automorphismes du système $(L_i\,;U_i,\bar{U}_i)_{i=0,1}$ dont le prolongement (unique) à l'ensemble de tous les U_j ($j\in[0,\infty)$) respecte les applications de commutation (0) et (1).*

4.5. *Cas particulier : valuations jumelées*

Certains jumelages de Moufang peuvent être présentés commodément, à l'aide de valuations de « données radicielles de rang 1 ». Nous allons indiquer brièvement le principe de la méthode, sans toutefois donner le détail des définitions.

Les données radicielles et leurs valuations sont définies dans [2], 6.1 et 6.2. Seul le rang 1 nous intéresse ici mais, dans ce cas, les notions dont nous avons besoin sont un peu plus générales que celles de [2] ; pour simplifier, nous utiliserons les mêmes termes que dans [2], mais en leur donnant un sens un peu différent. Dans un groupe G, nous appelons *donnée radicielle de rang 1,* un couple de sous-groupe $\mathscr{U}$, $\bar{\mathscr{U}}$ dont l'intersection est réduite à $\{1\}$ et tel que, pour tout $u\in\mathscr{U}-\{1\}$, il existe un élément $m(u)\in\bar{\mathscr{U}}.u.\bar{\mathscr{U}}$ qui conjugue $\mathscr{U}$ sur $\bar{\mathscr{U}}$ et $\bar{\mathscr{U}}$ sur $\mathscr{U}$. Une *valuation* de cette donnée radicielle est le couple formé par une filtration $(\mathscr{U}_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ de $\mathscr{U}$ et une filtration $(\bar{\mathscr{U}}_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ de $\bar{\mathscr{U}}$ par des sous-groupes possédant les propriétés suivantes :

— la réunion des $\mathscr{U}_i$ est $\mathscr{U}$ et leur intersection est $\{1\}$; on a $\mathscr{U}_{i+1} \subsetneq \mathscr{U}_i$;

— si $u\in\mathscr{U}_i-\mathscr{U}_{i+1}$, alors $m(u)$ conjugue $\mathscr{U}_j$ sur $\bar{\mathscr{U}}_{j-2i}$ et $\bar{\mathscr{U}}_{j-2i}$ sur $\mathscr{U}_j$.

A une donnée radicielle de rang 1 valuée est associé un immeuble affine qui est un arbre ; *mutatis mutandis,* la définition est celle de [2], 7.4.2.

Reprenons maintenant les données et notations du n° 4.2, posons $\mathscr{U}_i = U_{(-\infty,-i]}$, $\bar{\mathscr{U}}_i = \bar{U}_{[i,\infty)}$, $\mathscr{U}'_i = U_{[i\,,\infty)}$, $\bar{\mathscr{U}}'_i = \bar{U}_{(-\infty,-i]}$ et soit $\mathscr{U}$ (resp. $\bar{\mathscr{U}}$) la réunion des $\mathscr{U}_i$ (resp. des $\bar{\mathscr{U}}_i$), qui est aussi celle des $\mathscr{U}'_i$ (resp. des $\bar{\mathscr{U}}'_i$) puisqu'elle est engendrée par tous les U_i (resp. les $\bar{U}_i$). Un cas particulier important de la situation que nous étudions est celle où $(\mathscr{U},\overline{\mathscr{U}})$ est une donnée radicielle de rang 1 et où $(\mathscr{U}_i,\overline{\mathscr{U}}_i)$ $(\mathscr{U}'_i,\overline{\mathscr{U}}'_i)$ en sont les valuations. Nous disons alors que ces valuations sont *jumelées*. Il est facile d'écrire des conditions pour que deux valuations d'une donnée radicielle de rang 1 soient jumelées mais nous ne le ferons pas ici. Les arbres associés aux deux données radicielles valuées sont évidemment les arbres Δ_+ et Δ_- dont on est parti. Le jumelage est aussi déterminé par les valuations jumelées ; on peut le voir par application du n° 4.3 en remarquant que, pour tout i, $U_i = \mathscr{U}_{-i} \cap \mathscr{U}'_i$ et $\bar{U}_i = \overline{\mathscr{U}}_i \cap \overline{\mathscr{U}}'_{-i}$.

5. *Exemples*

Terminons ce Résumé par la description de quelques exemples, dont une étude plus détaillée a occupé plusieurs heures du cours.

