

## Physique statistique

M. Philippe NOZIÈRES, membre de l'Institut  
(Académie des Sciences), professeur

Cours : « *La condensation de Bose Einstein* »

Ce cours a été donné entièrement à l'Université Joseph Fourier de Grenoble. Il reprenait un sujet déjà couvert à Paris pendant l'année académique 1985-1986, mais qui a beaucoup évolué depuis. Les théories microscopiques de la superfluidité sont aujourd'hui bien comprises et il n'y avait pas lieu d'y consacrer beaucoup de temps. En revanche les problèmes de cohérence interne du condensat d'une part, la compétition entre superfluidité, localisation, désordre et dissociation d'autre part, soulèvent des questions de principe nouvelles. Surtout le domaine a été bouleversé par la découverte récente d'une condensation de Bose d'atomes alcalins piégés dans un puits de potentiel. Ces systèmes dilués (et par conséquent métastables) permettent une analyse théorique précise. La fréquence propre du puits de potentiel harmonique fournit une échelle d'énergie nouvelle qu'il faut comparer à l'énergie d'interaction : on est ainsi conduit à une physique beaucoup plus riche. Le cours s'est articulé autour de ces développements récents.

La condensation de Bose Einstein correspond à des situations physiques bien réelles. Pendant longtemps l'archétype a été  $^4\text{He}$  liquide (une fois réglée la controverse entre Landau et London !) : c'est un bel exemple de superfluidité, mais les interactions sont fortes et la théorie ne peut être que qualitative. Au fil des années on a cherché une condensation de l'hydrogène atomique, stabilisé par l'orientation des spins électroniques : elle n'a réussi que tout récemment, grâce aux nouvelles techniques de piégeage. On a aussi placé beaucoup d'espoirs dans la condensation des excitons dans les semiconducteurs : la quête reste incertaine, malgré des progrès incontestables. Le meilleur exemple reste la condensation de deux fermions liés, c'est-à-dire la supraconductivité. Ce domaine était moribond en 1985. La découverte des supraconducteurs à haute température lui a donné une nouvelle jeunesse ! Le passage d'un régime « BCS » de couplage faible à la condensation de Bose de paires fortement liées est actuellement un sujet d'une grande actualité qu'il convenait de recadrer dans un langage moderne.

### 1) Le gaz idéal

Le système homogène est un problème élémentaire. En 3 dimensions une fraction finie des bosons s'accumule dans l'état fondamental lorsque la température  $T$  est inférieure à une température critique  $T_c \approx (N/V)^{2/3}$  ( $N$  est le nombre de particules dans un volume  $V$ ). Il n'y a pas de transition en 1 dimension, le cas  $d = 2$  est marginal. La situation est très différente lorsque les bosons sont confinés dans un puits harmonique. Positions et vitesses jouent alors des rôles symétriques et la température critique est pour un puits isotrope en 3 dimensions d'ordre  $\omega_0 N^{1/3}$ , où  $\omega_0$  est la fréquence propre du puits. En jouant sur l'anisotropie du potentiel de piégeage on peut diminuer la dimension  $d$  : la condensation persiste si  $d = 2$  ( $T_c \approx \omega_0 N^{1/2}$ ), elle est marginale si  $d = 1$ .

### 2) Effet des interactions : cohérence et superfluidité

#### *a - Le gaz non piégé à température nulle*

L'approximation la plus simple est celle de Hartree, qui préserve l'état du gaz idéal et calcule la valeur moyenne de l'énergie : le fondamental correspond à la condensation dans l'état  $k = 0$ . Pour une interaction  $U$  répulsive, le potentiel chimique et la compressibilité sont finis, conduisant à une vitesse du son  $c \approx \sqrt{U}$  (pour une attraction pure il n'y a pas de fondamental car les bosons s'effondrent spontanément vers une densité infinie : la compressibilité est négative). A ce stade se pose une question importante : pourquoi tous les bosons sont ils dans le même état ? Pourquoi ne pas les partager entre deux états d'énergies égales (au moins dans la limite thermodynamique) ? En fait une telle fragmentation coûte une énergie extensive, et donc est exclue dans le fondamental. Cette conclusion est souvent occultée : *c'est l'échange qui est responsable de la cohérence interne du condensat*. La répulsion joue donc un rôle essentiel, c'est elle qui permet l'écoulement superfluide aux vitesses inférieures à la vitesse du son (ou plus précisément au  $v_c$  défini par le « critère de Landau »).

L'approximation de Hartree se généralise facilement à une situation inhomogène où les bosons condensent dans un état de fonction d'onde  $\varphi(r)$ . Grâce à la condensation de Bose, cette fonction d'onde devient une observable macroscopique — en particulier le gradient de phase de  $\varphi$  définit la vitesse d'écoulement superfluide. Exprimée à l'aide du vecteur d'état l'équation de Schrödinger reste bien entendu linéaire, mais sa traduction à l'aide de  $\varphi$  est non linéaire du fait des interactions : c'est la célèbre équation de Gross-Pitaevski qui fournit l'approximation de champ moyen du condensat de Bose. Cette équation est très riche ! En étudiant le profil de densité près d'une paroi, ou le cœur d'un tourbillon, on définit une *longueur de corrélation*  $\xi \approx U^{-1/2}$  qui doit être comparée à la distance moyenne  $d$  entre les bosons : le rapport  $\eta = d/\xi$  est le seul paramètre sans

dimension du problème. Pour un système 3d on peut caractériser  $U$  à l'aide de  $a$ , sa longueur de diffusion à basse énergie : on a alors  $\eta \approx [Na^3/V]^{1/2}$ . L'équation de Gross-Pitaevski est valable si  $\eta \ll 1$ . La version dynamique de cette équation donne accès au spectre des excitations élémentaires qui passe d'un régime phonon ( $q \xi \ll 1$ ) à des particules libres ( $q \xi \gg 1$ ).

L'approximation de Hartree néglige les fluctuations quantiques, c'est à dire l'excitation virtuelle des particules condensées via les interactions — ce que l'on appelle la « déplétion » du condensat dont la population  $N_0$  devient  $< N$ . A l'ordre le plus bas cet effet se traite facilement en hybridant des bosons condensés  $k = 0$  avec des paires de moment nul ( $q, -q$ ) (on néglige la réexcitation des atomes de  $q$  fini). C'est l'approximation de Bogoliubov, dont l'algèbre est élémentaire (les différents  $q$  sont découplés). On retrouve ainsi le spectre d'excitation. On gagne un ordre sur l'énergie du fondamental qui apparaît comme un développement en puissance de  $\eta$ . Surtout on a accès à la déplétion  $\delta = (N - N_0)/N$ , qui est elle aussi d'ordre  $\eta$ . A noter que ces effets de fluctuations quantiques ne sont pas affectés par une éventuelle fragmentation du condensat.

