Théorie des groupes

M. Jacques Tits, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de cette année a porté sur les *Immeubles jumelés : théorèmes d'existence.* La notion d'immeubles jumelés, introduite en 1987 par M. Ronan et l'auteur, avait déjà fait l'objet des cours des années 1988-1989 et 1989-1990 (cf. [20] et [21]). Ces deux références et un texte développant une conférence faite à Durham en 1990 [25] résumaient l'essentiel des connaissances sur le sujet au début des années 90. Ils contenaient les prémisses, partiellement conjecturales, d'une classification des immeubles (de types 2-sphériques, irréductibles et de rang au moins 3 : cf. 1.1 et 2.2 ci-dessous), mais renfermaient aussi, hélas, quelques assertions inexactes ou insuffisamment fondées, erreurs ou lacunes qui m'ont été signalées notamment par A. Chosson, J.-Y. Hée, B. Mühlherr et M. Ronan. Ceux-ci ont aussi, à des degrés divers, permis de combler les lacunes en question et contribué de façon substantielle à la solution de certains des problèmes en suspens. Le but du cours était de faire le point sur l'état d'avancement de ces recherches.

1. *Immeubles et jumelages ; rappel des notions de base* (cf. [14], [20], [25])

1.1. Soient I un ensemble, et M une matrice de Coxeter sur I, c'est-à-dire une matrice symétrique $(m_{ij})_{i,j\in I}$ à coefficients entiers ou ∞, tels que $m_{ii} = 1$ pour tout i et $m_{ij} \geq 2$ si $i \neq j$. Nous écrirons aussi $m(i,j)$ pour m_{ij}. Soit $(W(M), (s_i)_{i\in I})$ un système de Coxeter de type M : cela veut dire que $W(M)$ est un groupe, que (s_i) est un système générateur de $W(M)$ indexé par I et que les monomes $(s_i s_j)^{m(i,j)}$ pour $m(i,j) \neq \infty$ forment une présentation du groupe $W(M)$. Soit J une partie de I ; la matrice de Coxeter $M_J = (m_{ij})_{i,j\in J}$ est appelée un *facteur direct* de M si $J = \emptyset$ ou I (facteurs directs triviaux), ou si $m(J,I-J) = \{2\}$. Le type M est dit *irréductible* s'il ne possède pas de facteur direct non trivial, et *sphérique* si le groupe $W(M)$ est fini. Le *rang* de M est le cardinal de I ; il est d'usage de le supposer fini « pour simplifier », et c'est ce que nous ferons *sauf mention explicite du contraire,* car l'adoption systématique de cette hypothèse nous est interdite du fait que les techniques introduites par B. Mühlherr, dont nous parlerons au n° 3.3, font intervenir des immeubles de rang infini de façon essentielle. Nous appelons aussi *rang* d'un élément w de $W(M)$, et notons rg w, le minimum du cardinal d'une partie J de I telle que w appartienne au groupe $W(M)_J$ engendré par les s_j pour $j \in J$.

1.2. Un *immeuble de type M* est un ensemble Δ, dont les éléments sont appelés *chambres,* doté d'une « distance » $d : \Delta \times \Delta \to W(M)$, soumise aux axiomes suivants, où x,y sont des chambres, $w = d(x,y)$, $s \in \{s_i\}$ et ℓ désigne la *longueur* dans le groupe de Coxeter (longueur maximale d'un élément de $W(M)$ comme produit de s_i) :

(Im 0) $w = 1$ si et seulement si $x = y$;

(Im 1) si une chambre z est telle que $d(y,z) = s$, alors $d(x,z) = w$ ou ws ; si, de plus $\ell(ws) = \ell(w) + 1$, alors $d(x,z) = ws$;

(Im 2) il existe z telle que $d(y,z) = s$ et $d(x,z) = ws$.

(N.B. Ici et en 1.5, la numérotation des axiomes n'est pas celle de [25]). Il est facile de voir que $d(y,x) = d(x,y)^{-1}$. Sauf spécification du contraire, les immeubles considérés seront supposés *épais,* ce qui veut dire que, quels que soient $c \in \Delta$ et $s \in \{s_i\}$, le cardinal de la « sphère » $\{x \mid d(c,x) = s\}$ est au moins égal à 3.

1.3. Dans les exemples les plus importants, Δ est un espace homogène G/B et la distance d est composée de l'application $(x,y) \to x^{-1}y$ de $\Delta \times \Delta$ dans $B \backslash G/B$ et d'une bijection $B \backslash G/B \to W(M)$, appelée « décomposition de Bruhat ». Le cas le plus connu, à l'origine de la notion d'immeuble, est celui où G est un groupe algébrique complexe simple et B est un sous-groupe de Borel. Plus généralement, G peut être le groupe des points rationnels d'un k-groupe semi-simple et B le groupe des points rationnels d'un k-sous-groupe parabolique minimal. Il faut noter que si G est un groupe et B un sous-groupe, il existe au plus une matrice de Coxeter M et une bijection $B \backslash G/B \to W(M)$ définissant une structure d'immeuble épais dans G/B ; cela a donc un sens de dire qu'un espace homogène G/B (vu comme ensemble avec groupe d'opérateurs) *est* un immeuble (épais).

1.4. Pour $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, les immeubles de type $M = \binom{1\ m}{m\ 1}$ sont aussi appelés *m-gones généralisés.* La notion de m-gone (généralisé) de *Moufang,* dont nous aurons besoin, est connue et nous renvoyons à la littérature (cf. [14], [15], [25]) pour la définition et les propriétés de base de ces objets. Rappelons seulement que dans un m-gone de Moufang Δ, si c est une chambre et i l'un des deux éléments de l'ensemble d'indices I (cf. 1.1), la sphère de centre c et de rayon s_i a une structure canonique (induite par Δ) d'*ensemble de Moufang* : on appelle ainsi un ensemble D dont on distingue une famille U de permutations (les *transvections*) normalisée par chacun de ses éléments, telle que le fixateur U_c de tout point c de D dans U soit un groupe simplement transitif sur $D-\{c\}$ et que U soit la réunion des U_c $(c \in D)$. (N.B. Cette définition est équivalente à celle de [25], p. 261, mais la notion de *structure de Moufang,* introduite dans [21], p. 98, est a priori un peu plus générale.) Si Δ est, comme dans [22] par exemple (cf. aussi le n° 4.2 ci-dessous), défini à partir de $2m$ groupes U_z ($z \in \mathbf{Z}$, $U_z = U_{z+2m}$), ordonnés cycliquement, contenus dans un même groupe de référence et soumis à certains axiomes que nous ne rappelons pas, alors, pour un choix convenable de c et de i, U est la réunion de U_0 et des conjugués de U_2 par les éléments de U_0, et D est l'ensemble dont les éléments sont U_0 et les conjugués en question, ensemble sur lequel U opère par conjugaison.