5.1. *Réseaux*

Soient K un corps (non nécessairement commutatif) doté d'une valuation discrète v, π une uniformisante, $\mathscr{O}$ l'anneau de valuation, V un espace vectoriel à deux dimensions sur K et S l'ensemble des classes d'homothétie de réseaux dans V (sous-$\mathscr{O}$-modules engendrés par une base de V). On sait que S est l'ensemble des sommets d'un arbre Δ (cf. [7], II.1.1). La distance des sommets représentés par deux réseaux Λ et Λ' s'obtient ainsi : on considère une base (x_1,x_2) de Λ et des entiers a, b tels que $(\pi^a x_1,\pi^b x_2)$ soit une base de Λ' ; la distance en question est alors $|b-a|$ (qui ne dépend que des sommets et non des représentants choisis).

Supposons maintenant que $K = k(t)$, où k est un corps et t une indéterminée. Considérons les deux valuations v_0 et v_∞ associées à t et t^{-1}, c'est-à-dire dont les anneaux de valuation sont $k[t]$ et $k[t^{-1}]$. Il leur correspond des arbres Δ_0 et Δ_∞. *A tout sous-*$k[t,t^{-1}]$*-module libre* M *de rang* 2 *de* V *est naturellement associé un jumelage* d^*_M *de ces deux arbres,* caractérisé par la propriété qu'un sommet de Δ_0 et un sommet de Δ_∞ sont opposés s'ils ont des représentants engendrés par une même base de M. On peut aussi définir directement la codistance : si Λ et Λ' sont respectivement un $k[t]$-réseau et un $k[t^{-1}]$-réseau dans V, et si a désigne le plus grand entier tel que $t^a\Lambda \cap \Lambda' \cap M$ soit non nul et b le plus grand entier tel que $t^b\Lambda \cap \Lambda' \cap M$ contienne une base de V, alors la codistance des sommets représentés par Λ et Λ' est $a-b$. Une description plus détaillée de cet exemple se trouve dans [5], § 2. (Signalons que dans la preuve de la Proposition 2.2 de *loc. cit.*, il y a lieu d'inverser l'ordre des choix de L'_+ et X'_+).

Une autre approche du même jumelage consiste à se référer au n° 3.6 ci-dessus. Pour pouvoir, sans problème, utiliser une terminologie reçue, faisons l'hypothèse que k est commutatif. Soient G le groupe $SL_2(k[t,t^{-1}])$ et B_+ (resp. B_-) l'image réciproque par la réduction modulo t, $SL_2(k[t]) \to SL_2(k)$ (resp. par la réduction modulo t^{-1}, $SL_2(k[t^{-1}]) \to SL_2(k)$), du groupe des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures). Alors, le triplet $(G\,;B_+,B_-)$ définit, au sens de la proposition 7, un jumelage d'arbres qui n'est autre que celui décrit ci-dessus, pour M le module engendré par la base utilisée pour définir le groupe SL_2.

L'espace des bouts du jumelage en question est la droite projective « à l'infini » de l'espace vectoriel V ; notons toutefois que deux points quelconques de cette droite ne sont pas nécessairement les bouts de deux appartements opposés (cf. [5], p. 473, *Example*).

Dans le cours, on a utilisé la méthode fournie par le théorème 4 et la proposition 12 afin de déterminer le groupe de tous les automorphismes du jumelage décrit ici, pour k commutatif. Le calcul n'est pas vraiment immédiat, mais le résultat est sans surprise : le groupe en question est engendré par les groupes suivants, opérant sur le jumelage de façon évidente :
— $\mathrm{PSL}_2(k[t,t^{-1}]) = \mathrm{SL}_2(k[t,t^{-1}])/\{\pm 1\}$,
— le groupe des matrices diagonales $\mathrm{Diag}(1,a)$ pour $a \in k^\times$,
— le groupe des « changements de paramètre » $t \mapsto at$ pour $a \in k^\times$,
— Aut k.