La déplétion  $\delta$  avait été estimée auparavant dans un article célèbre de Penrose et Onsager, qui relie le paramètre d'ordre superfluide, c'est-à-dire la population du condensat, au comportement asymptotique de la matrice densité d'une particule  $\rho(r, r')$  lorsque l'écart  $(r - r')$  tend vers l'infini. Cette matrice densité est connue si l'on connaît le vecteur d'état complet du fondamental,  $\Phi(r_1, \dots, r_N)$ . Penrose et Onsager suggèrent un Ansatz très simple où  $\Phi$  est nul lorsque deux bosons de rayon  $a$  se recouvrent, constant autrement. On trouve alors  $\delta \approx \eta^2$ . L'origine de cette erreur n'a pas été soulignée dans la littérature — et elle est assez subtile. Elle provient de la discontinuité de la fonction d'onde au contact de deux bosons. En réalité la fonction d'onde de deux bosons dans un état  $s$  d'énergie nulle varie comme  $[1 - a/r]$  : cette longue queue domine les intégrations et l'on montre aisément qu'elle conduit à  $\delta \approx \eta$ .

La déplétion est faible dans un système dilué, mais forte dans  $^4\text{He}$  liquide : sa mesure expérimentale est un problème récurrent depuis 20 ans, qui reste encore l'objet de controverses. La méthode la plus directe est la diffusion de neutrons à haute énergie, qui « photographient » la distribution instantanée des impulsions. le principe est simple, mais les interactions dans l'état final élargissent le pic discret du condensat qui n'est plus bien résolu. Un traitement des données élaboré suggère  $\delta \approx 8\%$ . Une technique plus récente et très élégante consiste à induire l'évaporation d'atomes à la surface libre du liquide par un pinceau de phonons collimatés et monocinétiques. Si l'énergie du phonon excède le travail d'extraction du liquide, un atome est éjecté. En mesurant sa distribution en angle et en énergie, on a accès au moment et à l'énergie de l'atome initial, donc à la population  $N_q$  (comme dans les techniques « ARPES » de photoémission résolue en direction). Ici encore on a des problèmes (i) de résolution, (ii) d'interactions dans l'état final. Les résultats actuels ne sont pas fiables.

*b - Cohérence interne de bosons condensés*

Un boson peut posséder un degré de liberté interne. Parmi les exemples on peut citer le spin nucléaire d'un atome d'hydrogène dont le spin électronique est orienté par un champ appliqué, où bien le moment dipolaire électrique d'un exciton optiquement actif. L'exemple canonique reste  $^3\text{He}$  superfluide où une paire d'atomes condensée est dans un état « p ». On doit alors se demander si le condensat est dans un état pur ou dans un mélange statistique. Autrement dit, la matrice densité a-t-elle une ou plusieurs valeurs propres non nulles ? Un état pur signifie une rupture de symétrie macroscopique : l'hydrogène atomique devient ferromagnétique, la fluorescence des excitons devient superradiante. Les conséquences expérimentales sont donc importantes.

Il n'y a pas de réponse fiable en général. Si on néglige les corrélations on peut factoriser l'énergie d'interaction ( $b^*b^*bb$ ) en un produit de deux matrices densité : les deux types de condensat existent selon les paramètres (même si les cas usuels sont toujours des états purs). Une telle factorisation est hélas dangereuse : les gaz dilués piégés permettent un calcul exact qui démontre la possibilité des états de mélange.

*c - Effet des interactions pour des bosons dilués piégés*

On contrôle alors le nombre total  $N$  des bosons, mais le volume qu'ils occupent est fonction de leur énergie : le profil de densité est inconnu au départ. On peut caractériser le potentiel de piégeage par le rayon  $a_0$  de l'état fondamental dans le puits harmonique, et la force de l'interaction par une longueur de diffusion  $a$  ( $> 0$  pour une répulsion,  $< 0$  pour une attraction) : il existe un paramètre sans dimension  $a/a_0$ . En fait la physique est contrôlée par le rapport  $\eta = \text{énergie d'interaction}/\text{énergie de piégeage}$ , qui vaut  $\eta_0 = Na/a_0$  lorsque  $N$  est petit. Si  $\eta_0 \ll 1$  l'interaction est pour l'essentiel négligeable. Si au contraire  $\eta_0 \gg 1$  un gaz répulsif s'étale dans le puits sur un rayon  $R$  pour réduire son énergie d'interaction. Le fait essentiel est que  $Na^3/R^3$  reste en général  $\ll 1$  : l'énergie d'interaction reste faible devant l'énergie cinétique, bien qu'elle soit grande devant l'énergie de piégeage. Le gaz est donc « dilué » au sens habituel, ce qui permet une analyse théorique détaillée.

Lorsque  $\eta_0 \gg 1$  l'énergie cinétique n'intervient qu'aux bords du puits : partout ailleurs une simple approximation de type Thomas-Fermi suffit. On trouve ainsi un profil de densité en parabole inversée qui affleure au rayon  $R$ . L'énergie cinétique élargit cette surface extérieure, un peu comme les termes capillaires dans une goutte. Le rayon  $R$  est d'ordre  $a_0 \eta_0^{1/5}$ . Connaissant  $R$  on peut recalculer le rapport  $\eta$  qui devient d'ordre  $\eta_0^{2/5}$  : comme prévu l'étalement augmente le piégeage et réduit l'interaction. On obtient aussi le paramètre de couplage  $[Na^3/R^3]^{1/2} \approx \eta_0^{3/5}/N$  : parce que  $N$  est grand le couplage est faible bien que  $\eta_0$  soit  $\gg 1$ . L'équation de Gross-Pitaevski permet d'interpoler dans la région intermédiaire  $\eta_0 \approx 1$  : les résultats sont en excellent accord avec l'expérience.

