Théorie des groupes

M. Jacques Tits, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

COURS

Le cours de cette année avait pour titre : *Homomorphismes « abstraits » de groupes algébriques.*

A. Position du problème. Historique, orientation nouvelle et perspectives

1. Le problème auquel ce titre se réfère est la détermination, sous certaines conditions, de tous les homomorphismes de groupes (abstraits) $\alpha : G(k) \to H(K)$, où k et K sont des corps commutatifs et G et H sont respectivement un k-groupe et un K-groupe. Il va de soi que l'on ne peut rien dire d'intéressant sur le problème posé en des termes aussi généraux. En revanche, de très nombreux travaux ont été consacrés depuis près de 70 ans, et jusqu'à ces dernières années, à l'étude de cas particuliers importants. Citons :

(i) divers cas où G et H sont des groupes classiques et α est supposé bijectif (autrement dit, détermination des isomorphismes et, en particulier, des automorphismes de divers groupes classiques) étudiés par Schreier, van der Waerden, Dieudonné, Hua, O'Meara et quelques autres (le livre [4] de J. Dieudonné donnait l'état de la question en 1960) ;

(ii) le cas où k=K=**R** et où l'on suppose G et H absolument presque simples et α bijectif (résultat de H. Freudenthal [5] qui montre, sous des conditions d'ailleurs un peu plus générales, que α est alors un isomorphisme topologique) ;

(iii) le cas où k=K=**R**, $G(k)$ est un groupe de Lie semi-simple et $H(K)$ est compact (résultat de E. Cartan [3], von Neumann et van der Waerden montrant que, dans ces conditions, α est continu ; on trouvera un énoncé plus général dans [1]).

2. Les deux derniers résultats qui viennent d'être cités (§ 1, (ii) et (iii)) mettent en évidence l'un des buts poursuivis par ces recherches : on veut montrer que,

dans certains cas (pour des groupes semi-simples le plus souvent), une structure de groupe « abstrait » porte en elle une structure plus riche (de groupe topologique par exemple) : le titre de l'article [5] de Freudenthal exprime bien cette situation. Cette remarque s'applique également au cas (i) du § 1 et à l'article [1] dont il va être question ci-dessous. Dans les deux cas, la « structure plus riche » est une structure de variété algébrique, incluant la donnée du corps de base.

Jusqu'à présent, il a surtout été question d'isomorphismes (même si (iii) dépassait un peu ce cadre). Dans [1], A. Borel et l'auteur se sont intéressés aux homomorphismes $\alpha : G^+ \to H(K)$ à image dense pour la topologie de Zariski : ici, G et H sont absolument presque simples et G^+ désigne le sous-groupe de $G(k)$ engendré par les $A(k)$, où A parcourt l'ensemble de tous les k-sous-groupes additifs de G (on note que l'hypothèse de densité implique que, pour l'existence de tels homomorphismes, il est nécessaire que G soit isotrope). Faisons l'hypothèse simplificatrice, mais non essentielle, que G est simplement connexe et H est adjoint. Alors, le théorème principal de [1] fournit *une décomposition unique* $\alpha = \beta \circ \phi_*$, *où* $\phi : k \to K$ *est un homomorphisme de corps,* ${}^{\phi}G$ *désigne le* K*-groupe déduit de* G *par le changement de base* ϕ, $\beta : {}^{\phi}G \to H$ *est une* K*-isogénie de différentielle non nulle et* ϕ_* *est le monomorphisme canonique* $G(k) \to {}^{\phi}G(K)$ *associé à* ϕ, *restreint à* G^+. En gros, on peut dire que *tout homomorphisme abstrait à image dense du type considéré est semi-algébrique, et l'est de façon « presque unique ».*

3. Le cours s'est intéressé à ce qui se passe lorsque l'on abandonne l'hypothèse de densité de l'image ou, ce qui revient au même, toute hypothèse sur la structure du groupe algébrique H car, α étant donné, H peut toujours être remplacé par l'adhérence de $\alpha(G(k))$.

Initialement, mon intention était de décrire tous les homomorphismes $\alpha : G(k) \to H(K)$ dans le cas où G est quasi-déployé et k infini. Cependant, la preuve des résultats dépendait d'une question posée dans le cours et à laquelle J.-P. Serre a, peu après, apporté une réponse négative (voir § 4 ci-dessous). Cela n'empêche pas la description envisagée d'être souvent valable, mais la discussion qui a eu lieu a montré qu'il y avait avantage à modifier quelque peu le point de vue pour obtenir des énoncés plus généraux. Dans ce résumé, plutôt que de faire le bilan des cas où la description initiale reste valable telle quelle, je préfère indiquer comment le problème se pose à présent et énoncer, sous forme conjecturale, ce que je crois être vrai.

4. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. Le problème de la description de tous les homomorphismes $\alpha : G(k) \to H(K)$ (à image dense pour la topologie de Zariski, hypothèse non restrictive comme on l'a déjà observé) peut se décomposer en deux :

— décrire tous les homomorphismes $G(k) \to H(\bar{K})$;

— parmi les homomorphismes en question, déterminer ceux dont l'image est contenue dans $H(K)$ (problème du corps de définition).