5.2. *Jumelages définis à partir des groupes* SU_3

Soient k un corps commutatif que, pour l'instant, nous supposons de caractéristique différente de 2, et G le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}_3(k[t,t^{-1}])$ relatif à l'automorphisme $\sigma : t \mapsto (-t)$ de l'anneau de base et à la forme hermitienne à trois variables $(x_{-1}, x_0, x_1) \mapsto x_{-1}^\sigma x_1 + x_0^\sigma x_0 + x_1^\sigma x_{-1}$. Pour $u, v \in k[t,t^{-1}]$ tels que $v^\sigma = -v$, notons $\upsilon(u,v)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & u & v - \frac{1}{2}u^\sigma u \\ 0 & 1 & -u^\sigma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe $\mathscr{U}$ constitué par les $\upsilon(u,v)$, et son transposé, que nous notons $\overline{\mathscr{U}}$, forment une donnée radicielle de rang 1 dans G. Notons ω (resp. ω') la valuation sur $k[t,t^{-1}]$ définie par $\omega(t^a f) = a$ (resp. $\omega'(t^a f) = -a$), où f désigne un polynôme en t (resp. t^{-1}) à terme constant non nul. Pour tout entier j, soient $\mathscr{U}_j$ (resp. $\mathscr{U}'_j$) le groupe des $\upsilon(u,v)$ tels que $\omega(v) \geq j$ (resp. $\omega'(v) \leq j$), et $\overline{\mathscr{U}}_j$ (resp. $\overline{\mathscr{U}}'_j$) le transposé de ce groupe. Chacun des systèmes de groupes $((\mathscr{U}_j, \overline{\mathscr{U}}_j)_{j\in\mathbf{Z}})$ et $((\mathscr{U}'_j, \overline{\mathscr{U}}'_j)_{j\in\mathbf{Z}})$ est une valuation de la donnée radicielle $(\mathscr{U}, \overline{\mathscr{U}})$; ces deux valuations sont jumelées (cf. le n° 4.5) et définissent donc des arbres jumelés qui ne sont autres que les immeubles affines des groupes $\mathrm{SU}_3(k((t)))$ et $\mathrm{SU}_3(k((t^{-1})))$, définis dans [2], cf. notamment le n° 10.1. Cet exemple se distingue de celui du numéro précédent en particulier par le fait que les U_j ne commutent pas tous entre eux.

Ici encore, la méthode décrite aux n$^{\text{os}}$ 4.3 et 4.4 permet de déterminer le groupe de tous les automorphismes du jumelage associé aux valuations jumelées que l'on vient de décrire. Le résultat est analogue à celui du n° 5.1.

Selon une méthode indiquée dans [10], p. 18, ces résultats peuvent être traduits sous une forme permettant de les étendre à un corps k de caractéristique quelconque. On pose $x_i = x_i' + tx_i''$, où x_i' et x_i'' parcourent $k[t^2,t^{-2}]$. On récrit alors la forme hermitienne en séparant les parties « réelle » et « imaginaire » ; la première est le double d'une forme quadratique q et la seconde est une forme alternée a. Ainsi SU_3 devient le groupe à six variables sur $k[t^2,t^{-2}]$ stabilisant la paire de formes q, a, dont tous les coefficients sont 1 ou –1. Défini ainsi, il garde son sens en toute caractéristique.

5.3. *Groupes de Kac-Moody*

Dans deux groupes abéliens libres de rang fini Λ et $\check{\Lambda}$ duaux l'un de l'autre, donnons-nous des systèmes de vecteurs $(e_i),(\check{e}_i)$, où i parcourt un ensemble fini I, tels que la matrice $A = (a_{ij})$ des produits scalaires $a_{ij} = \langle e_j,\check{e}_i\rangle$ soit une matrice de Cartan généralisée (cf. e.g. [9]). Une construction de *loc. cit.* associe à tout tel système $\mathscr{D} = (\Lambda,\check{\Lambda},(e_i),(\check{e}_i))$ et tout corps commutatif k un certain groupe G, *le groupe de Kac-Moody de type* $\mathscr{D}$ *sur* k, qui possède un couple de BN-paires jumelées (au sens de [12]). Le cas qui nous intéresse ici est celui où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a_{01} \\ a_{10} & 2 \end{pmatrix}$$