1.5. Soient Δ_+ et Δ_- deux immeubles de même type M dont les fonctions distance sont notées d_+ et d_-, ou simplement d. *Jumeler ces immeubles* consiste à se donner une fonction *codistance* d^* : $\Delta_+ \times \Delta_- \cup \Delta_- \times \Delta_+ \to W(M)$ possédant les propriétés suivantes pour $\varepsilon = +$ ou $-$, $x \in \Delta_\varepsilon$, $y \in \Delta_{-\varepsilon}$, $w = d^*(x,y)$ et $s \in \{s_i\}$:

(J_0) $d^*(y,x) = w^{-1}$;

(j_1) si $z \in \Delta_{-\varepsilon}$ est tel que $d(y,z) = s$ et $\ell(ws) = \ell(w) - 1$, alors $d^*(x,z) = ws$;

(J_2) il existe $z \in \Delta_{-\varepsilon}$ tel que $d(y,z) = s$ et $d^*(x,z) = ws$.

On donne le nom de *jumelage* tantôt à la fonction d^*, tantôt au triple (Δ_+, Δ_-, d^*).

1.6. *Exemples*

(a) Si $\Delta = \Delta_+$ doté de la distance $d = d_+$ est un immeuble de type M *sphérique*, si w_0 désigne l'élément de plus grande longueur de $W(M)$ et si l'on note Δ_- le même ensemble Δ doté de la distance d_- définie par $d_-(x,y) = w_0.d_+(x,y).w_0$, alors Δ_- est un immeuble jumelé avec Δ_+ par la codistance égale à $d.w_0$ sur $\Delta_+ \times \Delta_-$ et à $w_0.d$ sur $\Delta_- \times \Delta_+$. (Ces formules corrigent celles de [20], 2.3 (b), et de [25], 2.2, Prop. 1). Ceci est la seule façon de jumeler des immeubles sphériques.

(b) Soit G un groupe de Kac-Moody sur un corps k, défini selon le procédé décrit dans [19]. Outre le corps k, les données de base de la définition sont un « réseau » Λ (groupe abélien libre de type fini), un système fini $(\alpha_i)_{i \in I}$ d'éléments de Λ et un système (h_i), indexé par le même ensemble I, d'éléments du **Z**-dual $\check{\Lambda}$ de Λ. Le groupe G est donné par une présentation : les générateurs sont un « tore » T isomorphe à $(k^\times)^{\mathrm{Card}\, I}$ et des « sous-groupes radiciels » U_α isomorphes au groupe additif de k et indexés par des « racines » (racines « réelles » dans la terminologie de V.Kac) qui sont certains éléments de Λ ; les relations sont données dans [19]. Si B_+ (resp. B_-) est le « sous-groupe de Borel » engendré par T et les U_α correspondant aux racines positives (resp. négatives), c'est-à-dire combinaisons linéaires des α_i à coefficients positifs (resp. négatifs), alors G/B_+ et G/B_- sont, de façon naturelle, des immeubles jumelés. La codistance d^* est donnée, de manière analogue à ce que l'on a vu en 1.3, par une bijection $B_+\backslash G/B_- \to W(M)$, appelée « décomposition de Birkhoff » de G. Cet exemple est à l'origine de la notion de jumelage.

Pour plus de détails et d'autres exemples, voir [20] et [25].

2. *Le principe local → global : fondations et théorème d'unicité*

2.1. La classification des immeubles de type sphérique, irréductible et de rang au moins 3 a été obtenue dans [14]. L'outil principal en est le Theorem 4.1.2 de *loc. cit.* Une forme un peu affaiblie du théorème en question (voir le n° 2.4 ci-dessous) s'énonce ainsi :

(a) *un immeuble sphérique est déterminé à isomorphisme près par l'ensemble des chambres dont la distance à une chambre donnée, arbitrairement choisie, est de rang (défini en 1.1)* ≤ 2, *cet ensemble étant doté de la distance induite.*

Cela conduit naturellement à la définition suivante : si Δ est un immeuble et si c est une chambre de Δ, on appelle *fondation* de Δ *de centre c* l'ensemble

$$\{x \in \Delta \mid \mathrm{rg}(d(c,x)) \leq 2\},$$

aussi noté $E_2(\Delta,c)$, ou simplement $E_2(c)$, muni de la distance induite. Ainsi, le Théorème 4.1.2 de [14] dit en substance que

(b) *dans le cas sphérique, toute fondation d'un immeuble détermine l'immeuble.*

2.2. La philosophie de base de la théorie des immeubles jumelés est que ceux-ci sont une généralisation naturelle des immeubles sphériques (voir l'exemple (a) du n° 1.6 et les considérations heuristiques de [20], p. 82 et de [25], § 1). Il est donc également naturel de conjecturer que, sous des conditions assez générales, un jumelage (Δ_+,Δ_-,d^*) est déterminé à isomorphisme près par toute fondation de Δ_+ (cf. [21], 5.3 et [25], conjecture 1). C'est cette propriété (conjecture ou théorème, selon le cas) à laquelle nous donnons ici le nom de *principe local* $\rightarrow$ *global,* nous écartant un peu, mais de façon inessentielle, du langage adopté par B. Mühlherr et M. Ronan (voir à ce sujet le n° 2.4). Remarquons d'emblée que quand on essaye d'étendre aux jumelages les techniques utilisées dans le cas sphérique, on s'aperçoit vite qu'il est difficile de se passer de la finitude des m_{ij} (même si des résultats non triviaux peuvent être obtenus dans des cas plus généraux : voir notamment [13], [20]). Lorsque les m_{ij} sont finis, nous dirons avec B. Mühlherr que le type M est *2-sphérique.*

2.3. Les notions qui précèdent permettent d'esquisser une méthode pour la classification des immeubles jumelés de type 2-sphérique irréductible et de rang ≥ 3. La chose se fait en deux temps.