Dans le cours, on n'a pas abordé ce second problème (qui est, dans bien des cas, plus facile à résoudre). Nous supposerons donc, désormais, que le corps K est algébriquement clos. Suivant Serre (lettre du 22.1.97), appelons *K-anneau* une K-variété affine lisse munie d'une structure d'anneau (commutatif, à élément unité) pour laquelle l'addition et la multiplication sont des morphismes de variétés. Tous les K-anneaux dont il sera question ici seront supposés connexes et annulés par la caractéristique de K. Une K-algèbre (commutative, à unité) est, de façon naturelle, un K-anneau. En caractéristique 0, il n'y en n'a pas d'autre. Cela est-il encore vrai en caractéristique $p \neq 0$? En réponse à cette question, que j'avais posée dans le cours, Serre donne le contre-exemple suivant : on part de l'algèbre des nombres duaux $\{x+y\epsilon\}$ et l'on transforme les opérations par la bijection $(x,y) \mapsto (x,y^{1/p})$; celle-ci conserve l'addition et transforme la multiplication en $(x,y)\cdot(x',y') = (x+x', x^py'+x'^py)$. Dans la lettre en question. Serre prouve encore plusieurs propriétés des K-anneaux en caractéristique finie, ayant des conséquences importantes pour le problème étudié dans le cours. En voici trois. *Supposons car $K \neq 0$ et soit A un K-anneau. Alors :*

— *A est un produit fini de K-anneaux qui sont des anneaux locaux ;*

— *si A est réduit (i.e. sans élément nilpotent non nul), il est isomorphe à un produit de copies de K ;*

— *si A est local, il existe un sous K-anneau D de A et un seul qui soit un corps (et qui est donc isomorphe à K), et A est une D-algèbre de dimension finie (égale à dim A).*

Cependant, l'exemple donné plus haut montre que la structure de variété de A n'est pas nécessairement celle provenant de sa structure de D-algèbre.

5. Soit A un K-anneau. Si A provient d'une K-algèbre, la restriction des scalaires (cf. [2], n° 1.5) fournit un foncteur $\Pi_{A/K}$ de la catégorie des A-schémas affines dans la catégorie des K-schémas affines. Pour poursuivre il nous faut disposer *pour tout A-anneau* d'un tel foncteur $\Pi_{A/K}$ possédant les propriétés suivantes :

— il transforme la droite affine sur A en le K-schéma A ;

— il est compatible avec la formation des produits de schémas ;

— le transformé $\Pi_{A/K}B$ d'un A-schéma en groupes affine B est un K-groupe (cela résulte de la propriété précédente) dont le groupe des K-points s'identifie canoniquement à $B(A)$.

Il est très vraisemblable qu'un foncteur $\Pi_{A/K}$ « naturel » possédant ces propriétés existe toujours, et quoique n'ayant pas encore pu, au moment d'écrire ce résumé, effectuer toutes les vérifications nécessaires, je l'admettrai désormais.

6. Soient k un corps infini, G un k-groupe algébrique, K un corps algébriquement clos et H un K-groupe. Disons qu'un homomorphisme de groupes $\alpha : G(k) \to H(K)$ est *semi-algébrique* s'il existe un K-anneau A, un homomorphisme d'anneaux $\phi : k \to A$ à image dense pour la K-topologie de Zariski et un K-morphisme de groupes

$\beta : \Pi_{A/K}{}^{\phi}G \to H$ tel que $\alpha = \beta(K) \circ \phi_*$, où ${}^{\phi}G$ est le A-schéma en groupes déduit de G par le changement de base ϕ et ϕ_* est le composé de l'homomorphisme $G(k) \to {}^{\phi}G(A)$ induit par ϕ et de l'isomorphisme canonique ${}^{\phi}G(A) \to \Pi_{A/K}({}^{\phi}G)(K)$.

Des exemples donnés dans le cours montrent qu'il y a lieu de s'intéresser aux paires (k,G) telles que tout homomorphisme de groupes $G(k) \to H(K)$, *pour H et K quelconques,* soit semi-algébrique. Je crois pouvoir démonter qu'il en est ainsi lorsque G est quasi-déployé sur k (toujours supposé infini), absolument presque simple et simplement connexe (le principe de la démonstration a été donné dans le cours). Il n'est d'ailleurs pas exclu que la même chose soit vraie dès que G est absolument presque simple et isotrope sur k pourvu que $G(k) = G^+$, où G^+ est défini comme au § 2.

7. Introduisons pour finir une notion qui se rapporte à des groupes non nécessairement semi-simple et qui devrait jouer un rôle important dans la preuve des résultats du type envisagé ci-dessus. Soient k un corps infini, G_1 un k-groupe et G un k-sous-groupe (fermé) de G_1. Disons que G est *bien encadré* dans G_1 (relativement à k) si la restriction à $G(k)$ de tout homomorphisme de groupes $G_1(k) \to H(K)$, pour H et K quelconques, est semi-algébrique. Un exemple est celui du groupe affine G_1 = Mult $\ltimes$ Add, dans lequel le sous-groupe distingué Add est bien encadré. Un groupe bien encadré dans lui-même est un groupe possédant la propriété du § 6, 2^e alinéa. Il y a des cas où l'existence dans un groupe presque simple G d'*un seul* sous-groupe bien encadré permet de conclure au bon encadrement du groupe G lui-même. Cela fournit l'un des lemmes principaux de la théorie.