Le cas attractif,  $a < 0$ , se rencontre dans  ${}^7\text{Li}$  : il pose le problème de l'effondrement. En fait l'état très dilué  $\eta_0 \ll 1$  est métastable : le puits harmonique bloque l'augmentation de densité. Certes la nucléation est toujours possible pour un système fini, mais elle est négligeable. Reste alors le problème de la fragmentation du condensat, qui devient énergétiquement favorable. Elle se produit lorsque l'on considère un fluide en rotation où les bosons sont condensés dans un état de moment cinétique  $m \neq 0$ . Le problème a été étudié récemment par Gunn et al. dans le modèle très simple d'un gaz 2D avec des interactions de contact dans un puits harmonique. Le moment cinétique  $L$  est un bon nombre quantique, et l'on peut étudier le fondamental pour  $L \neq 0$ . En traitant les interactions au premier ordre dans ce multiplet fondamental on trouve que l'énergie est minimale pour un condensat incohérent où les bosons se partagent entre plusieurs composantes d'un mélange statistique. C'est là le premier exemple avéré d'un phénomène très inhabituel.

La généralisation de cette analyse à température finie est plus délicate, car il faut tenir compte du fluide normal d'atomes excités. La première étape est la recherche des excitations élémentaires, non triviale car on a perdu l'invariance translationnelle. Aux échelles inférieures au rayon  $R$  ce sont des quasiparticules standard. Mais à l'échelle  $R$  apparaissent des modes collectifs de déformation : « respiration », déformation quadrupolaire, etc. Le problème est le même que pour un noyau atomique. Une fois identifiées les excitations, il faut calculer les fonctions thermodynamiques, puis la température critique où la condensation disparaît. On constate que le couplage diminue lorsque la température augmente, essentiellement parce que le système se dilate. Un traitement semiclassique du fluide normal montre qu'une interaction répulsive abaisse la température critique. Cette thermodynamique est un peu technique et elle n'a été qu'effleurée.

#### *d - Superfluidité et vorticité*

L'existence de courants superfluides permanents et la métastabilité de tourbillons quantifiés sont deux attributs essentiels de la condensation de Bose Einstein, conséquences directes de la cohérence interne du condensat. La phase  $S$  du paramètre d'ordre ne fluctue pas et devient ainsi une variable macroscopique dont le gradient fournit la vitesse superfluide. On montre facilement que  $S$  est conjuguée canonique du nombre de particules  $N$  : du fait du principe d'incertitude il faut un grand  $N$  pour bloquer  $S$ . Autrement dit la condensation de Bose Einstein est une condition nécessaire pour avoir superfluidité — mais elle n'est pas suffisante : il faut aussi verrouiller la phase.

La superfluidité d'un système étendu est bien connue. La densité superfluide traduit la « raideur de phase » de l'état fondamental (quel est le coût en énergie d'un gradient de phase ?). La limite absolue de la vitesse superfluide, donnée par le critère de Landau, correspond à l'excitation spontanée d'excitations élémentaires. Dans la pratique la vitesse critique est beaucoup plus faible, contrôlée par l'apparition de tourbillons. La physique de ces tourbillons est en principe bien

comprise : par exemple le rayon de cœur est bien décrit par l'équation de Gross-Pitaevski. Il reste cependant des zones d'ombre, comme par exemple l'effondrement d'un anneau de tourbillon dont le rayon devient comparable à la longueur de cohérence  $\xi$  : quelle est la nature de la bifurcation ? Comment intervient la quantification des rotons ?

Dans un gaz piégé le tourbillon n'est bien défini que si le rayon du cœur  $\xi$  est très inférieur au rayon de la goutte  $R$  : cette condition n'est remplie que si  $\eta_0 \ll 1$ . Sinon le condensat de moment 1 se vide spontanément dès lors qu'une perturbation relâche la contrainte de conservation du moment cinétique (par exemple une anisotropie du puits). L'observation expérimentale de ces tourbillons n'est toujours pas établie. Un problème nouveau est le moment d'inertie  $I$  du gaz lorsque l'on fait tourner le puits à vitesse angulaire  $\Omega$  — une situation familière aux physiciens nucléaires ! A température nulle ce moment d'inertie n'existe que pour un piège anisotrope et se calcule aisément. A température finie le fluide normal est entraîné par le piège et sa contribution devient vite dominante. La mesure du moment cinétique, donc de  $I$ , devrait fournir des indications utiles.

L'observation de la condensation de Bose Einstein dans les gaz d'atomes alcalins piégés était un tour de force. Mais l'étape la plus novatrice a été la mise en évidence de la cohérence de phase du condensat par des expériences d'une extrême élégance. On peut couper un nuage en deux par un faisceau laser, puis laisser les deux moitiés se rejoindre : on observe alors des franges d'interférence, manifestation spectaculaire de la cohérence de phase. On peut dès lors imaginer une variété d'expériences du type effet Josephson, etc. Ce domaine est en pleine expansion, et l'état des lieux a été fait dans deux séminaires confiés à des experts.

#### *e - Gaz bidimensionnel : la transition de Kosterlitz-Thouless*

Nous avons vu qu'un gaz idéal bidimensionnel ne présentait pas de condensation de Bose Einstein. En présence d'interactions il n'y a pas d'ordre à longue distance, en vertu d'un théorème général. Mais il subsiste une transition à une température  $T_c$  où les fonctions de corrélation passent d'une décroissance exponentielle ( $T > T_c$ ) à une loi de puissance ( $T < T_c$ ). La rupture de symétrie est marginale. Ce comportement est piloté par les fluctuations de la phase  $S$  du paramètre d'ordre  $\varphi$ , ce qui nous amène d'abord à reconsidérer la théorie classique de Landau en 3 dimensions.

Pour ce faire on définit une énergie libre « partielle »  $F$  à paramètre d'ordre  $\varphi(\mathbf{r})$  donné, qui incorpore l'entropie des fluctuations internes mais pas les fluctuations de  $\varphi$  : elle introduit deux longueurs caractéristiques, la longueur de corrélation  $\xi_0$  et l'échelle atomique  $a$  qui coupe les sommations sur les moments (dans une théorie de champ moyen les fluctuations sont ignorées : la température critique  $T_{cMF}$  correspond à l'annulation du terme quadratique). On introduit alors les fluctuations thermiques de  $\varphi$ , en module, et en phase : si elles annulent la valeur moyenne  $\langle \varphi \rangle$ , un autre mécanisme de transition émerge, avec deux cas de figure :

(i) Si  $\xi_0$  et  $a$  sont comparables, le profil en double puits disparaît : on retrouve une transition de Landau habituelle avec réduction du terme quadratique par couplage mode-mode des fluctuations d'amplitude.

(ii) Si  $\xi_0 \gg a$  (raideur faible), les fluctuations d'amplitude sont négligeables et  $T_c$  est contrôlé par les fluctuations de phase : la moyenne de  $e^{iS}$  est nulle. C'est ce dernier régime qui nous concerne : l'ordre local persiste mais les fluctuations de phase détruisent l'ordre à longue distance.