a_{01} et a_{10} étant des entiers négatifs dont le produit est ≥ 4 (la négativité ne jouant d'ailleurs guère de rôle) ; dans ce cas, en effet, les BN-paires en question définissent des arbres jumelés de Moufang. Notons que ce jumelage (mais non le groupe G) dépend seulement, à isomorphisme près, de la matrice A et du corps k, et non du système des e_j et $\check{e}_i$. Nous allons indiquer comment la construction du n° 4.4 se spécialise ici, en nous bornant, dans ce Résumé, à traiter le cas « général », qui s'avère être aussi le plus simple, où les entiers a_{01} et a_{10} sont l'un et l'autre différents de –1 et non tous deux égaux à –2 (notons que le cas où $a_{01} = a_{10} = -2$ n'est autre que celui traité au n° 5.2 par une méthode différente). Voici donc la spécialisation annoncée. Pour fixer les groupes $L_i = \langle U_i,\bar{U}_i\rangle$ $(i = 0,1)$, on se donne des épimorphismes $\phi_i : SL_2(k) \to L_i$ qui envoient les matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) unipotentes sur U_i (resp. $\bar{U}_i$), ce qui identifie canoniquement les U_i et les $\bar{U}_i$ au groupe additif de k. Pour tout élément x de k, notons x_i son image dans U_i, et pour $t \in k^\times$, désignons par t_i l'image par ϕ_i de la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(t,t^{-1})$. L'action par conjugaison de H_i sur U_{1-i} est donnée par $t_i u_{1-i} t_i^{-1} = (t^b u)_{1-i}$, où $b = a_{i,1-i}$. Les groupes U_j pour $j \neq 0,1$ sont obtenus de la façon décrite en 4.4 et il reste seulement à donner les applications de commutation 4.4 (0) et 4.4 (1). C'est ici que les hypothèses de « généricité » faites sur a_{01} et a_{10} interviennent : *sous ces hypothèses, les commutateurs en question sont triviaux* et la construction s'arrête là !

Le problème des isomorphismes et automorphismes se résoud facilement par la méthode des n^{os} 4.3 et 4.4, et connaissant les automorphismes de $SL_2(k)$. Signalons le résultat, un peu surprenant, que voici : si le corps k est infini, les entiers a_{01}, a_{10} et le corps k sont (à isomorphisme près, bien entendu) des invariants du jumelage d'arbres que l'on vient de décrire. Il n'en est pas de même lorsque k est fini (ceci est assez évident : il suffit d'observer que seules les classes de restes de a_{01} et a_{10} modulo Card $k-1$ jouent un rôle dans la construction).

5.4. *Une infinité non dénombrable de jumelages de Moufang non isomorphes d'arbres homogènes à sommets d'ordre 3*

On applique à nouveau la construction du n° 4.4. Les choix très particuliers que l'on va faire ont l'avantage qu'aucun « épinglage » n'est nécessaire et que les conditions de cohérence concernant les relations de commutation et les actions de H_i sur les U_j sont automatiquement satisfaites.

Ici, les groupes U_i et $\bar{U}_i$ sont d'ordre 2, les L_i $(i = 0,1)$ sont des groupes symétriques $\mathfrak{S}_3$, de sorte que les N_i sont d'ordre 2 et les H_i sont triviaux. Il s'ensuit que $(U_j,\bar{U}_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ est un système de groupes d'ordre 2 sur lequel le groupe N, qui est diédral infini, opère de façon évidente. Pour décrire le jumelage, il suffit donc de se donner les applications 4.4 (0) et (1). Notons e_i l'élément non neutre de U_i, pour tout entier impair $j \geq 3$ choisissons un ensemble E_j de nombres pairs contenus dans l'intervalle $[1,j]$, et posons les relations de commutation suivantes :

e_0 commute avec tous les U_j (autrement dit, les applications 4.4 (0) sont toutes triviales) ;

pour j impair ≥ 3, $[e_1,e_j] = \Pi\{e_l \mid l\in E_j\}$.

Il est immédiat que ces relations et leurs transformées par les translations (éléments d'ordre infini) dans N définissent bien un groupe $U_{[0,\infty)}$ (et même un groupe $U_{[i,\infty)}$ pour tout entier i), et conduisent finalement à un jumelage d'arbres homogènes à sommets d'ordre 3. Le théorème 4 et la proposition 10 entraînent immédiatement les assertions suivantes :

les jumelages obtenus à partir de deux systèmes d'entiers pairs (E_j) et (E_j'), $j\in 2\mathbf{N}+3$, sont isomorphes si et seulement si $E_j = E_j'$ pour tout j ;

le groupe de tous les automorphismes du jumelage que l'on vient de définir est le groupe engendré par les U_j et les $\bar{U}_j$ pour $j\in\mathbf{Z}$.