B. Applications géométriques

8. Dans une deuxième partie du cours, on a appliqué le théorème de Borel et Tits rappelé au § 2 ci-dessus à la détermination des isomorphismes entre géométries associées à certains groupes algébriques simples. Le cas le plus connu est celui des immeubles de groupes simples de rang ≥ 2 (cf. [10], 5.8), mais il existe aussi des résultats du même type concernant des groupes de rang 1. L'exemple le plus simple est l'énoncé suivant, démontré par l'auteur en 1959 (donc indépendamment de [1]), mais resté inédit. La preuve donnée dans le cours, et esquissée ci-dessous, date de 1969.

PROPOSITION. — *Soient k un corps, K une extension quadratique séparable de k, P un plan projectif sur K, H ⊂ P une conique hermitienne, ensemble des zéros d'une forme hermitienne h (à trois variables) isotrope non dégénérée, et F l'ensemble des « fils », intersections de H avec les droites de P. Alors, le groupe G de toutes les permutations de H qui conservent l'ensemble F est le groupe* $P\Gamma U_3(h)$ *engendré par le groupe projectif unitaire et le groupe des automorphismes de la paire de corps (k,K).*

Preuve. — Soient ω un point de H et T la tangente à H en ce point. Choisissons dans $P-T$ un système de coordonnées affines x, y tel que l'équation de H soit $y+\bar{y}$

$= x\bar{x}$, où $z \mapsto \bar{z}$ désigne le k-automorphisme d'ordre 2 de K. Le point ω est donc le « point à l'infini » commun aux droites $x = c^{te}$. Notons O le point (0,0) et commençons par montrer que

(*) *le seul élément g de G fixant O et stabilisant chaque fil contenant* ω *(fil d'équation* $x = c^{te}$*) est l'identité.*

Supposons le contraire et soit g un élément non trivial de G possédant ces propriétés. Soient p un point de H n'appartenant pas à la droite $O\omega$ et non fixe par g (il en existe), $y=ux$ l'équation de la droite Op et $y = u'x$ l'équation de la droite $O(gp)$; on a $u' \neq u$. Soit L l'ensemble des abscisses (coordonnées x) des points du fil $Op \cap H$, qui est aussi l'ensemble des abscisses des points du fil $O(gp) \cap H$, vu l'invariance par g des fils contenant ω. L'ensemble L est défini par l'équation

(1) $\qquad ux + \bar{u}\bar{x} = x\bar{x},$

et aussi par l'équation $u'x + \bar{u}'\bar{x} = x\bar{x}$. Soustrayant celle-ci de la précédente, on trouve $(u-u')x + (\bar{u}-\bar{u}')\bar{x} = 0$, d'où $\bar{x} = (\bar{u}'-\bar{u})^{-1}(u-u')x$. Substituant dans (1), on voit que x satisfait à une équation du second degré non triviale (dont une racine est nulle, mais peu importe), donc que Card $L \leq 2$, en contradiction avec le fait qu'un fil non vide et non réduit à un point est de cardinal au moins 3. Cela prouve (*).

De (*), on déduit que

(**) *les éléments de G qui stabilisent chaque fil contenant* ω *sont les translations (ou transvections)* $(x,y) \mapsto (x,y+c)$, $c \in K$, $c+\bar{c} = 0$.

En effet, si g est un tel élément, transformant (0,0) en $(0,c)$, le produit de g et de la transvection $(x,y) \mapsto (x,y-c)$ satisfait aux conditions de (*) et est donc l'identité.

On a ainsi montré que G normalise l'ensemble des transvections, donc le groupe PSU_3 engendré par celles-ci. La preuve de la proposition s'achève par application du théorème de Borel et Tits énoncé au § 2 si k est infini, et d'un théorème de Steinberg [8] si k est fini.

La proposition ci-dessus s'étend aux corps non commutatifs mais la preuve, fondée sur le même principe, est beaucoup plus longue. Dans le cas fini, cette proposition a aussi été démontrée indépendamment, et de façon différente, par M. O'Nan.

J. T.

SÉMINAIRES

I. La notion de complète réductibilité dans les immeubles sphériques et les groupes réductifs. (Six heures d'exposés par J.-P. Serre)

1. *Définitions*

Une représentation linéaire $\rho : \Gamma \to GL(V)$ d'un groupe Γ dans un espace vectoriel V de dimension finie est *complètement réductible* si

(cr_o) tout sous-espace de V stable par $\rho(\Gamma)$ possède un supplémentaire stable,

ce qui est équivalent à la propriété suivante, à première vue plus forte :

(cr) tout drapeau de V stable par $\rho(\Gamma)$ est opposé à un drapeau stable.

Considérons l'immeuble sphérique de GL(V) (cf. [10]) ; c'est un complexe simplicial X dont les sommets sont en correspondance bijective avec les sous-espaces propres non nuls de V et dont les simplexes correspondent aux drapeaux, ou encore aux sous-groupes paraboliques de GL(V). Les propriétés (cr_o) et (cr) sont des propriétés du sous-complexe Y de X fixé par $\rho(\Gamma)$:

(cr_o) signifie que tout sommet de Y est opposé (dans X) à un sommet de Y.

et

(cr) signifie que tout simplexe de Y possède un opposé appartenant à Y.

Le théorème du § 2 montrera, entre autres choses, que l'équivalence de (cr_o) et (cr) est un cas particulier d'une propriété beaucoup plus générale.