Le cas bidimensionnel est spécial parce que les fluctuations de  $\varphi$  sont marginales. Dans une approximation harmonique la fonction de corrélation de  $\varphi$  décroît selon une loi de puissance  $r^{-\alpha}$  à toute température, avec un exposant  $\alpha$  proportionnel à la température  $T$ . Mais l'approximation harmonique ne tient pas compte des singularités de type tourbillon. On peut les inclure par une méthode de type renormalisation : elles conduisent à une température critique  $T_{\text{cKT}}$  au dessus de laquelle les tourbillons prolifèrent : la décroissance des corrélations devient alors exponentielle. Cette transition « de Kosterlitz-Thouless » apparaît dans des problèmes physiques très divers.

### *f - Cinétique de la condensation de Bose*

La question redevient d'actualité pour les gaz alcalins piégés où cette cinétique est mesurable : pour la formuler il faut un mécanisme de thermalisation qui absorbe l'énergie d'un gaz initialement normal. Le problème avait été évoqué dans le cours de 1985 : cette année seuls les résultats les plus saillants ont été rappelés. En l'absence d'interactions les collisions inélastiques avec un thermostat rassemblent très vite les atomes du futur condensat dans une gamme d'énergie de largeur  $\delta$ , qui doit ensuite décroître pour atteindre un seul état. Cette décroissance est lente,  $\delta \approx 1/t$ , car les faibles transferts d'énergie sont de plus en plus difficiles. C'est l'énergie d'échange due aux interactions qui permet une cinétique rapide : une fois nucléé un embryon de paramètre d'ordre, quelques collisions suffisent pour atteindre l'état d'équilibre. Un tel comportement se rencontre dans toutes les transitions de phase (par exemple dans un ferromagnétique) — mais la nucléation démarre toujours d'un germe localisé : la description théorique est difficile et elle n'a pas été abordée.

### **3) Compétition entre superfluidité et localisation**

Les interactions tendent à vider le condensat : peuvent elles le vider complètement ? Autrement dit la condensation de Bose Einstein est un phénomène fragile : avec quel autre phénomène physique est elle en compétition ? Pour un gaz de bosons y a-t-il des alternatives à la superfluidité ? Ici encore l'archétype est  $^4\text{He}$  : si on augmente la pression il devient solide : les atomes se localisent et leur statistique ne joue plus qu'un rôle mineur. En gros il faut comparer l'énergie cinétique  $K$  et l'énergie potentielle  $V$ . La superfluidité optimise  $K$  et l'emporte si  $V \ll K$ , la cristallisation optimise  $V$  et l'emporte si  $V \gg K$ .

Une formulation ancienne un peu naïve, mais très simple, considère des bosons à cœur dur sur un réseau. La répulsion locale infinie n'autorise que deux états par site,  $n = 0$  ou  $1$ . Le problème est alors isomorphe à un modèle de spins  $1/2$  : l'énergie cinétique est équivalente à un couplage ferromagnétique transverse, une répulsion entre premiers voisins équivaut à un couplage antiferromagnétique d'Ising. Pour un remplissage  $1/2$  l'état ferromagnétique est l'analogue du superfluide, l'état antiferromagnétique l'analogue du solide. Un simple calcul de champ moyen montre qu'il existe une transition entre ces deux états, confirmant les arguments qualitatifs.

Plus récemment on a beaucoup étudié le modèle de Hubbard pour des bosons, avec une répulsion finie  $U$  sur un même site et une énergie de saut entre premiers voisins  $t$ . Une approximation de champ moyen demande quelques précautions, mais comme toujours elle fournit l'essentiel des résultats qualitatifs. Avec un remplissage d'un boson par site on a une transition franche superfluide-isolant pour un  $U$  critique, très analogue à la transition de Mott métal-isolant dans un gaz d'électrons. La densité superfluide  $\rho_s$  est maximale pour  $U = 0$  et décroît jusqu'à  $0$  à la transition. Une transition du même type existe pour tous les remplissages entiers, de moins en moins marquée au fur et à mesure que  $N$  augmente. Pour un remplissage non entier le fondamental est toujours superfluide, avec un crossover à la place de la transition franche. On peut aussi travailler à potentiel chimique  $\mu$  donné et non à densité donnée : l'état isolant couvre alors une plage de stabilité de largeur finie, correspondant au gap de l'état isolant. On calcule de même les excitations élémentaires, puis la « thermodynamique de la fusion ». Tous ces résultats sont confirmés par simulation Monte Carlo.

La localisation de Mott provient des corrélations, la localisation d'Anderson provient du désordre. Ce dernier mécanisme existe aussi pour des bosons : on peut le modéliser par un potentiel à un corps aléatoire sur chaque site du réseau. L'état localisé correspond alors à un « verre de Bose ». Comparé aux fermions, la nouveauté est l'absolue nécessité d'inclure une répulsion en plus du désordre : sinon tous les fermions s'accumuleraient dans la queue localisée de la bande et le système ne serait jamais superfluide, si faible soit le désordre. C'est la répulsion qui force le potentiel chimique à monter au delà du seuil de mobilité (concept à un électron qui ignore la statistique). La transition verre-superfluide implique donc désordre et interaction. En jouant sur les paramètres on construit un diagramme d'états qui contient les deux types de transition, Mott et Anderson.

Cette compétition superfluidité/localisation est d'une grande importance pratique. Elle intervient dans  $^4\text{He}$  dans des milieux poreux (Vycor, ...), pour lequel on peut mesurer  $\rho_s$  par  $4^\circ$  son. Elle est surtout importante dans les supraconducteurs granulaires, où le désordre est piloté par la taille des grains. Les courbes de résistivité dans des films de bismuth démontrent le phénomène de façon spectaculaire :  $\rho$  tend vers  $0$  ou  $\infty$  lorsque  $T$  tend vers  $0$ .

#### 4) Condensation de paires de fermions : supraconductivité

Deux fermions liés par une interaction attractive se comportent comme un boson si le système est dilué (les bosons ne se recouvrent pas) : ils doivent donc pouvoir subir une condensation de Bose Einstein. Inversement, un nouvel écueil guette la superfluidité : un boson peut se dissocier en deux fermions sous jacents, qui forment un liquide de Fermi normal au lieu d'être supraconducteur. Dissociation et localisation sont deux ennemis complémentaires de la condensation de Bose Einstein. Il est intéressant de reconsidérer les théories de la supraconductivité dans cette optique, en dégageant la physique des divers cas limites.