Il faut d'abord essayer de prouver le principe local $\rightarrow$ global. Nous verrons au n° 2.5, compte tenu de 2.7 (b), qu'il est effectivement « presque toujours vrai ». (De façon plus précise et imagée, une fondation est un système d'immeubles de rang 2 amalgamés selon des « résidus de rang 1 » que nous appellerons ici « liens », et les exceptions au principe local $\rightarrow$ global ne peuvent concerner que des fondations « très fragiles », dont les liens sont de cardinal très petit : 3 ou, pour des types M extrêmement particuliers, 4. Cependant, B. Mühlherr m'a fait observer que certains résultats de P. Abramenko rendent néanmoins l'existence de telles exceptions assez plausible.

Le principe local $\rightarrow$ global est en quelque sorte un théorème d'unicité. La deuxième étape est le problème d'existence. Pour pouvoir le formuler, on doit se référer à une notion abstraite de fondation dont la définition va pour ainsi dire de soi (cf. 3.1). Une fondation (abstraite) est dite *intégrable* si elle provient d'un jumelage, et le problème d'existence est la recherche de conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité ; c'est l'objet de la conjecture 2 de [25].

2.4. Revenons au principe local → global pour en donner un énoncé un peu plus précis qu'au n° 2.2. Si (Δ_+,Δ_-,d^*) et $(\Delta'_+,\Delta'_-,d'^*)$ sont deux jumelages et si $c_+ \in \Delta_+$ et $c'_+ \in \Delta'_+$, le principe en question demande que toute isométrie du fondement de Δ_+ de centre c_+ sur le fondement de Δ'_+ de centre c'_+ s'étende en une isométrie du premier jumelage sur le second (en un sens évident, l'isométrie respectant distances et codistances). Cette isométrie n'est en général pas unique : pour la rendre telle, il faut étendre les fondations par l'adjonction de chambres c_-, c'_- opposées respectivement à c_+ et c'_+ (dans un jumelage, deux chambres sont dites *opposées* si leur codistance est nulle). Plus précisément, appelons *charpente* d'un jumelage, la réunion d'une fondation (du premier immeuble) et de l'ensemble réduit à une chambre opposée au centre de celle-ci. Il résulte du théorème 1 de [20] (ou, dans le cas sphérique, du théorème 4.1.1 de [14]) que, lorsqu'elle est applicable, la forme faible du principe local → global énoncée plus haut entraîne la « forme forte » suivante :

(a) *toute isométrie d'une charpente d'un jumelage donné sur une charpente d'un autre jumelage se prolonge de façon unique en une isométrie du premier jumelage sur le second.* En d'autres termes, *un jumelage est déterminé à isomorphisme* unique *près par chacune de ses charpentes.*

C'est sous cette forme, à la terminologie près, que le principe local → global apparaît dans [10], [8] et [12]. (N.B. La considération de charpentes au lieu de fondations devient essentielle lorsque l'on admet des immeubles de rang infini, car alors il n'est plus du tout vrai qu'un jumelage (Δ_+,Δ_-,d^*) est déterminé à isomorphisme (*même non unique*) près par toute fondation de Δ_+ : ceci est une remarque de B. Mühlherr.)

2.5. Disons avec B. Mühlherr et M. Ronan ([10]) qu'un jumelage (Δ_+,Δ_-,d^*) possède la *propriété (co)* si, pour toute chambre $c \in \Delta_+ \cup \Delta_-$, l'ensemble c^{op} des chambres opposées à c est *connexe,* ce qui signifie que deux telles chambres peuvent être reliées dans c^{op} par une *galerie,* c'est-à-dire une suite de chambres telle que la distance de deux termes consécutifs quelconques de la suite appartienne au système générateur privilégié (s_i) de $W(M)$.

Le théorème fondamental suivant est démontré dans [10] (voir Corollary 1.4), et une autre preuve, plus conceptuelle, en est donnée dans [7], [8] :

(a) *un jumelage de type irréductible, 2-sphérique, possédant la propriété (co) satisfait au principe local → global.*

(N.B. La preuve donnée dans [10] s'appuye sur le Theorem 2 de [25] ; la démonstration de celui-ci que l'on trouve dans *loc. cit.* présente une lacune, mais le théorème est néanmoins correct : voir ci-dessous, n° 2.8.). L'énoncé précédent met en évidence l'importance de la condition (co), or nous allons voir qu'elle est « presque toujours » satisfaite.

2.6. Si Δ est un immeuble de type M, c une chambre de Δ et J une partie de l'ensemble d'indices I, appelons *J-résidu* de c dans Δ la « sphère » ensemble des chambres dont la distance à c appartient au sous-groupe de $W(M)$ engendré par les r_j pour $j \in J$; c'est un immeuble de type $M_J = (m_{ij} \mid i,j \in J)$ (de rang Card J).

(a) *Les résidus de rang 2 et de type sphérique irréductible (types* $\binom{1\ m}{m\ 1}$ *pour* $m \neq 2,\infty$*) dans un immeuble participant à un jumelage sont des polygones de Moufang.*

(Pour des références concernant ces derniers, voir le n° 1.4 ci-dessus.) Cette propriété est énoncée dans [25] où des indications de démonstration sont données ; une démonstration détaillée et plus simple se trouve dans [12]. De l'énoncé précédent, il suit, compte tenu d'un résultat bien connu concernant les polygones de Moufang (cf. [16], [27]), que

(b) *l'existence d'un jumelage de type 2-sphérique* $M = (m_{ij})$ *implique que tous les* m_{ij} *soient égaux à 2, 3, 4, 6 ou 8.*

2.7. La proposition suivante, Theorem 1.5 de [10], est ce qui permet la mise en œuvre des résultats précédents :

(a) *pour qu'un jumelage possède la propriété (co), il suffit que tous ses résidus de rang 2 aient cette propriété.*

La liste des polygones de Moufang ne possédant pas la propriété (co) a été établie par P. Abramenko [1] (on a donné dans le cours une preuve un peu différente de ce résultat : voir le § 4 ci-dessous) ; il en résulte notamment qu'un tel polygone possède au moins un résidu de rang 1 de cardinal ≤ 4, et que 4 ne se présente que pour les hexagones associés à $G_2(\mathbf{F}_3)$. Combiné avec 2.5(a), 2.6(a) et 2.7(a), ceci implique que

(b) *un jumelage de type* $M = (m_{ij})$ *irréductible et 2-sphérique dont tous les résidus de rang 1 sont de cardinal au moins 5 (et même 4 si aucun* m_{ij} *n'est égal à 6) satisfait au principe local* $\rightarrow$ *global.*

2.8. L'assertion suivante, qui est, en quelque sorte, la « moitié » du principe local $\rightarrow$ global, est vraie sans l'hypothèse (co).