Soit maintenant X un immeuble sphérique quelconque ; Serre appelle *X-complètement réductible,* ou *X-cr*, tout sous-complexe Y de X possédant la propriété (cr), et aussi tout groupe opérant sur X en préservant les types des sommets (cf. *loc. cit.*) dont le complexe de points fixes dans X possède cette propriété. Dans le séminaire, il a présenté de nombreux résultats, problèmes ou conjectures relatifs à ces notions, et les a mis en relation avec des travaux récents de J.-C. Jantzen, M. Liebeck, G. Seitz, D. Testerman et d'autres sur les sous-groupes finis et les sous-groupes réductifs de groupes réductifs, les éléments unipotents de groupes réductifs en caractéristique finie, etc. Nous énoncerons dans ce qui suit quelques-uns de ses résultats.

2. *Complète réductibilité de sous-complexes convexes : propriétés équivalentes*

Un immeuble peut être envisagé sous divers angles ; par exemple en tant que complexe simplicial, comme ci-dessus, mais aussi comme espace métrique. Les deux points de vue joueront un rôle ici. Rappelons quelques propriétés élémentaires d'un immeuble sphérique X de diamètre π : nous normalisons ainsi la métrique (NB : π est le diamètre, comme espace métrique, d'une sphère de rayon 1). Deux points à distance π sont dits *opposés*. On appelle *segment géodésique* toute image isométrique dans X d'un segment $[0,t]$, $t \leq \pi$. Deux points non opposés sont joints par un unique segment géodésique. Une partie Y de X est dite *convexe* si le segment joignant deux points non opposés quelconques de Y est contenu dans Y, et *strictement convexe* si, de plus, il ne contient aucun couple de points opposés. L'ensemble des points fixes de tout groupe d'isométries (donc de tout groupe d'automorphismes) de X est convexe.

Deux simplexes s et s' de X sont dits *opposés* si tout point de l'un est opposé à un point de l'autre. Si q et q' sont des points opposés contenus dans s et s' mais non dans leurs bords, les simplexes s et s' sont *ipso facto* opposés, et la réunion des segments géodésiques joignant q et q' et dont l'intersection avec s n'est pas réduite à q est isométrique à une sphère euclidienne de rayon 1, nommée dans ces exposés *sphère de Levi* de l'immeuble, et ne dépendant que de s et s' et non de q et q'. Par convention, l'ensemble vide est aussi considéré comme une sphère de Levi. L'explication de cette terminologie est la suivante : si X est l'immeuble sphérique d'un groupe réductif G sur un corps k, les simplexes de X correspondent (par définition) aux k-sous-groupes paraboliques de G, les sous-groupes paraboliques P et P' correspondant à s et s' sont opposés, leur intersection $P \cap P'$ est un sous-groupe de Levi et la réunion des simplexes correspondant aux k-sous-groupes paraboliques contenant $P \cap P'$ est la sphère de Levi en question (elle est vide si $P=P'=G$). Les sphères de Levi déterminées par des couples de chambres (simplexes de dimension maximum) opposées sont les *appartements*. Les sphères de Levi peuvent aussi être définies comme les sous-sphères d'appartements qui sont intersections de noyaux de racines (les racines d'un appartement étant vues comme certaines fonctions à trois valeurs –, 0 et + sur celui-ci).

L'un des premiers résultats démontrés par Serre dans le séminaire a été :

THÉORÈME. — *Soit Y un sous-complexe convexe d'un immeuble sphérique X. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Y a la propriété (cr) ;

(ii) il existe une sphère de Levi S contenue dans Y et de dimension $\dim Y$;

(iii) Y n'est pas contractile ;

(iv) Y a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères ;

(v) Y a la propriété (cr_o).

3. *Complète réductibilité et réductivité ; sur la consition $p \geq h$*

Intuitivement, on s'attend à ce que la complète réductibilité d'un sous-groupe soit liée à sa réductivité. Il en est bien ainsi lorsque la caractéristique du corps de base k est assez grande ou nulle. Supposons k algébriquement clos de caractéristique p et soient G un k-groupe réductif, h le nombre de Coxeter de G (borne supérieure des nombres de Coxeter des facteurs simples de G) et X l'immeuble de G sur k. On a alors :

THÉORÈME. — *Supposons p nul ou supérieur à h. Alors, un k-sous-groupe connexe de G a la propriété (cr) si et seulement s'il est réductif.*

La démonstration donnée par Serre utilise notamment des résultats de Jantzen et McNinch (pour les groupes classiques) et de Seitz et Liebeck (pour les groupes exceptionnels).