J.T.

Appendice : multijumelages

Dans un exposé en marge du cours (janvier 1996), J.-P. Serre a montré comment l'exemple du n° 5.1 ci-dessus peut se comprendre et se généraliser (en sortant du cadre strict des jumelages) en termes de fibrés vectoriels de rang 2 sur la droite projective, voire sur une courbe. Le texte suivant, reproduit ici avec son accord, est extrait d'une lettre qu'il a écrite à ce sujet à G. Rousseau, le 26.5.96.

La référence entre crochets renvoie à la bibliographie placée en fin de ce Résumé de cours.

... Il va être question de *multijumelages* associés aux fibrés vectoriels de rang 2 sur la droite projective, mais il est plus clair de démarrer avec une courbe C (projective, lisse, absolument connexe) sur un corps k. Je note K le corps des fonctions de C, et g son genre. Pour simplifier, je suppose que C a au moins un point rationnel sur k ; cela entraîne que l'invariant que j'appelle « e » dans [7] (Chap. II, n° 2.2, p. 135) est égal à 1.

Soit E un fibré vectoriel de rang 2 sur C. On lui associe un invariant $N(E)$ qui est un entier $\geq -2g$, où g est le genre de C (cf. *loc. cit.*, prop. 6). La définition de $N(E)$ est :

$$N(E) = \sup (\deg(F) - \deg(E/F)),$$

où F parcourt les sous-fibrés de rang 1 de E. En fait, pour la suite, il sera plus suggestif (vu les notations générales de Tits) d'écrire $d^*(E)$ au lieu de $N(E)$, car cet invariant a les propriétés d'une « codistance ». Voici quelques propriétés utiles de $d^*(E)$:

(1) Si $d^*(E) > 0$, il y a *un seul sous-fibré* F tel que $d^*(E) = \deg(F) - \deg(E/F)$ (cf. *loc. cit.*).

(2) Si $d^*(E) > 2g - 2$ (ce qui est le cas si $g = 0$), alors E est *décomposable* en somme directe $F \oplus F'$ de deux fibrés de rang 1.

(3) Soient x un k-point de C, $E(x)$ la fibre de E en x, qui est un k-espace de dimension 2, et D une droite de $E(x)$. Les sections locales de E dont la valeur en x appartient à D forment un faisceau localement libre de rang 2. Notons E_D le fibré vectoriel correspondant. (On a envie de dire que E et E_D sont « x-voisins », à la Kneser.) Le résultat suivant n'est pas difficile :

Supposons que $d^*(E) > 0$, et soit F son sous-fibré de rang 1 canonique (cf. plus haut). Pour $x \in C(k)$ fixé, il existe une droite D et une seule de $E(x)$ telle que $d^*(E_D) = d^*(E) + 1$; cette droite est la fibre de F en x. Pour toute autre droite de $E(x)$, on a

$$d^*(E_D) = d^*(E) - 1.$$

Je vais maintenant me borner au cas où C est la droite projective $\mathbf{P}_1$; cela assure que les valeurs prises par d^* sont $\geqslant 0$, ce qui est rassurant, vu les axiomes de la théorie du jumelage ! D'après (2), tout fibré E est décomposable :

$$E = L_a \oplus L_b,$$

où je note L_a le fibré de rang 1 de degré a (celui qui correspond au faisceau « $O(a)$ »). Si l'on suppose $a \leqslant b$, le couple (a,b) ne dépend pas de la décomposition choisie, et l'on a

$$d^*(E) = b - a.$$

Si $d^*(E) > 0$, le « F » correspondant est L_b, qui est canonique.

J'en viens maintenant aux *multijumelages*. Soit X un sous-ensemble fini non vide de $C(k) = \mathbf{P}_1(k)$. Notons A la sous-k-algèbre de K formée des fonctions dont les pôles sont contenus dans X (i.e. l'algèbre affine de la courbe affine $C_X = C - X$). Le cas qui intéresse Tits est celui où $K = k(t)$, $X = \{0,\infty\}$ et $A = k[t,t^{-1}]$. On se donne en outre un A-module libre M de rang 2, et l'on note V le K-espace vectoriel

$$V = K \otimes_A M$$

(M est un fibré de rang 2 sur $C - X$ et V est sa fibre générique).