(a) *Étant donnés deux jumelages* (Δ_+,Δ_-,d^*) *et* $(\Delta'_+,\Delta'_-,d'^*)$, *toute isométrie d'une charpente* $E_2(c_+)\cup\{c_-\}$ *du premier sur une charpente* $E_2(c'_+)\cup\{c'_-\}$ *du second s'étend en une isométrie de* $\Delta_+\cup\{c_-\}$ *sur* $\Delta'_+\cup\{c'_-\}$.

Cette assertion est énoncée dans [21] (théorème 1) et dans [25] (Theorem 2), mais les démonstrations esquissées là sont déficientes ; en particulier, l'énoncé 5.8.2(2) de [25] n'est pas prouvé. (L'énoncé du théorème 1 de [21] comporte aussi une assertion d'unicité de l'extension qui reste douteuse : cf. la remarque 5.9(a) de [25]). Deux démonstrations différentes de (a) ont été données, l'une par B. Mühlherr [7], l'autre par A. Chosson [6]. Dans [12], M. Ronan donne également une preuve, plus simple, de (a), mais sous l'hypothèse (co) (ce résultat lui sert à justifier le résultat principal de [10]) ; dans [12], il est encore montré, indépendamment de (co), qu'une isométrie $E_2(c_+) \to E_2(c'_+)$ qui se prolonge en une isométrie de charpentes $E_2(c_+) \cup \{c_-\} \to E_2(c'_+) \cup \{c'_-\}$ se prolonge également en une isométrie d'immeubles $\Delta_+ \to \Delta'_+$.

Signalons enfin qu'A. Chosson démontre aussi, au passage, le résultat auxiliaire suivant. On reprend les notations Δ_+, ..., c_- de 2.4 sauf que l'on ne suppose plus I fini. Soit F un ensemble de parties sphériques de I, c'est-à-dire de parties J telles que le groupe W_J engendré par les r_j ($j \in J$) soit fini. On note $E_F(c_+)$ l'ensemble des chambres dont la distance à c_+ appartient à l'un des groupes W_J, pour $J \in F$, et l'on définit $E_F(c'_+)$, $E_F(c_-)$, $E_F(c'_-)$ de façon analogue. Alors

(b) *Toute isométrie $E_2(c_+) \cup \{c_-\} \to E_2(c'_+) \cup \{c'_-\}$ s'étend de façon unique en une isométrie $E_F(c_+) \cup E_F(c_-) \to E_F(c'_+) \cup E_F(c'_-)$, et celle-ci applique c_- sur c'_-.*

2.9. La proposition suivante, qui est une variante « concrète » de 2.5(a) en termes de théorie des groupes, a été démontrée, de deux façons différentes, par P. Abramenko et par B. Mühlherr [2].

(a) *Soient $\Delta = (\Delta_+, \Delta_-, d^*)$ un jumelage de type 2-sphérique $M = (m_{ij})$, dont tous les résidus de rang 2 possèdent la propriété (co), G un groupe opérant sur Δ en permutant transitivement les paires de chambres opposées, et $\{c_+, c_-\}$ une telle paire. Pour toute partie J de I, notons G_J l'intersection des stabilisateurs dans G des J-résidus de c_+ et c_-. Alors G est produit amalgamé (au sens de [18], § 5) des G_J, pour Card $J \leq 2$.*

3. *Problème d'existence : conditions d'intégrabilité des fondations*

Dans tout ce paragraphe, on supposera que Card I est ≥ 3 et que M est 2-sphérique irréductible.

3.1. Il nous faut d'abord, comme cela a été expliqué en 2.3, définir « abstraitement » les fondations de type M, sans référence à un immeuble ambiant. Pour cela, nous reprendrons essentiellement la définition de [21], à des détails de présentation près (cf. aussi [25]).

Une *fondation* (abstraite) de type M est un système $(E, c_0, (\Delta_{ij} \mid i,j \in I, i \neq j))$ formé d'un ensemble pointé (E, c_0) et d'un système de parties de E contenant c_0 et dotées de structures d'immeubles épais de rang 2 possédant les propriétés suivantes pour $i, j, k \in I$ distincts :

Δ_{ij} est un immeuble de type $\begin{pmatrix} 1 & m_{ij} \\ m_{ij} & 1 \end{pmatrix}$ vu comme matrice sur $\{i,j\}$; on a $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$;

l'intersection $\Delta_{ik} \cap \Delta_{kj}$ est la sphère de centre c_0 et de rayon $< s_k >$ dans Δ_{ik} et dans Δ_{kj} ;

E est la réunion des Δ_{ij} (cette dernière condition est omise dans [21]).

Dans un immeuble Δ de type M, la fondation $E_2(\Delta, c_0)$ de centre c_0 quelconque est, de façon évidente, une fondation (abstraite) de type M. Notons-la E pour simplifier. La restriction à $E \times E$ de la fonction distance de Δ peut être décrite intrinsèquement au sein de la fondation E, sans référence à Δ : Jean-Yves Hée m'a fait remarquer que l'algorithme donné dans [25], 6.1, n'est pas correct, mais le devient si l'on remplace dans la condition (F3) de *loc. cit.*, le mot « shortest » par « longest » ! Ainsi corrigé, cet algorithme définit une « métrique » $E \times E \to W(M)$ pour toute fondation (abstraite) ; une fois donné l'ensemble pointé (E,c_0), cette métrique, à son tour, détermine la fondation, puisque Δ_{ij} est la sphère de centre c_0 et de rayon le groupe engendré par s_i et s_j.