Nous nous limitons à la supraconductivité « s » où les paires de fermions se lient dans un état isotrope singulet de spin. La formulation est élémentaire et s'appuie sur une approximation de Hartree. L'opérateur destruction  $b_q$  d'une paire liée de moment total  $q$  fait intervenir la fonction d'onde interne  $\varphi_k$ . On écrit le vecteur d'état fondamental sous la forme  $\exp[\varphi b_o^*] \text{vac}$ . Ce vecteur d'état se factorise comme un produit de termes pour chaque paire  $(k, -k)$ , ces termes commutant les uns avec les autres. L'algèbre est très simple (analogue à celle de Bogoliubov pour des bosons) : le vecteur d'état n'est autre que la fonction d'onde de BCS, superposition cohérente pour chaque  $k$  de deux états de paire, vide et plein, avec des amplitudes  $u_k$  et  $v_k$ . On peut considérer ce vecteur d'état comme un Ansatz variationnel et prendre  $v_k$  comme un paramètre variationnel.

En pratique, on fixe l'attraction, donc l'énergie de liaison d'une paire  $\epsilon_b$  et le rayon de l'état lié  $r_b$ , et on varie la densité. Lorsque celle-ci est faible,  $Nr_b^3 \ll 1$ , la structure interne des paires n'est pas modifiée par leurs voisines. Chaque paire se comporte comme un boson, l'occupation  $v_k^2 = N\varphi_k^2$  de chaque état reste  $\ll 1$ . Lorsque la densité augmente, les paires commencent à se recouvrir,  $v_k^2$  s'approche du seuil absolu 1 fixé par le principe d'exclusion. La seule manière d'augmenter  $N$  est alors de déformer  $v_k^2$  en l'étendant dans une région  $k \gg 1/r_b$ . Le potentiel chimique  $\mu$  augmente, et à la limite  $v_k^2$  vaut 1 en dessous de  $\mu$ , 0 au dessus, avec une mince région de transition dont la largeur  $\Delta$  est le gap des excitations — c'est l'état BCS ! On passe donc continuellement d'un état BCS en couplage faible (appariement collectif et longueur de cohérence très supérieure à la distance interatomique) à une condensation de Bose de paires préformées en couplage fort (paires moléculaires).

(i) Dans l'état dense l'appariement est dû à la condensation de Bose : le gap disparaît au dessus de  $T_c$ . Le potentiel chimique est situé dans la bande et le gap des excitations est égal au paramètre d'ordre  $\Delta$  supraconducteur, défini comme la self énergie anormale.

(ii) Dans l'état dilué les paires n'ont rien à voir avec la superfluidité et elles persistent au dessus de  $T_c$ , avec un « pseudogap ». Le potentiel chimique est en dessous de la bande, près du niveau lié qui correspond à une paire unique. Le gap  $\Delta_g$  des excitations est lié à l'énergie de liaison (il faut casser une paire). Il est très supérieur au paramètre d'ordre  $\Delta$ .

Le mécanisme de destruction de la superfluidité est très différent dans les deux limites : dans l'état BCS,  $T_c$  est contrôlé par la rupture des paires condensées. Dans la limite diluée les paires subsistent mais c'est leur mouvement de centre de masse qui fixe  $T_c$ , autrement dit les fluctuations de phase. Il est important de réaliser que le problème possède trois énergies caractéristiques distinctes :  $\Delta$ ,  $\Delta_g$ ,  $T_c$ .

Cette évolution progressive entre deux limites physiquement très différentes se rencontre dans beaucoup d'autres contextes, par exemple dans la transition métal-isolant d'une bande de Hubbard demi remplie. Lorsque la répulsion  $U$  est grande il y a un atome par site et le gap de charge est  $U$ . Il subsiste un superéchange d'Anderson  $J \approx t^2/U$  qui produit un ordre antiferromagnétique qui n'a rien à voir avec le caractère isolant. En couplage faible on a un métal conducteur, sauf si l'emboîtement de la surface de Fermi provoque l'apparition d'une onde de densité de spin (souvenir de l'antiferromagnétisme). Le doublement de la maille crée une réflexion de Bragg, donc un gap qui est ici la conséquence directe de la rupture de symétrie. L'analogie avec la superfluidité est patente !

L'interpolation entre les deux limites est possible à  $T = 0$ , même si elle ignore les fluctuations quantiques des paires condensées (l'équivalent des corrections de Bogoliubov pour un gaz de Bose). En revanche il est très difficile d'inclure le fluide normal de paires liées à  $T \neq 0$  : les nombreuses théories disponibles sur le marché ne sont guère fiables. La seule remarque simple que l'on puisse faire concerne un système bidimensionnel : on sait calculer la raideur de phase en construisant à  $T = 0$  un état où les paires se condensent dans un état de moment total  $q \neq 0$ . On peut alors calculer la température de transition de Kosterlitz-Thouless et la comparer à la température critique BCS. Lorsqu'elles se croisent on passe d'un régime contrôlé par la rupture à un régime de fluctuations de phase. Ce croisement se produit lorsque le gap  $\Delta$  est d'ordre  $E_F/10$ , très inférieur à l'énergie de Fermi. Parler alors de paires préformées n'a pas de sens : il n'y a pas d'état lié au milieu d'une bande continue ! Il existe une large gamme de paramètres où les fluctuations de phase dominent en l'absence d'état lié. Ce domaine est vital pour la supraconductivité à haute température — hélas la théorie reste aujourd'hui impuissante à le décrire.

## 5) Du semiconducteur au supraconducteur ?

Une autre possibilité pour comprendre les pseudogaps est d'admettre avec Friedel que leur origine n'a rien à voir avec la supraconductivité. Ils pourraient provenir d'une onde de densité de charge ou de spin, ou d'une quelconque instabilité de réseau. D'où une nouvelle question : la supraconductivité peut-elle se développer dans un semiconducteur qui possède au départ un gap  $2\Delta_0$  ? Une attraction peut-elle spontanément créer des porteurs libres qui ensuite forment un condensat de Bose ? Bizarrement ce point n'a pas été étudié, bien que la théorie en soit élémentaire, simple transposition de la formulation classique de BCS.

Pourtant ce modèle dégage nombre d'idées générales importantes, en particulier une transition directe de l'état isolant à l'état supraconducteur. Une telle transition est souvent observée dans les milieux granulaires, où elle est due à une compétition entre le courant Josephson, qui tend à verrouiller la phase, et l'énergie capacitive qui limite les fluctuations de densité. Ici nous avons un modèle beaucoup plus naïf et facile à mettre en œuvre.