Chaque $x \in X$ définit une valuation discrète v_x sur K, d'où une notion de x-réseau (O_x-réseau serait plus correct) dans V, d'où aussi un *arbre* de Bruhat-Tits, noté T_x. Le multijumelage qui m'intéresse va relier entre eux les T_x, pour $x \in X$. De façon précise, on va définir une fonction « codistance »

$$d^* : \Pi\, \mathrm{Som}(T_x) \to \mathbf{Z}$$

de la façon suivante :

Si $\mathbf{z} = (z_x)$ est un point de $\Pi\, \mathrm{Som}(T_x)$, on choisit pour chaque x un réseau R_x représentant z_x. Les R_x et les localisés de M forment un faisceau localement libre de rang 2 sur C (on a « prolongé » le fibré M à C tout entier, grâce aux R_x). D'où un fibré $E(M,(R_x))$, ce qui donne un sens à l'entier $d^*(E(M,(R_x)))$. Cet entier *ne dépend que de M et du point* $\mathbf{z}$. En effet, si l'on remplace R_x par $c.R_x$, avec $c \in K^\times$, le fibré $E = E(M,(R_x))$ est remplacé par un fibré de la forme $E \otimes L$, avec L de rang 1, ce qui ne change pas l'invariant $d^*(E)$. Je noterai $d^*(\mathbf{z})$ l'entier ainsi associé à $\mathbf{z}$. On a ainsi obtenu une application :

$$d^* : \Pi\, \mathrm{Som}(T_x) \to \mathbf{Z},$$

et c'est la *codistance* que je voulais. Elle a les propriétés suivantes :

(1) $d^*(\mathbf{z}) \geqslant 0$ pour tout $\mathbf{z}$.

(2) Disons que $\mathbf{z}$ est *x-voisin* de $\mathbf{z}'$ si $z_y = z'_y$ pour tout $y \in X$ tel que $y \neq x$, et si $d(z'_x,z_x) = 1$ dans l'arbre T_x. Alors :

(2.1) Si $d^*(\mathbf{z}) = 0$, on a $d^*(\mathbf{z}') = 1$ pour tout $\mathbf{z}'$ qui est x-voisin de $\mathbf{z}$.

Cela se déduit immédiatement des propriétés de $d^*(E_D)$ données plus haut.

(2.2) Si $d^*(\mathbf{z}) > 0$, il existe (pour $x \in X$ fixé) un et un seul $\mathbf{z}'$ qui soit x-voisin de $\mathbf{z}$ et tel que $d^*(\mathbf{z}') = d^*(\mathbf{z}) + 1$. Pour les autres $\mathbf{z}'$ qui sont x-voisins de $\mathbf{z}$, on a $d^*(\mathbf{z}') = d^*(\mathbf{z}) - 1$.

Lorsque X a deux éléments, on reconnaît les axiomes d'un *jumelage* au sens de Ronan-Tits. On peut donc parler d'un « multijumelage ».

Dernière remarque : le groupe $\mathrm{GL}_K(V)$ opère sur les arbres T_x, et son sous-groupe $\mathrm{GL}_A(M) \simeq \mathrm{GL}_2(A)$ opère *en préservant le multijumelage...*

J.-P. S.

Références

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie,* chapitres IV, V et VI (Herman, Paris, 1968).

[2] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées (Publ. Math. IHES,* **41** (1972), 5-252).

[3] D. G. Fon-Der-Flaass, *A combinatorial construction for twin trees (Europ. J. Combinatorics,* **17** (1996), 177-189).

[4] P. de la Harpe, *Free groups in linear groups (L'Enseignement Math.,* **29** (1983), 129-144).

[5] M. Ronan and J. Tits, *Twin trees. I (Inventiones Math.,* **116** (1994), 463-479).

[6] — —, *Twin trees II* (en préparation).

[7] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2 *(Astérisque,* **46** (1977)).

[8] J. Tits, *Buildings of spherical types and finite BN-pairs (Springer Lecture Notes in Math.,* **386** (1974)).

[9] —, *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields (Journal of Algebra,* **105** (1987), 542-573).

[10] —, *Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody* (Séminaire Bourbaki n° 700, 1988-1989, *Astérisque,* **177-178** (1989), 7-31).