3.2. Dans la mesure où le principe local $\to$ global est vérifié (voir à ce sujet le § 2 ci-dessus), un jumelage (Δ_+,Δ_-,d^*) est déterminé à isomorphisme près par toute fondation de Δ_+ (elles sont toutes isomorphes). Rappelons (n° 2.3) qu'une fondation est *intégrable* si elle provient effectivement d'un jumelage. Ainsi, abstraction faite de cas exceptionnels éventuels, dans lesquels les résidus de rang 1 sont nécessairement de cardinaux très petits (cf. 2.7(b) et le § 4 ci-dessous), classer les jumelages de type 2-sphérique irréductible et de rang ≥ 3 revient à donner des conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité pour les fondations de type M. En ce qui concerne les conditions nécessaires, on a l'énoncé suivant :

(a) *pour qu'une fondation $\mathscr{F} = (E,c_0,(\Delta_{ij}))$ soit intégrable, il faut*

(i) qu'elle soit de Moufang (ce qui veut dire que les Δ_{ij} sont des polygones de Moufang et que si m_{ij} et m_{jk} sont ≥ 3, alors les structures d'ensembles de Moufang induites sur $\Delta_{ij} \cap \Delta_{jk}$ par Δ_{ij} et Δ_{jk}, selon 1.4, sont les mêmes) ;

(ii) que, pour $i,j,k \in I$ distincts, la fondation de rang 3 « restriction de $\mathscr{F}$ à $\{i,j,k\}$ » (en un sens évident) soit intégrable.

La preuve de cette assertion n'est pas difficile (voir notamment [25]). Lorsque le type M restreint au triple $\{i,j,k\}$ est sphérique, (ii) s'exprime par des conditions sur des Δ_{ij} faciles à expliciter puisque les immeubles sphériques de rang 3 sont connus. La conjecture 2 de [25] était basée sur la croyance que, pour $M_{\{i,j,k\}}$ non sphérique, la condition (ii) est vide, mais Bernhard Mühlherr m'a montré que la matrice $\tilde{A}_2$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

contredit cette hypothèse.

3.3. Une contribution importante à la solution du problème d'existence a été apportée par B. Mühlherr. Ses résultats entraînent par exemple *l'intégrabilité de toute fondation de Moufang dans laquelle tous les Δ_{ij} sont des immeubles de groupes algébriques déployés sur un même corps commutatif* (cf. [9]). Brossée à grands traits, sa méthode, qui devrait pouvoir s'appliquer à des cas beaucoup plus généraux, est la suivante. On considère le graphe Γ de la matrice M, graphe dont l'ensemble des sommets est I et dont les arêtes sont les paires $\{i,j\}$ telles que m_{ij} soit $\neq 2$. Soit $\tilde{\Gamma}$ un arbre, revêtement universel de Γ, et $\tilde{M}$ la matrice « revêtement universel de M » en un sens évident, dont le graphe est $\tilde{\Gamma}$. La fondation $\mathcal{F}$ donnée, de type M, se relève naturellement en une fondation $\tilde{\mathcal{F}}$ de type $\tilde{M}$ et deux choses doivent être établies :

(i) $\tilde{\mathcal{F}}$ est intégrable ;

(ii) le jumelage de fondation $\tilde{\mathcal{F}}$ « se descend » en un jumelage de fondation $\mathcal{F}$.

La preuve de (i), due à B. Mühlherr et H. Van Maldeghem [11], se fait à l'aide des groupes de Kac-Moody : c'est ici que la forme très particulière des Δ_{ij} intervient et l'on devine qu'elle n'est pas une restriction structurelle pour la méthode ; en revanche, le fait que $\tilde{\Gamma}$ soit un arbre est manifestement essentiel. La propriété (ii) découle d'un théorème de points fixes. On sait que l'ensemble des points fixes d'un groupe d'automorphismes d'un immeuble est « souvent » lui-même un immeuble ; il existe des théorèmes généraux à cet effet (les premières preuves d'existence de l'immeuble d'un groupe algébrique simple sur un corps quelconque par descente galoisienne se fondaient déjà sur cette observation). Ici, on a affaire, non plus à un simple immeuble, mais à un jumelage (« intégrant $\tilde{\mathcal{F}}$ »), et le groupe n'est plus un groupe de Galois mais le groupe du revêtement (« deck transformation group »).

Ces résultats ont fait l'objet de deux exposés de séminaire par B. Mühlherr en marge du cours. Il faut insister sur le caractère purement heuristique de la description qui précède. Le recours à des immeubles de rang infini pose des problèmes délicats qui nécessitent, pour les concepts utilisés (fondations, revêtements, etc.), des définitions plus élaborées que celles, volontairement simplifiées, adoptées dans ce Résumé ; B. Mühlherr a dû commencer par les préciser.

4. *La condition (co) pour les polygones de Moufang*

4.1. Le théorème suivant est dû à P. Abramenko [1] :

(a) *Les seuls polygones de Moufang ne satisfaisant pas la condition (co) sont ceux associés aux groupes* $C_2(\boldsymbol{F}_2)$, $G_2(\boldsymbol{F}_2)$, $G_2(\boldsymbol{F}_3)$ *et* ${}^2F_4(\boldsymbol{F}_2)$.

(N.B. Vu la définition adoptée pour (co), il n'est pas nécessaire de distinguer un polygone et son dual.)

La preuve indiquée dans [1] utilise la classification des polygones de Moufang ; les détails sont souvent laissés au lecteur mais recouvrent des développements assez longs. Vu l'importance du résultat pour le sujet du cours (cf. les n^os^ 2.5 à 2.7 ci-dessus), il m'a paru intéressant de reprendre la question avec plus de détails en essayant de réduire autant que possible la part faite aux distinctions de cas. La méthode proposée était basée sur deux lemmes s'appliquant à tous les m-gones de Moufang indépendamment de m et qui font l'objet des énoncés 4.2 (a) et 4.3 (b) ci-dessous ; le premier est aussi à la base de la démonstration d'Abramenko. Finalement, cette méthode n'est vraiment efficace que pour $m = 6$ et, dans une moindre mesure, pour $m = 8$. Le cas $m = 6$ est traité en détail au n° 4.4. Les autres valeurs de m (à savoir 3, 4, 8) sont brièvement passées en revue au n° 4.5. Enfin, le n° 4.6 s'intéresse à la condition (co) pour des polygones qui ne sont plus supposés de Moufang. (N.B. Une démonstration plus détaillée de 4.1(a) a fait l'objet d'une prépublication de P. Abramenko et H. Van Maldeghem [3], motivée par le cours et parue depuis.)