Pour dégager des idées simples avec un minimum de calculs nous considérons une densité d'états constante à l'extérieur du gap (par exemple un système 2d). L'attraction est caractérisée par le gap supraconducteur  $\Delta_m$  qui existerait s'il n'y avait pas de gap. En principe l'ordre supraconducteur peut réagir sur le mécanisme qui crée  $\Delta_o$ , par exemple une réflexion de Bragg : il faudrait alors une théorie selfconsistante qui n'existe pas encore. Nous ignorons cet effet de rétroaction :  $\Delta_o$  est fixé. Le modèle ne contient alors que deux paramètres : le rapport  $\Delta_o/\Delta_m$  et un éventuel dopage du semiconducteur, caractérisé par un niveau de Fermi  $\epsilon$  mesuré depuis le bas de la bande de conduction.

Le calcul est particulièrement simple pour un système non dopé,  $\epsilon=0$ . Le fondamental est alors supraconducteur si  $2\Delta_o < \Delta_m$ , et devient isolant au delà. Le paramètre d'ordre décroît de  $\Delta_m$  vers 0 à la transition, le gap décroît linéairement jusqu'à  $\Delta_m/2$ , puis redevient  $2\Delta_o$  dans l'état isolant. La physique de cette transition est claire : si  $\Delta_o$  n'est pas trop grand on gagne plus d'énergie de condensation que l'on n'en paie pour créer les porteurs libres à travers le gap : ces porteurs apparaissent spontanément, à condition d'être supraconducteurs pour assurer la cohérence. La situation est analogue à l'isolant excitonique étudié par Kohn *et al.* il y a trente ans : en ce cas on considèrerait une répulsion entre électrons, donc une attraction entre un électron et un trou. Cette attraction coulombienne forme des excitons liés. Si l'énergie de liaison de l'exciton est supérieure au gap, les excitons apparaissent spontanément et condensent de Bose. Ici nous avons le même phénomène, mais pour une paire électron-électron au lieu de électron-trou.

Le comportement à température finie est plus subtil. On calcule facilement la température critique BCS qui s'annule à la transition et est intermédiaire entre le paramètre d'ordre  $\Delta$  et le gap  $\Delta_g$ . Mais ce n'est pas elle qui est importante : la transition est toujours pilotée par les fluctuations de phase — une nouveauté comparée aux supraconducteurs métalliques habituels. La raison en est l'extrême petitesse de la raideur de phase. Pour un état isolant cette raideur de phase est nulle : on ne peut pas établir de courant persistant dans une bande pleine qui est gelée ! Ce sont les fluctuations supraconductrices qui relâchent cette contrainte et permettent une raideur finie : mais du coup cette raideur est d'ordre  $\Delta$ , très inférieure à la largeur de bande habituelle. La température de Kosterlitz-Thouless est donc faible, toujours inférieure à la température BCS : c'est elle qui contrôle la transition ! Au bout du compte  $T_{\text{CKT}} = [\Delta_m - 2\Delta_o]/8$  : la hiérarchie des énergies est  $T_{\text{CKT}} \ll \Delta \ll T_{\text{cBCS}} \ll \Delta_g$ .

Pour un système dopé le fondamental est toujours un supraconducteur (dans le cas normal déjà le semiconducteur est un [mauvais] conducteur !). Les deux

inconnues sont le potentiel chimique  $\mu$  et le paramètre d'ordre  $\Delta$ , fixées par la conservation du nombre de particules et par l'équation de fermeture du gap. La transition devient un crossover, avec une succession de régimes très différents.

(i) Si  $2\Delta_0 < \Delta_m$  le dopage joue un rôle mineur puisque le système était déjà supraconducteur en l'absence de dopage. Le potentiel chimique s'écarte légèrement du milieu de gap, d'une quantité  $\Delta\mu \approx \varepsilon$ , la correction du paramètre d'ordre est d'ordre  $\varepsilon^2$ .

(ii) Si  $2\Delta_0 > \Delta_m$  le dopage est crucial. On constate que le rôle des deux équations est inversé : la conservation de  $N$  donne  $\Delta$  et l'équation du gap donne  $\mu$ . Le potentiel chimique se rapproche du bord supérieur de la bande interdite, et le gap  $\Delta_g$  est égal à  $(\Delta_0 - \mu)$ . Le paramètre d'ordre est d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$  — un résultat surprenant. La hiérarchie des énergies est ici  $\varepsilon \ll \Delta \ll \Delta_g$ .

(iii) Si enfin le gap  $\Delta_0$  devient très supérieur à  $\Delta_m^2/\varepsilon$ , le potentiel chimique rentre dans la bande. Le gap  $\Delta_g$  devient le paramètre d'ordre  $\Delta$ , toujours d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$ . On retombe dans un régime BCS ordinaire.

Tous ces cas limites s'obtiennent analytiquement. Il est facile de décrire numériquement les régions de transition : on dispose ainsi de résultats très détaillés. Comme pour le cas non dopé on peut calculer (avec un peu plus d'effort) deux températures critiques,  $T_{\text{eBCS}}$  correspondant à la rupture des paires et  $T_{\text{cKT}}$  déduite de la raideur de phase. C'est toujours le mécanisme Kosterlitz-Thouless qui domine, avec  $T_{\text{cKT}} \approx \varepsilon$ .

Ce modèle n'est qu'une première étape. La principale difficulté est de rendre compte de la faible raideur de phase par un modèle de bande interdite réaliste. C'est facile en 1 dimension où l'ouverture d'un gap de Bragg est piloté par un autre paramètre d'ordre : on retrouve alors le problème de la self consistence. C'est plus délicat en 2 dimensions, sauf peut être au voisinage d'une singularité de Van Hove : la question reste ouverte !