Il est intéressant de constater que, pour d'autres questions concernant les éléments unipotents d'un groupe réductif G, l'inégalité $p \geq h$ marque aussi la limite à partir de laquelle les choses « se passent comme en caractéristique 0 ». Ainsi, un théorème de Testerman montre que cette inégalité est nécessaire et suffisante pour que tout élément unipotent de G soit d'ordre 1 ou p. Inspiré par ce résultat, Serre a prouvé le théorème suivant. Soient G un schéma de Chevalley sur $\mathbf{Z}$, semi-simple et simplement connexe, et soit G^u le schéma des éléments unipotents de G, défini comme la fibre de l'élément neutre dans le morphisme produit des caractères des représentations fondamentales. Sur $\mathbf{Q}$, on a un morphisme « exponentiel » $e : (G^u \times \mathrm{Add})_{\mathbf{Q}} \to \mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$, $(x,t) \mapsto x^t$, que l'on peut définir comme ceci : on identifie G à un groupe de matrices et l'on utilise la série du binôme $(1+(x-1))^t = 1 + t(x-1) + ...$, qui se termine lorsque $x-1$ est nilpotent. Le $\mathbf{Q}$-morphisme ainsi obtenu est évidemment indépendant de la réprésentation matricielle de G utilisée. Le théorème annoncé est alors :

THÉORÈME. — *Le $\mathbf{Q}$-morphisme e se prolonge en un $\mathbf{Z}_{(p)}$ — morphisme pour tout $p \geq h$.*

4. *Centres de parties convexes*

4.1 Au début des années 60, J. Tits a conjecturé que toute partie strictement convexe non vide Y d'un immeuble sphérique X possède un « centre naturel » (cf. [7], p. 64). Vu son caractère heuristique, il s'agit plutôt d'une métaconjecture, dont une version affaiblie, mais précise celle-là, est que le groupe de tous les automorphismes de X stabilisant Y possède un point fixe dans Y. À l'origine, la raison d'être de cette conjecture était qu'elle entraînerait le théorème suivant (démontré depuis par d'autres méthodes) :

(*) *Un k-groupe réductif G (k un corps) possédant un k-sous-groupe A isomorphe sur k au groupe additif est isotrope, c'est-à-dire possède un k-sous-groupe parabolique propre.*

La preuve procède par récurrence sur la dimension de G : on prend pour X l'immeuble sphérique de G sur une extension galoisienne K de k déployant G et pour Y l'ensemble des points fixes de $A(K)$ dans X ; on a vu que cet ensemble est convexe et l'on se débarrasse du cas où Y contiendrait deux points opposés en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Depuis que la « conjecture » ci-dessus a été formulée, d'autres possibilités d'applications ont été mises en évidence.

4.2. Pour introduire la suite, une digression concernant le cas des immeubles affines sera utile. Pour ceux-ci, il est bien connu que le problème du centre a une réponse affirmative. En termes heuristiques d'abord : toute partie bornée d'un tel immeuble a un « centre naturel » ; cela résulte du lemme suivant qui donne en même temps un sens précis à cet énoncé (et qui, soit dit en passant, s'applique aussi, *mutatis mutandis,* à tout immeuble non sphérique, via la métrique de Moussong).

LEMME DU CENTRE (cf. [6], p. 37) et DÉFINITION. — *Soit E un espace métrique complet tel que tout couple de points possède un milieu unique et que si a, b, c sont trois points quelconques de E et si m est le milieu de b et c, on ait l'*inégalité de la médiane :

$$d(a,b)^2 + d(a,c)^2 \geq 2d(a,m)^2 + 1/2d(b,c)^2,$$

où d désigne la distance. Soit Y une partie bornée non vide de E et, pour tout point $z \in E$, *posons* $\delta(z) = \sup \{d(z,y) | y \in Y\}$. *Alors, la fonction* δ *atteint son minimum en un unique point c(Y) de E que l'on appelle* centre de Y dans E.

Notons que ce lemme a pour conséquence immédiate le théorème de point fixe bien connu, qui joue un grand rôle dans les applications de la théorie des immeubles affines à l'étude des groupes réductifs p-adiques.

4.3. On va voir deux exemples d'application du lemme du centre à des cas particuliers de la « conjecture » du n° 4.1. Les notations X, Y sont celles de ce numéro-là. Rappelons la convention du § 2 selon laquelle l'immeuble sphérique X est doté d'une métrique (« métrique sphérique ») de diamètre π.

PROPOSITION (G. Rousseau). — *Supposons qu'il existe un point Q de X dont la distance aux points de Y soit bornée supérieurement par un nombre strictement inférieur à* $\pi/2$. *Alors, Y possède un « centre naturel » dans X.*

Comme précédemment, l'esquisse de preuve qui va suivre précise l'énoncé heuristique. Considérons le « cône sur X » donné par $CX = X \times [0,1] / X \times \{0\}$, où la notation signifie que $X \times \{0\}$ est contracté en un seul point, noté 0. On plonge X dans CX par le composé des injections évidentes $X \to X \times \{1\} \to CX$. Pour tout appartement A (qui est, rappelons-le, isométrique à une sphère euclidienne de rayon 1), $CA = A \times [0,1] / A \times \{0\}$ est une boule euclidienne de rayon 1. Comme deux points quelconques de X appartiennent à un même appartement, cela définit une distance dans CX. De la même façon que pour les immeubles affines, on montre que cette distance satisfait aux conditions d'application du lemme du centre (pour $E = CX$), lequel fournit un point $c(Y)$ de CX, le centre de Y dans CX. L'existence du point Q de l'énoncé assure que $c(Y) \neq 0$, car on vérifie aisément que Q est strictement plus proche de $c(Y)$ que de 0. Finalement, il existe un unique point $c_1(Y)$ de X tel que $c(Y)$ appartienne au segment $[0, c_1(Y)]$ (c'est-à-dire à l'image canonique de $[0,1] \times \{c_1(Y)\}$ dans CX) ; ce point $c_1(Y)$ est le « centre naturel » de l'énoncé. Il faut noter que cette démonstration n'implique pas que ce centre appartienne à Y.