4.2. Dans ce qui suit, on adopte le point de vue et les notations de [22]. On considère un m-gone de Moufang Δ dans lequel on choisit un « appartement », c'est-à-dire un $2m$-cycle, $(..., e_{-1}, e_0, e_1, ... \mid e_i = e_{i+2m})$: rappelons que Δ est un graphe dont les arêtes sont les chambres du m-gone. Pour $z \in \mathbf{Z}$, le groupe fixant $e_{z+1},...,e_{z+m-1}$ ainsi que toute arête aboutissant à l'un de ces sommets (groupe « radiciel ») est noté U_z. Le produit (ensembliste) $U_1 \dots U_m$ est un groupe que nous notons U_+. Soit a (resp. a') l'arête $\{e_0,e_1\}$ (resp. $\{e_m,e_{m+1}\}$). On sait que, vu la condition de Moufang, le groupe U_+, qui fixe a', est simplement transitif sur l'ensemble des arêtes opposées à a'. On peut donc identifier cet ensemble à $U_+.a$, ce que nous ferons. La condition de Moufang implique aussi que les galeries (ou chemins), avec ou sans rebroussement, commençant par a et totalement opposées à a', sont les suites de la forme a, u_1a, u_2u_1a, ..., $u_Nu_{N-1} \dots u_1a$, où les u_i appartiennent alternativement à U_1 et U_m (en commençant soit par l'un, soit par l'autre). Comme le groupe des automorphismes de Δ permute transitivement ses arêtes, la condition (co) est satisfaite si et seulement si toute arête ua, avec $u \in U_+$, est l'extrémité d'une suite du type indiqué. Autrement dit,

(a) *la condition (co) est satisfaite si et seulement si U_+ est engendré par U_1 et U_m,*

ce qui peut encore s'exprimer par la relation

(4.2.1) $\qquad [U_1,U_m] = U_2 \dots U_{m-1}$.

Ceci est le lemme 18 de [1].

4.3. Soit T le groupe des automorphismes de Δ normalisant chaque U_i. Il s'avère que la propriété suivante est presque toujours vraie :

(Étr) *si $i,j \in \{2,...,m-1\}$, $i \neq j$, les groupes U_i et U_j, considérés comme T-groupes, sont « étrangers », c'est-à-dire sans sous-quotients (quotient d'un T-sous-groupe par un T-sous-groupe distingué dans celui-ci) T-isomorphes non triviaux.*

D'autre part, on va voir que l'assertion suivante se vérifie aisément en utilisant seulement les données radicielles exhibées dans [26], sans que l'on doive recourir à la classification.

(a) *Le groupe $Y = U_2 \dots U_{m-1}$ possède une suite centrale $Y \supset Y_1 \supset \dots \supset \{1\}$ dont chaque pas (Y_i,Y_{i+1}) ne « mord » que sur l'un des U_s (c'est-à-dire qu'il existe s tel que $Y_i = (Y_i \cap U_s).Y_{i+1}$.*

Rappelons que $m = 3, 4, 6$ ou 8 (cf. [16], [27]). Si $m = 3$, $Y = U_2$ est commutatif et il n'y a rien à prouver. Si $m = 4$, on peut, sans nuire à la généralité, supposer U_2 commutatif et prendre alors $Y_1 = U_3'$ (groupe dérivé de U_3) et $Y_2 = \{1\}$. Si $m = 6$, les U_i sont naturellement indexés par un système de racines de type G_2 (dans le cas exceptionnel des « groupes mixtes », il y a deux indexations possibles et l'on choisit arbitrairement l'une d'elles) ; si, pour fixer les idées, les U_{2i} correspondent aux racines courtes, la suite $Y_1 = U_3U_4$, $Y_2 = U_3$, $Y_3 = \{1\}$ convient. Enfin, pour $m = 8$, on peut, avec les notations de [27], 1.7.2, prendre $Y_1 = U_2'U_3U_4'U_5U_6'$, $Y_2 = U_4'$, $Y_3 = \{1\}$.

Le lemme suivant montre à présent que, pour établir (co), il suffit de vérifier la condition (Étr) ; c'est au cours de cette vérification que la classification intervient.

(b) *Si (Étr) est vraie, alors la relation (4.2.1), donc aussi (co), est satisfaite.*

Esquissons la preuve de ceci. Le lemme 3.3 de [4], p. 72, implique que tout T-sous-groupe de $U_2 \ldots U_{m-1}$ est engendré par ses intersections avec $U_2, \ldots, U_{m-1}$. On sait que l'application produit $U_1 \times \ldots \times U_m \to U_+$ est bijective. Appelons U_i-composante d'un élément de U_+, sa projection sur U_i pour la décomposition en question. Pour établir (4.2.1), il suffit, d'après ce que l'on vient de voir, de montrer que tout élément de U_i, pour $i \in \{2,\ldots,m-1\}$, est la U_i-composante d'un élément de $[U_1,U_m]$. Or, cela résulte aussitôt de l'énoncé suivant qui n'est qu'une reformulation *ad hoc* d'une partie de la Proposition 2.9 de [17], p. 572 ; pour tout entier r, on pose $U_r^* = U_r - \{1\}$.

(c) *Étant donnés des éléments quelconques $u_i \in U_i^*$ et $u_{i+m} \in U_{i+m}^*$, il existe une suite $(u_r)_{r \in \mathbb{Z}}$ ($u_r \in U_r^*$) contenant ces éléments et telle que, pour tout entier r, on ait*

$$[u_{r+1}{}^{-1}, u_{r+m}] = u_{r+2} \ldots u_{r+m-1} .$$

4.4. Le cas $m = 6$

Rappelons d'abord les éléments de la classification des hexagones de Moufang (cf. [15], 4.7 ; la preuve de ces résultats, annoncée là, sera donnée dans un livre en préparation de J. Tits et R. Weiss). Écartons pour l'instant le cas des hexagones infinis de type « mixte » (cf. *loc. cit.*, Remark a)). Alors, un hexagone de Moufang Δ est associé à un groupe algébrique simple $\mathcal{G}$, disons adjoint, de type relatif G_2 sur un corps k. Soient $\mathcal{S}$ un tore k-déployé maximal de $\mathcal{G}$, α_i ($i = 1, 2, \ldots, 12$) les racines relatives de $\mathcal{G}$ par rapport à $\mathcal{S}$, placées dans un ordre circulaire naturel tel que les racines α_{2i} soient courtes, $\mathcal{T}$ le centralisateur de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{U}_i$ le sous-groupe radiciel de $\mathcal{G}$ correspondant à α_i : celui-ci est donc un espace vectoriel sur lequel $\mathcal{S}$ opère à travers le caractère α_i. Soient S, T, U_i les groupes de k-points de $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}_i$. Les groupes T et U_i ne sont autres (à conjugaison éventuelle près) que ceux dénommés ainsi en 4.3 et 4.2. On voit donc que

(a) *il existe un sous-groupe S de T isomorphe à $k^{\times 2}$ et un système de caractères $(\alpha_i \mid i=1,\ldots,12)$ de type G_2 de S tels que, pour tout i, U_i soit un k-espace vectoriel sur lequel S opère par l'intermédiaire de α_i.*

On vérifie aisément que cette conclusion s'étend au cas des hexagones de type mixte, mais que, dans ce cas, les espaces vectoriels U_{2i} peuvent être de dimension infinie.