## 6) Gaps, pseudogaps et réflexion d'Andreev

Quel que soit le mécanisme sous jacent, un supraconducteur contrôlé par les fluctuations de phase possède deux énergies caractéristiques (i) un pseudogap élevé, observé par exemple en photoémission, (ii) une température critique. Des expériences récentes d'effet tunnel d'un supraconducteur vers une électrode normale semblent mettre en évidence ces deux échelles. Si la barrière tunnel est épaisse les électrons passent un par un : à température nulle il faut donc casser les paires pour les faire passer du côté normal. Le courant tunnel est nul en dessous d'un seuil d'énergie égal au pseudogap  $\Delta_g$ . De fait l'expérience sur les supraconducteurs à haute température confirme bien les résultats obtenus par photoémission. Si en revanche il n'y a pas de barrière, un électron incident du côté normal peut se réfléchir en un trou, avec transformation en une paire superfluide de l'autre côté de la barrière — c'est la réflexion Andreev. Pour une faible tension appliquée  $V$ , le courant résultant est deux fois plus grand que le

courant nominal de Sharvin correspondant à une transmission parfaite (le trou réfléchi double le transfert de charge). La conductance  $\sigma(V)$  est maximale à  $V = 0$  au lieu de s'annuler. Les expériences de Deutscher montrent bien ce régime Andreev mais suggèrent qu'il disparaît lorsque  $eV$  est comparable à la température critique (échelle basse) plutôt qu'au pseudogap  $\Delta_g$  — pourquoi ? La réponse est toujours incertaine : pour poser le problème le cours a repris la formulation classique de la réflexion Andreev à l'aide des équations de Bogoliubov-de Gennes. La barrière est caractérisée par une impédance  $Z$  due à la fois à la discontinuité de vitesse de Fermi et à la singularité de potentielle. On calcule aisément la caractéristique  $\sigma(V, Z)$ . Le calcul est en général mené en régime BCS, lorsque  $\Delta \ll E_F$ . Formellement on peut l'étendre aux bosons préformés — mais c'est un cas d'école. Il semble que la limitation du courant Andreev soit due à la nucléation de tourbillons au niveau de l'électrode, qui font glisser la phase et suppriment le canal élastique d'Andreev. C'est une spéculation qui demande à être confirmée.

Dans l'ensemble la condensation de Bose Einstein connaît de nos jours un regain d'intérêt, au départ à cause des supraconducteurs à haute température et plus récemment du fait de la découverte des alcalins piégés. L'objet de ce cours était de faire le point sur la question, en attirant l'attention sur un certain nombre d'aspects non conventionnels, en particulier la cohérence interne du condensat et la compétition entre condensation de Bose, localisation et dissociation. Bien des points restent ouverts et si la retraite ne venait mettre un terme on pourrait envisager une troisième année de cours dans une dizaine d'années !

P.N.

#### SÉMINAIRES

24 novembre, André MYSYROWICZ, LOA-ENSTA, École Polytechnique, « *Transport anormal d'excitons dans  $Cu_2O$  : superfluidité excitonique ou vent de phonons ?* »

15 décembre, Franco DALFOVO, Université de Trente, « *Dynamics of a trapped Bose gas* »

5 janvier, Jean DALIBARD, Laboratoire Kastler-Brossel, ENS Paris, « *Étude expérimentale des gaz d'atomes ultrafroids : du refroidissement évaporatif à la condensation de Bose Einstein* »

12 janvier, Fabio PISTOLESI, Institut Laue Langevin, Grenoble, « *Crossover from BCS superconductivity to Bose condensation : collective modes and finite temperature behaviour* »

28 avril, Guy DEUTSCHER, Université de Tel Aviv, « *Réflexions d'Andreev : un outil intéressant pour l'étude de supraconducteurs non conventionnels* »

## ACTIVITÉS SCIENTIFIQUES

P. NOZIÈRES anime le groupe de physique théorique de l'Institut Laue Langevin à Grenoble, auquel sont venus s'adjoindre les théoriciens de l'ESRF (Laboratoire du rayonnement synchrotron). L'ensemble comprend une douzaine de physiciens confirmés qui effectuent des séjours de durée limitée, de un à cinq ans, et qui travaillent dans des domaines très divers. Le groupe constitue un pôle d'attraction important, vers lequel convergent de nombreux visiteurs étrangers. Un séminaire théorique est organisé chaque semaine, couvrant tous les thèmes de la physique de la matière condensée. Environ cinquante séminaires ont été tenus pendant la dernière année académique.

En 1998-1999 l'effectif des théoriciens ILL a été notablement réduit du fait des graves difficultés budgétaires qu'a connues l'ILL en 1998. L'activité scientifique a porté principalement sur deux thèmes :

- *Systèmes de dimension réduite* : Solutions exactes à l'aide de l'Ansatz de Bethe, écarts au liquide de Fermi (A. JEREZ). Échelles de spin et problèmes de déconfinement spin-charge (T. ZIMAN).
- *Analyse des spectres de diffusion neutronique de  $^4\text{He}$  à haute résolution* : Effet de la pression sur les maxons, variation thermique de l'énergie des rotons due au couplage avec les phonons (F. PISTOLESI)

L'activité personnelle de P. NOZIÈRES a porté sur les thèmes suivants :

*1 - Transition métal-isolant de Mott*

Deux points de vue s'opposent dans la littérature

- (i) Une transition par croisement de bandes, suggérée par Mott il y a bien longtemps. Les porteurs libres disparaissent quand le gap s'ouvre et la transition est du second ordre à  $T = 0$
- (ii) Une transition du premier ordre où les porteurs forment une résonance étroite qui disparaît au milieu d'un large gap « préformé ». C'est le résultat qui semble émerger en dimension infinie.

Il semble aujourd'hui que ce gap préformé n'existe que lorsque l'isolant est un système magnétique incohérent, avec une entropie au zéro absolu  $S_0 = -\text{Log}2$ . Face à des simulations numériques contestées, une description qualitative soutient ce point de vue. Les porteurs libres sont couplés aux spins localisés par un superéchange  $J$  de l'ordre de la largeur de bande (on est en couplage intermédiaire). Quelques porteurs libres peuvent faire écran à ces spins localisés et réaliser un état fondamental singulet où l'entropie résiduelle  $S_0$  disparaît. Mais on est dans une situation d'exhaustion extrême, pour reprendre les termes du rapport de l'an dernier : l'énergie gagnée à former des singulets est  $N_{\text{eff}}J$ , où  $N_{\text{eff}}$  est le nombre d'électrons libres qui peuvent prendre part à l'écran. (de manière équivalente, c'est  $N$  fois une énergie de cohérence très inférieure à  $J$ ). Créer  $N_{\text{eff}}$  états résonants au niveau de Fermi coûte une énergie cinétique  $N_{\text{eff}} \delta$  où  $\delta$  est le gap, mais gagne une énergie Kondo  $N_{\text{eff}} J$  : le bilan est favorable si  $\delta < J$ , ce qui

explique le gap préformé. Le mécanisme sature : plus  $N_{\text{eff}}$  croît, plus les bandes de Mott sont repoussées, ce qui augmente  $\delta$  : le bilan cesse d'être favorable. On comprend aussi pourquoi les porteurs libres disparaissent lorsque la température est de l'ordre de la largeur de résonance : les singulets laissent la place à des orientations de spin aléatoires, on perd le gain d'énergie Kondo mais on garde le coût en énergie cinétique. Tout cela disparaît lorsque les spins sont gelés en une structure ordonnée : le schéma par croisement de bandes redevient la règle, comme semble le confirmer la simulation.