PROPOSITION. — *Si l'immeuble sphérique X est de rang 2, toute partie non vide strictement convexe Y de X dotée de la métrique induite satisfait aux conditions du lemme du centre pour E = Y, et possède donc un centre (dans Y elle-même).*

La vérification est facile.

4.4. Dans ses exposés, Serre s'est plutôt intéressé à la question suivante. Soient X un immeuble sphérique, Y un sous-complexe *convexe et contractile,* et Γ un groupe d'automorphismes de X conservant Y. Quand peut-on affirmer que Γ possède un point fixe *dans Y* ? Il a montré qu'il en est ainsi notamment dans les deux cas suivants :

— dim $Y = 1$;

— le groupe Γ est fini et résoluble.

Le premier cas est facile (la même méthode qu'au § II.2 ci-dessous s'applique). Dans le deuxième cas, on raisonne par récurrence sur la longueur de la suite dérivée de Γ et l'on utilise des arguments homologiques.

Il n'est pas exclu que la réponse à la question posée soit *toujours* positive. Notons cependant qu'il existe des complexes finis contractiles de dimension 3 sur lesquels le groupe alterné A_5 opère sans point fixe.

4.5. En utilisant l'interprétation géométrique des immeubles de type A_n comme complexes de drapeaux d'un espace projectif de dimension n, on montre la validité de la conjecture du n° 4.1 pour ces immeubles. On verra une variante de ceci au § II.3.

II. Quelques cas d'existence d'un centre pour des ensembles de chambres qui sont convexes, non vides et ne contiennent pas de paires de chambres opposées. (Deux heures d'exposés par J. Tits)

1. Dans les années 60, l'auteur (J.T.) s'est aussi intéressé à la variante suivante de la conjecture du n° I.4.1. On considère encore un immeuble sphérique X et, cette fois, un *sous-complexe* convexe Y, *contenant au moins une chambre et ne contenant aucune paire de chambres opposées.* On montre que les simplexes de Y sont toutes les facettes des chambres de Y et la convexité peut s'exprimer en disant que toute galerie (cf. [10], 1.3) joignant deux chambres de Y est contenue dans Y. On conjecture à nouveau que Y possède un « centre naturel » qui est un simplexe de l'immeuble : ce simplexe devrait être stable (mais non nécessairement fixe) par tous les automorphismes de X stabilisant Y sans nécessairement respecter les types de sommets. Pour la distinguer de la conjecture du n° I.4.1, nous appellerons celle-ci la « conjecture faible », bien qu'elle ne soit pas strictement plus faible que l'autre. Elle entraîne aussi — et même plus immédiatement que la précédente — le théorème (*) du n° I.4.1. Bien qu'elle puisse, comme l'autre, être abordée d'un point de vue métrique, cette conjecture faible se prête mieux à une approche combinatoire. L'auteur a longtemps cherché à la démontrer cas par cas ; une partie des résultats atteints a malheureusement été perdue. À l'occasion de ce séminaire, on a reconstitué les démonstrations pour les immeubles de rang 2 (cas facile) et pour les immeubles des types classiques. Dans ce résumé, nous nous bornerons à énoncer les trois théorèmes qui ont été établis dans le séminaire et qui précisent, dans chacun des cas considérés, quel est le centre naturel de Y. Sauf mention explicite du contraire, les notations X et Y sont celles du début de ce paragraphe. On ne suppose pas que l'immeuble X soit épais, c'est-à-dire que tout simplexe de codimension 1 appartienne à trois chambres au moins.

2. *Immeubles de rang 2*

Lorsque X est de rang 2 (groupe de Weyl diédral *d'ordre fini quelconque*), Y est un arbre de diamètre fini. Nous considérerons ici n'importe quel arbre Y de diamètre fini (un tel arbre peut d'ailleurs toujours être immergé dans un immeuble sphérique de rang 2, mais peut importe !). Pour tout tel arbre Y_1 ayant au moins deux arêtes, notons $e(Y_1)$ l'arbre « élagué » déduit de Y_1 en supprimant tout sommet d'ordre 1 (sommet pendant) et l'intérieur de toute arête aboutissant à un tel sommet. Par exemple, si Y_1 est l'arbre $\overset{a}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{b}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{c}{\bullet}$, $e(Y_1)$ est l'arbre réduit au sommet b. Le théorème suivant est immédiat et prouve la conjecture faible dans ce cas-ci.

THÉORÈME. — *Le diamètre de $e(Y_1)$ est inférieur d'au moins deux unités à celui de Y_1. La suite $e(Y_1)$, $e^2(Y_1)$, ... aboutit à un arbre ayant un seul sommet ou une seule arête.*

Ce sommet ou cette arête est le « centre naturel » cherché. Le théorème précédent suggère une méthode d'« épluchage » que l'on a essayé d'utiliser pour prouver la conjecture faible dans le cas général, mais les tentatives faites en ce sens ont été vaines.

3. *Immeubles de type A_n $(n \geq 2)$*

Soit X un tel immeuble. Il lui correspond un espace projectif S de dimension n, donné à dualité près, dont les sous-espaces propres non vides sont bijectivement représentés par les sommets de X. Soit Y_p (resp. Y_h) le sous-espace de S linéairement engendré par les points appartenant à Y (resp. l'intersection des hyperplans de S appartenant à Y).