La situation qui nous intéresse est celle où, considérés comme T-groupes, U_2, U_3, U_4 et U_5 sont deux à deux étrangers. Pour cela, il suffit évidemment qu'ils le soient déjà considérés comme S-groupes. Mais tout sous-quotient de U_i est un espace vectoriel sur lequel S opère par le caractère α_i, donc U_i et U_j ne peuvent être non étrangers que si les caractères α_i et α_j coïncident sur S. La configuration particulière des racines α_h montre que, pour $i,j \in \{2,3,4,5\}$, $\alpha_i-\alpha_j$ est toujours, soit une racine, soit, pour $\{i,j\} = \{2,5\}$, le double d'une racine. Si $s^{\alpha_i-\alpha_j} = 1$ pour tout $s \in S$, cela veut dire, dans le premier cas, que $k^\times = \{1\}$, d'où $k \simeq \mathbf{F}_2$, et dans le second, que tout élément de $k^\times$ est d'ordre 2, d'où $k \simeq \mathbf{F}_3$. Cela prouve la proposition 4.1(a) pour $m = 6$.

4.5. *Les cas $m = 3,4,8$*

Lorsque $m = 3$, la condition (Étr) est vide, donc (co) est toujours vraie.

Le cas $m = 8$ peut se traiter de façon analogue au cas $m = 6$, en utilisant le système de racines introduit dans [17], 1.3, mais une vérification directe de la relation (4.2.1) sur la base des formules de [17], 1.7, est à peine plus compliquée.

Enfin, pour $n = 4$, on pourrait sans doute aussi arriver au résultat en appliquant le lemme 4.3 (b), mais cela nécessiterait l'utilisation de la classification des quadrangles de Moufang, beaucoup plus délicate que celle des hexagones (cf. [24] et le livre en préparation mentionné en 4.4), et comporterait de longues discussions. Or, il est tout à fait inutile d'en passer par là car, lorsque $m = 4$, on dispose d'un résultat bien plus général que 4.1(a), et qui se démontre très simplement (voir 4.6.1).

4.6. *La propriété (co) pour les polygones généralisés non nécessairement de Moufang*

4.6.1. *Quadrangles*

Rappelons qu'un quadrangle épais Δ peut être décrit comme un ensemble Q dont certaines parties sont distinguées et appelées droites, les axiomes suivants étant satisfaits :

— toute droite possède au moins trois points ;

— tout point appartient à trois droites au moins ;

— si $p \in Q$ et si D est une droite ne contenant pas p, il existe exactement un point de D, que nous notons $\pi(p,D)$, et une droite, notée $\Pi(D,p)$, qui contient p et $\pi(p,D)$.

Si z et un point et Z une droite contenant z, on pose encore $\pi(z,Z) = z$ et $\Pi(Z,z) = Z$, de sorte que les fonctions π et Π sont définies sur tout couple formé d'un point et d'une droite, resp. d'une droite et d'un point. Il est facile de voir que toutes les droites ont le même cardinal, nous le notons $s + 1$, et que tous les points appartiennent au même nombre de droites, soit $t + 1$. Les chambres sont les couples formés d'une droite et d'un point de celle-ci. Deux points (resp. deux droites) sont dit(e)s *opposée(e)s* s'ils n'appartiennent pas à une même droite (resp. si elles sont disjointes).

(a) *Si l'on n'a pas $s = t = 2$, la condition (co) est satisfaite.* (Hans Cuypers).

La démonstration de ce résultat telle qu'elle est exposée par A. Brouwer dans [5] (c'est la seule référence que je connaisse) est assez maladroitement formulée et difficile à lire (par exemple, le lecteur n'est jamais averti qu'il s'agit d'une preuve par l'absurde). L'argument suivant, présenté dans le cours, m'a paru plus convaincant.

Soit $c = (x,X)$ une chambre, y un point opposé à x, Y une droite opposée à X, A l'ensemble des droites contenant y, B l'ensemble des points de Y, et A_0 (resp. B_0) l'ensemble A privé de $\Pi(X,y)$ (resp. B privé de $\pi(x,Y)$). Considérons les applications $\alpha : A_0 \to B$ et $\beta : B_0 \to A$ définies par $\alpha(Z) = \pi(\pi(x,Z),Y)$ et $\beta(z) = \Pi(\Pi(X,z),y)$. Pour $z \in B_0$ et $Z \in A_0$, la suite

$$y,\ Z,\ \pi(z,Z),\ \Pi(Z,z),\ z,\ Y,$$

formée alternativement de points et de droites, détermine une suite de chambres qui connecte y et Y dans le graphe c^{op} des chambres opposées à c, sauf dans les cas suivants :

— $\pi(z,Z)$ n'est pas opposé à x, i.e. $z = \alpha(Z)$;

— $\Pi(Z,z)$ n'est pas opposée à X, i.e. $Z = \beta(z)$.

(Ceci se comprend mieux à l'aide d'un dessin). L'ensemble de ces deux cas d'exception se résume par la relation

$$(z,Z) \in \text{graphe } \alpha \cup \text{graphe } \beta.$$

Si c^{op} n'est pas connexe, il doit exister un couple (z,Z) satisfaisant à cette relation et cela implique que $s = t = 2$ (donc aussi (a)), ainsi qu'il résulte du lemme ensembliste suivant.

(b) *Soient A, B deux ensembles, $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ des parties de cardinaux ≥ 2 et $\alpha : A_0 \to B$, $\beta : B_0 \to A$ des applications. Si $A_0 \times B_0 \subset$ graphe $\alpha \cup$ graphe β, on a Card A_0 = Card $B_0 = 2$.*

Preuve. — Pour $a \in A_0$, on a $\{a\} \times B_0 \subset$ graphe $\alpha \cup$ graphe β, donc graphe β contient tous les points de $\{a\} \times B_0$ sauf peut-être un et un seul d'entre eux. Pour $a' \in A_0 - \{a\}$, $\{a'\} \times B_0$ contient donc au plus un point de graphe β et au plus un point de graphe α, à savoir $(a',\alpha(a'))$, donc Card $B_0 \leq 2$. Symétriquement, Card $A_0 \leq 2$, q.e.d.