[11] —, *Résumé de cours (Annuaire du Collège de France,* 89e année, 1988-1989, 81-96).

[12] —, *Twin buildings and groups of Kac-Moody type (in* « Groups, Combinatorics and Geometry », Durham, 1990, *London Math. Soc., Lecture Notes Series,* **165** (1992), 249-286).

Séminaire

En conclusion du cours de l'année dernière (§ 6 du *Résumé de cours*), j'ai formulé un programme en quatre points visant à la classification des quadrangles de Moufang, mon projet étant de prendre les étapes décrites dans ce programme comme sujets de séminaires pendant les trois ou quatre prochaines années. La première étape, menée à bien cette année-ci, était la détermination des « quadrangles indifférents ». Le théorème qui a été démontré, version légèrement modifiée d'un résultat exposé dans une prépublication restée inédite, datant de 1974, est le suivant.

Dans un groupe quelconque, soient U_i *(*$i \in \mathbf{Z}$*,* $U_i = U_{i+8}$*) huit sous-groupes ordonnés cycliquement, satisfaisant pour tout i aux conditions suivantes, où* [,] *désigne le commutateur :*

$[U_i, U_{i+1}] = [U_i, U_{i+2}] = \{1\}$;

$[U_i, U_{i+3}] \subset U_{i+1}.U_{i+2}$;

pour $u \in U_i - \{1\}$, *il existe un élément de* $U_{i+4}.u.U_{i+4}$ *qui conjugue* U_j *sur* U_{2i+4-j} *pour tout* j :

$U_i \not\subset U_{i+4}$.

Alors, il existe des corps K_s $(s = 0, 1)$ *de caractéristique* 2, *des homomorphismes* $\alpha_s : K_s \rightarrow K_{1-s}$ *(faisant donc de* K_{1-s} *un* K_s*-espace vectoriel) tels que le composé* $\alpha_{1-s} \circ \alpha_s : K_s \rightarrow K_s$ *soit l'élévation au carré (pour* $s = 0$ *et* 1*), des sous-espaces vectoriels* $L_s \subset K_s$ *et des isomorphismes de* L_0 *sur les* U *d'indice pair et de* L_1 *sur les* U *d'indice impair tels que, notant* x_i *l'image d'un élément* x *de* $L_0 \cup L_1$ *dans* U_i *par l'isomorphisme qui le concerne, on ait, pour* $i \in \mathbf{Z}$, $x \in L_s$, $y \in L_{1-s}$, $s \equiv i \pmod 2$,

$$[x_i, y_{i+3}] = (xy)_{i+1}.(yx)_{i+2}.$$

Les produits xy et yx sont bien définis, et appartiennent respectivement à L_{1-s} et à L_s, parce que L_{1-s} (resp. L_s) est un espace vectoriel sur K_s (resp. K_{1-s}), lequel contient L_s (resp. L_{1-s}).

Missions

Séjour de trois mois à l'Université Yale, New Haven, Connecticut (USA), du 15 septembre au 15 décembre 1995.

Cours

— *Twin buildings and groups of Kac-Moody types,* 25 leçons, Yale University, septembre-décembre 1995.

Exposés

— *Forms of exceptional simple algebraic groups,* Université d'Ottawa, octobre 1995.

— *A fixed point theorem for buildings,* Yale U., Colloquium, octobre 1995 ; 1995 Adrian Albert Lectures (2 exposés), University of Chicago, novembre 1995.

— *On some forms of exceptional simple algebraic groups,* 1995 Adrian Albert Lectures (2 exposés), University of Chicago novembre 1995.

— *On the structure constants of simple Lie algebras,* Algebra Seminar, Yale U., novembre 1995.

— *Groupes classiques et immeubles,* Colloque : « Matériaux pour l'histoire des mathématiques au vingtième siècle », dédié à la mémoire de Jean Dieudonné, Nice, Janvier 1996.

— *The theorem of Bruck and Kleinfeld,* Colloque : « Tits buildings and related geometries », Gand, mars 1996.

— *Twin trees,* Colloque sur la Théorie des immeubles, Oberwolfach, RFA, avril 1996.

— *Le problème de la conjugaison pour les groupes de Coxeter (d'après D. Krammer),* Séminaire Chevalley, Paris, juin 1996.