THÉORÈME. — *Le sous-espace Y_p est non vide et contenu dans Y_h, lequel est distinct de S. En particulier, les sommets de X représentant Y_p et Y_h sont les sommets d'un simplexe de X de dimension 0 ou 1.*

Ce simplexe est le « centre naturel » de Y.

4. *Immeubles de type C_n $(n \geq 2)$ ou D_n $(n \geq 4)$*

Pour traiter ces cas, il nous faut d'abord rappeler ce qu'est un *espace polaire de rang n* (cf. [10]). Il s'agit d'un ensemble S dont certains sous-ensembles sont distingués et appelés sous-espaces. Les axiomes auxquels doivent satisfaire ces sous-espaces sont les suivants. À tout sous-espace est attribué une *dimension* $m \in [-1, n-1]$. L'ensemble vide est le seul sous-espace de dimension -1. Tout sous-espace de dimension $m \geq 0$, structuré par les sous-espaces qu'il contient, est un espace projectif de dimension m. L'intersection de deux sous-espaces est un sous-espace. Tout sous-espace est contenu dans un sous-espace de dimension $n-1$. Il existe deux sous-espaces de dimension $n-1$ disjoints. Enfin, axiome principal, si T est un sous-espace de dimension $n-1$, tout point p non contenu dans T est contenu dans un unique sous-espace T' de dimension $n-1$ tel que $T \cap T'$ soit de dimension $n-2$ et se compose de tous les points de T alignés avec p. (Deux points sont dits *alignés* s'ils appartiennent à un même sous-espace de dimension 1).

À tout immeuble X de type C_n $(n \geq 2)$ correspond un espace polaire de rang n dont les sous-espaces non vides sont représentés bijectivement par les sommets de X. À tout immeuble X de type D_n $(n \geq 4)$ correspond un espace polaire de rang n dont les sous-espaces non vides de dimension $\neq n-2$ sont représentés bijectivement par les sommets de X et tel que tout sous-espace de dimension $n-2$ soit contenu exactement dans deux sous-espaces de dimension $n-1$ dont il est l'intersection. Dans les deux cas (C_n et D_n), le « centre naturel » de Y est fourni par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Appelons « points de Y » les sommets de Y représentant des points (sous-espaces de dimension 0) de S. Alors, il existe un point de Y aligné avec tout point de Y.*

Étant deux à deux alignés, les points de Y possédant la propriété de l'énoncé sont contenus dans un sous-espace (c'est une propriété élémentaire des espaces polaires) ; si l'on note T l'intersection de tous les sous-espaces contenant ces points, le « centre naturel » de Y est le sommet de X représentant T ou, si X est de type D_n et T est de dimension $n–2$, le simplexe de dimension 1 dont les sommets représentent les deux sous-espaces de dimension $n–1$ contenant T.

La démonstration du théorème repose sur la notion suivante : nous disons qu'un élément de Y *possède une base dans* Y si le sous-espace de S qu'il représente a une partie génératrice (au sens de la géométrie projective) formée de points de Y. Le lemme suivant, facile à établir, décrit l'étape principale de la preuve.

LEMME. — *S'il n'existe aucun point de Y aligné avec tout point de Y, tout élément de Y possède une base dans Y.*

5. *Remarques*

(i) J.-P. Serre m'a fait remarquer que les théorèmes des §§ 2 et 4 ci-dessus entraînent la validité de la conjecture de I.4.4 pour les immeubles de type C_3.

(ii) Le fait que l'on ait pu, au § 4, traiter simultanément les types C_n et D_n tient à ce que tout immeuble de type D_n possède une subdivision simpliciale qui est un immeuble (non épais) de type C_n.

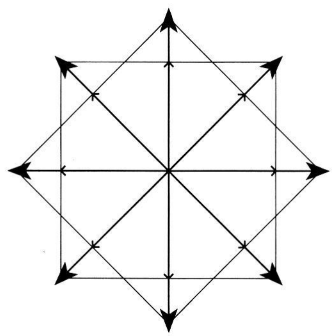
III. Quadrangles de Moufang (suite). (Quatre heures d'exposés par J. Tits)

Le problème de la classification des polygones de Moufang a intéressé l'auteur de ces lignes depuis longtemps. Seul le cas le plus difficile, celui des quadrangles, n'était pas encore complètement éclairci en 1978. Un programme en vue de la détermination de tous les quadrangles de Moufang a été exposé dans le cours de 1994-1995 (cf. [12], § 6), et sa mise en œuvre a été entreprise dans le séminaire de l'année suivante. Mais au cours de l'année 1996-1997, Richard Weiss, reprenant et aménageant quelque peu le programme en question, a complètement achevé la détermination de ces quadrangles. Outre de nombreuses mises au point, son étude l'a conduit à deux avancées décisives.

1) Il caractérise les quadrangles exceptionnels (ceux que l'on peut associer à certains groupes de types ${}^2\mathrm{D}_5$, ${}^2\mathrm{E}_6$, E_7 et E_8, cf. [12]) par une propriété « abstraite » différente de celle proposée dans *loc. cit.* et il les décrit par des formules explicites, obtenues au moyen de calculs directs, *ne faisant pas intervenir une connaissance a priori des groupes exceptionnels et de leurs diverses formes.* (Il faut toutefois noter que pour établir *l'existence* des quadrangles en question, c'est-à-dire le fait que les formules de Weiss définissent effectivement des quadrangles de Moufang, on doit encore, pour l'instant, faire appel à un peu de théorie générale.)