4.6.2. *Polygones finis*

Utilisant des techniques fines de combinatoire, A. Brouwer prouve, dans [5], que tout polygone fini sauf ceux énumérés dans 4.1(a) possède la propriété (co).

4.6.3. *Cas général*

En revanche, un procédé de type « construction libre », qui a été exposé dans le cours, permet à P. Abramenko ([1], p. 63, Proposition 9) d'exhiber, pour tout $m \geq 5$, des m-gones généralisés ne satisfaisant pas à (co).

RÉFÉRENCES

[1] P. ABRAMENKO, *Twin buildings and applications to S-arithmetic groups (Lecture Notes in Math.* **1641,** Springer, 1996).

[2] P. ABRAMENKO et B. MÜHLHERR, *Présentations de certaines BN-paires jumelées comme sommes amalgamées (C.R. Acad. Sci. Paris* **325** (1997), Série I, 701-706).

[3] P. ABRAMENKO et H. VAN MALDEGHEM, *Connectedness of opposite-flag geometries in Moufang polygons,* prépublication, Bielefeld, 1998.

[4] A. BOREL et J. TITS, *Groupes réductifs* (*Publ. Math. IHES* 27 (1965), 55-151).

[5] A. BROUWER, *The complement of a geometric hyperplane in a generalized polygon is usually connected (in « Finite geometry and combinatorics »,* LMS. Lecture Notes **191,** Cambridge Univ. Press (1993), 53-57).

[6] A. CHOSSON, *Immeubles jumelés,* manuscrit, Paris, 1998.

[7] B. MÜHLHERR, *An alternative proof of the extension theorem for twin buildings,* prépublication, Dortmund, 1997.

[8] —, *On the simple connectedness of a chamber system associated to a twin building,* prépublication, Dortmund, 1997.

[9] —, *Locally finite and locally split twin buildings of 2-spherical type,* prépublication, 1997.

[10] B. MÜHLHERR et M. RONAN, *Local to global structure in twin buildings* (*Inventiones Math.* **122** (1995), 71-81).

[11] B. MÜHLHERR et H. VAN MALDEGHEM, *On certain twin buildings over tree diagrams* (*Bull. Belg. Math. Soc.* **5** (1998), 393-402).

[12] M. RONAN, *Local isometries of twin buildings,* prépublication, Chicago, 1998.

[13] M. RONAN et J. TITS, *Twin trees. I (Inventiones Math.* **116** (1994), 463-479).

[14] J. TITS, *Buildings of spherical types and finite BN-pairs* (*Lecture Notes in Math.* **383**, Springer, 1974).

[15] —, *Classification of buildings of spherical type and Moufang polygons : a survey* (*Atti Coll. Internat. Teorie Combinatorie,* Accad. Naz. Lincei, 1975, T. 1, Roma (1976), 229-246).

[16] —, *Non-existence de certains polygones généralisés* (*Inventiones Math.* **36** (1976), 275-284, et **51** (1979), 267-269).

[17] —, *Moufang octagons and the Ree groups of type* $^2F_4$ (*Amer. J. Math.* **105** (1983), 539-594).

[18] —, *Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées* (*Bull. Soc. Math. Bel.* **38** (1986), 367-387).

[19] —, *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields* (*J. Algebra* **105** (1987), 542-573).

[20] —, *Résumé de cours pour l'année 1988-1989* (*Annuaire du Collège de France,* 89ᵉ année, 81-95).

[21] —, *Résumé de cours pour l'année 1989-1990* (*Annuaire du Collège de France,* 90ᵉ année, 87-103).

[22] —, *Résumé de cours pour l'année 1993-1994* (*Annuaire du Collège de France,* 94ᵉ année, 101-114).

[23] —, *Résumé de cours pour l'année 1994-1995* (*Annuaire du Collège de France,* 95ᵉ année, 79-95).

[24] —, *Résumé de cours pour l'année 1995-1996* (*Annuaire du Collège de France,* 96ᵉ année, 79-101).

[25] —, *Twin buildings and groups of Kac-Moody types* (*Groups, combinatorics and geometry,* Durham, 1990, LMS. Lecture Notes **165,** Cambridge Univ. Press (1992), 249-286).

[26] —, *Moufang polygons, I. Root data* (*Bull. Belg. Math. Soc.* **3** (1994), 455-468).

[27] R. WEISS, *The nonexistence of certain Moufang polygons* (*Inventiones Math.* **51** (1979), 261-266).

J. T.

SÉMINAIRES

Outre les exposés de B. Mühlherr, mentionnés au nº 3.3 de ce Résumé de cours, six exposés de séminaires ont été consacrés par J. Tits au sujet : *Groupes exotiques et cohomologie galoisienne.* Le but en était l'adaptation aux « groupes mixtes » (cf. la référence [14] de la liste ci-dessus, nº 10.3.2, p. 203) des méthodes de cohomologie galoisienne pour la classification des formes des groupes algébriques simples, notamment la définition d'un *indice* et d'un *noyau anisotrope.* La principale application que l'on avait en vue était la preuve galoisienne de l'existence des groupes d'indice , qui ont pour immeubles les nouveaux quadrangles de Moufang découverts par R. Weiss (voir le Résumé du Cours de 1996-1997, *Annuaire du Collège de France,* 97ᵉ année, p. 101).

Missions

Exposés

— *Abstract and semi-algebraic homomorphisms of algebraic simple groups,* Symposium Algebra, à l'occasion de l'éméritat du Professeur F. Bingen, Bruxelles (VUB), novembre 1997.

— *Buildings,* Colloque « Emil Artin 100th birthday », Amsterdam, le 3 mars 1998.

— *Algebraic simple groups of rank 2 and Moufang polygons,* Colloque « Algebraische Gruppen », Oberwolfach, avril 1998.

— *Gemischte einfache algebraische Gruppen und Galois-Kohomologie,* Festkolloquium en l'honneur de Günter Harder, Bonn, avril 1998.

— *La classification des immeubles et immeubles jumelés,* Strasbourg, juin 1998.

Codirection avec P. Slodowy et T.A. Springer d'un colloque intitulé *Algebraische Gruppen,* Oberwolfach (RFA), avril 1998.