Une objection de principe a été soulevée à ce résultat : la fonction de Green a un zéro au milieu du gap, ce qui implique un pôle de la self énergie  $\Sigma$  : comment trouver de la densité spectrale là où il n'y a pas d'états ? Le paradoxe est levé dans l'état isolant dès que l'on remarque que  $G$  est une moyenne sur toutes les configurations magnétiques : la self énergie  $\Sigma$ , reliée à  $G^{-1}$ , devient une construction sans interprétation physique. Son pôle à  $\omega = 0$  ne traduit aucune densité spectrale réelle. Certes il n'y a plus de dégénérescence pour un état antiferromagnétique ordonné — mais  $G$  est alors une matrice  $2 \times 2$  : un zéro de  $\text{Tr}G$  n'implique pas un pôle de  $\text{Tr}\Sigma$  ! La même conclusion vaut dans l'état conducteur aux temps courts devant l'échelle de retournement des spins.

Cette remarque naïve dégage une question de fond souvent ignorée : lorsqu'il existe une échelle temporelle lente, il est essentiel de préserver les lois de conservation instantanées aux échelles plus courtes (par le jeu des corrections de vertex). Manipuler des diagrammes sans respecter cette contrainte fausse complètement la physique et donne des résultats absurdes.

## 2 - *Supraconductivité dans les semiconducteurs*

Une possibilité pour expliquer les pseudogaps dans les matériaux fortement corrélés est d'admettre que le gap primaire  $\Delta_0$  n'a rien à voir avec la supraconductivité. On est ainsi amené à partir d'un état isolant — disons semiconducteur pour avoir un  $\Delta_0$  faible : si on ajoute une attraction entre porteurs la supraconductivité peut elle apparaître alors que le matériau était au départ isolant ? Ce thème a été développé en étroite collaboration avec F. PISTOLESI : il fournit une moisson de résultats impressionnante. On peut citer une transition directe isolant-supraconducteur, l'amplification considérable des fluctuations de phase, une gamme de régimes très variés avec seulement deux paramètres. La physique est très semblable à l'isolant excitonique de Kohn (pour une répulsion coulombienne), où des paires électron-trou apparaissent spontanément au travers du gap, compensant le coût en énergie cinétique par leur énergie de liaison. Au bout du compte ces paires électron-trou subissent une condensation de Bose Einstein, équivalent de la supraconductivité dans notre problème. Ce travail a été incorporé dans le cours et il est détaillé dans son résumé.

## 3 - *Reflexion Andreev à un interface normal supraconducteur*

Ce travail, mené en collaboration avec F. PISTOLESI et M. RANDERIA, de Bombay, veut expliquer pourquoi la réflexion d'Andreev disparaît lorsque la tension

appliquée est comparable à la température critique de Kosterlitz-Thouless, et non au pseudogap  $\Delta_g$ . L'idée de départ est très simple : la reflexion Andreev crée un courant superfluide dans le supraconducteur. Si ce courant excède la valeur critique pour nucléer un tourbillon, la phase « glisse » et la valeur moyenne du courant Andreev s'annule. Les ordres de grandeurs sont bons : nous nous attachons maintenant à construire une formulation plus quantitative.

#### 4 - Transition rugueuse sur une facette cristalline en présence de dislocations vis

Le travail de l'an dernier a été approfondi, en collaboration avec A. ARMOUR et R. BOWLEY de Nottingham. La définition de « rugueux » et « lisse » n'est pas unique. La planéité de la surface ne veut rien dire car elle est affectée par les déformations élastiques. Il n'existe que deux définitions précises de la « facette »

(i) Statique : il existe un point anguleux dans l'énergie superficielle  $\gamma(\theta)$  en fonction de l'inclinaison  $\theta$ , responsable d'une singularité dans la forme d'équilibre.

(ii) Dynamique : il existe un seuil de sursaturation pour la croissance de la facette. En présence de dislocations un tel seuil (de « Frank et Read ») existe toujours à  $T = 0$  et le critère dynamique ne veut rien dire. Dès que  $T \neq 0$  l'activation thermique pour des marches de longueur finie brouille de plus toute limite franche. En revanche le critère statique ne pose pas de problème car il implique une redistribution extensive des marches. On précise ainsi le modèle du type « transition de Mott » discuté l'an dernier : la rugosité correspond à un « déconfinement des dislocations vis + et - ».

#### PUBLICATIONS

C. CAROLI, P. NOZIÈRES, « *Hysteresis and elastic interactions of microasperities in dry friction* », Eur. Phys. Jour. **B4**, 233 (1998)

P. NOZIÈRES, « *Some comments on Kondo lattices and the Mott transition* », Eur. Phys. Jour. **B6**, 447 (1998)

P. NOZIÈRES, F. PISTOLESI, « *From semiconductors to superconductors : a simple model for pseudogaps* », Eur. Phys. Jour. **B10**, 649 (1999)

#### CONFÉRENCES DONNÉES PAR P. NOZIÈRES

Paris, 17 juillet 1998, Congrès sur les systèmes d'électrons fortement corrélés, « *Energy scales in Kondo lattices : are they relevant for the Mott metal-insulator transition ?* »

Université de Californie, Irvine, 9 septembre 1998, « *Dry friction as an hysteretic process* »

Université de Princeton, 18 septembre 1998, « *Energy scales in Kondo alloys and their relevance to the Mott metal-insulator transition* »

École de Physique et Chimie, Paris, 6 octobre 1998, « *Du réseau Kondo au liquide de Fermi : l'état de spin pilote t-il la transition métal-isolant ?* »

Université de Nottingham, 29 janvier 1999, « *From semiconductors to superconductors : another model for pseudogaps* »

École Normale Supérieure, Paris, 1<sup>er</sup> février 1999, « *A model of superconductor-insulator transition* »

Université de Zagreb, 3 mars 1999, « *Energy scales in Kondo lattices : application to the Mott metal-insulator transition* »

Institut de Physique de Zagreb, 4 mars 1999, « *From semiconductors to superconductors : another mechanism for pseudogaps* »

Université Paris Sud, 11 mai 1999, « *Applying degenerate perturbation theory to degenerate or nearly degenerate ground states requires care : the Mott insulator as an example* »

Ascona, 11 juin 1999, « *Some comments on the Mott metal-insulator transition* »