2) Le résultat le plus inattendu des calculs de Weiss est la mise en évidence d'une nouvelle (et ultime) classe de quadrangles de Moufang, ne figurant pas dans la conjecture de [11], 3.3 (ni par conséquent dans la liste de quadrangles « connus » énumérés dans le cours de 1994-1995).

La fin du séminaire a été consacrée à ces quadrangles d'un type nouveau, que Weiss nomme « impartiaux ». Selon la théorie générale développée dans [11] et [12], ces quadrangles peuvent être décrits par la donnée de huit groupes ordonnés cycliquement, U_z ($z \in \mathbf{Z}$, $U_{z+8} = U_z$) dotés de relations de commutation que Weiss détermine explicitement. Comme dans le cas des quadrangles indifférents étudiés l'an dernier, les U_z sont des 2-groupes commutatifs, mais la considération des groupes de commutateurs $U'_z = [U_{z-1}, U_{z+1}]$ fait apparaître une différence essentielle : dans le cas indifférent, tous les U'_z sont réduits à l'élément neutre, tandis que dans le cas impartial, on a $\{1\} \neq U'_z \neq U_z$ pour tout z ; cette dernière propriété distingue les quadrangles impartiaux de tous les autres, et suggère qu'on leur attribue un système de racines de la forme suivante :



Ce système est la réunion de deux systèmes de type BC_2, à angle $\pi/4$ l'un par rapport à l'autre. Ainsi, un quadrangle impartial possède deux sous-quadrangles de type BC_2, dont on voit aussitôt qu'ils sont à la fois classiques et indifférents, et dont le quadrangle impartial est en quelque sorte un amalgame ; ces sous-quadrangles sont donnés par les formules de Weiss.

Après la fin du cours, dans lequel cette présentation du résultat de Weiss avait été proposée, B. Mühlherr et H. Van Maldeghem ont montré qu'un quadrangle impartial peut être vu comme l'immeuble des points fixes d'une involution, ou plutôt d'une semi-involution de type galoisien, dans l'immeuble d'un « groupe mixte » de type F_4 (immeuble obtenu par la construction décrite dans [10], 10.3.2). Le diagramme relatif associé à cette situation, à la façon de [9], est le suivant :  . On sait que ce diagramme n'est pas admissible dans la classification des groupes algébriques, mais on voit qu'il le devient lorsque l'on étend la théorie aux groupes mixtes ; c'est ce que nous apprennent les quadrangles de Weiss. Ce thème sera repris dans le séminaire de l'an prochain.

RÉFÉRENCES

[1] A. BOREL et J. TITS, *Homomorphismes « abstraits » de groupes algébriques simples* (*Annals of Math.*, **97** (1973), 499-571).

[2] F. BRUHAT et J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes ; existence d'une donnée radicielle valuée* (*Publ. Math. IHES,* **60** (1984), 5-184).

[3] E. CARTAN, *Sur les représentations linéaires des groupes clos* (*Comm. Math. Helv.,* **2** (1930), 269-283).

[4] J. DIEUDONNÉ, *La géométrie des groupes classiques* (*2^e^ éd., Ergebnisse der Math.,* **2** (1963)).

[5] H. FREUDENTHAL, *Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen,* I. (*Annals of Math.,* (2) **42** (1941), 1051-1074 ; *Erratum, ibid.,* **47** (1946), 829-830).

[6] P. de la HARPE et A. VALETTE, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts* (*Astérisque,* **175** (1989)).

[7] D. MUMFORD, *Geometric invariant theory* (*Ergebnisse der Math.,* **34** (1965)).

[8] R. STEINBERG, *Automorphisms of finite linear groups* (*Canad. J. Math.,* **12** (1960), 606-615).

[9] J. TITS, *Classification of algebraic semi-simple groups* (in *Algebraic groups and discontinuous groups,* Boulder, 1965, *Proc. Symp. in Pure Math.,* **33** (1) (1966), 33-62).

[10] —, *Buildings of spherical types and finite BN-pairs* (*Springer Lecture Notes in Math.,* **386,** 1974).

[11] —, *Classification of buildings of spherical types and Moufang polygons : a survey* (in *Teorie Combinatorie,* Roma, 1973, vol. 1, Accad. Naz. dei Lincei, (1976), 229-246).

[12] —, *Résumé de cours* (*Annuaire du Collège de France,* 95^e^ année, 1994-1995, 79-95).

MISSIONS

Exposés

— *Ein Fixpunktsatz für Gebäude, und Anwendungen,* Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1996, Jena, septembre 1996.

— *Moussong Komplexe und schlanke Gebäude,* Otto Haupt-Kolloquium, Erlangen, décembre 1996.

— *Twin trees and projective planes,* Perspectives in Mathematics, Groups and Geometries, conférence en l'honneur de B. Fischer, Bielefeld, décembre 1996.

— *Forms of mixed algebraic groups and Moufang quadrangles,* Journée dédiée à F. Buekenhout, Deinze, mai 1997.

DISTINCTION

Cantor-Medaille 1996 de la Deutsche Mathematiker Vereinigung.