Théorie des groupes

M. Jacques Tits, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

L'enseignement de cette année a consisté en deux cours, l'un (I) donné à Paris, au Collège de France, et l'autre (II) à l'Université Libre de Bruxelles.

I. Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes algébriques simples

La première leçon a été consacrée à quelques rappels historiques dont on ne retiendra ici que les remarques suivantes. On peut considérer que la question étudiée dans ce cours a été sous-jacente dès que sont apparus dans la théorie des groupes de Lie semi-simple[1] les sous-groupes appelés aujourd'hui *paraboliques*. En effet, cette apparition date de la thèse de V.V. Morozov [12], dans laquelle il montre que les sous-groupes maximaux non semi-simples des groupes semi-simples complexes sont paraboliques (il n'emploie pas cette terminologie). Or, le cours a été consacré à des variations autour d'un théorème de A. Borel et l'auteur, dont le résultat de Morozov précité découle immédiatement, à savoir le théorème d'après lequel, disons sur un corps algébriquement clos, le normalisateur d'un sous-groupe unipotent non trivial d'un groupe semi-simple est contenu dans un sous-groupe parabolique propre (voir le Corollaire 1 ci-dessous). Dans le travail de Morozov n'intervenaient que les sous-groupes paraboliques maximaux. Les sous-groupes paraboliques généraux seront introduits quelques années plus tard dans un article de F.I. Karpelevič [11] dont l'influence a été déterminante pour les débuts de la théorie des immeubles [14]. La suite de cette histoire rejoint celle, mieux connue, des groupes algébriques semi-simples, histoire marquée dans ses débuts par les travaux fondamentaux de C. Chevalley [7], [8] et A. Borel [1], et dont les développements ultérieurs (cf. notamment [3], [2]) ont fourni les bases du présent cours.

1. Parlant de ces travaux anciens, nous adoptons ici les conventions en usage à l'époque et consistant à utiliser le langage des groupes lorsqu'il s'agissait en fait de ce que l'on appelle à présent « algèbres de Lie ».

1. *Éléments et sous-groupes unipotents plongeables*

Soient k un corps, $\bar{k}$ (resp. k_s) une clôture algébrique (resp. séparable) de k et G un k-groupe semi-simple ; si Y désigne un groupe algébrique défini sur un sous-corps de $\bar{k}$, on note aussi Y le groupe « abstrait » de ses $\bar{k}$-points. Soit X un k-élément unipotent de G, un sous-groupe de $G(k)$ formé de tels éléments ou un k-sous-groupe (algébrique) unipotent de G. Cet élément ou ce sous-groupe est dit *k-plongeable* (relativement à G) s'il est contenu dans le radical unipotent d'un k-sous-groupe parabolique de G, et l'on note alors $\mathscr{E}_k(X)$ le produit $X'.X''$, où X' désigne l'adhérence de Zariski sur k du groupe engendré par X, et X'' le radical unipotent déployé — c'est-à-dire le plus grand k-sous-groupe k-déployé du radical unipotent — du normalisateur $\mathscr{N}(X)$ de X dans $G(k)$. (Par convention, le radical unipotent d'un k-groupe Y, noté $R_u(Y)$, est toujours ici un groupe connexe ; il en est évidemment de même du radical unipotent déployé qui possède par définition une suite de composition par des groupes additifs). Si X est k-plongeable, $\mathscr{E}_k(X)$ est un k-groupe k-plongeable, donc l'opérateur $\mathscr{E}_k$ peut être itéré, ce qui donne un sens à l'expression $\mathscr{E}_k^i$ pour tout entier naturel i.

THÉORÈME 1. — *Soit X, élément ou sous-groupe unipotent, comme ci-dessus et supposons-le k-plongeable. Alors, la suite* $(\mathscr{E}_k^i(X))_{i=1,2,\dots}$ *est croissante et stationnaire et sa limite* $\mathscr{E}_k^\infty(X)$ *est le radical unipotent d'un k-sous-groupe parabolique.*

Ce théorème, dû à A. Borel et l'auteur [5] (voir aussi B. Weisfeiler [20] pour un résultat apparenté) attache canoniquement à tout X, qu'il s'agisse d'un k-élément ou d'un k-sous-groupe unipotent k-plongeable, un k-sous-groupe parabolique $\mathscr{P}(X) = \mathscr{N}(\mathscr{E}_k^\infty(X))$ dont le radical unipotent contient X, ce qui entraîne que si $X \neq 1$, on a $\mathscr{P}(X) \neq G$. Remarquons que $\mathscr{P}(X)$ dépend non seulement de X mais aussi du groupe ambiant G et du corps k ; pour rappeler cette dernière dépendance, nous utiliserons parfois la notation $\mathscr{P}_k$.

[La preuve du théorème précédent donnée dans [5] est quelque peu elliptique par endroits. Dans le cours, on l'a réexposée de façon plus détaillée en mettant en évidence des lemmes charnières qui ne sont qu'implicites dans [5], 2.2 et 2.3 ; en voici deux :

LEMME 1. (Lemme « géométrique », i.e. sur $\bar{k}$.) — *Si A est un groupe algébrique linéaire connexe, B un sous-groupe de Borel et F un sous-groupe fermé connexe de A, il existe un ouvert dense Y de F tel que, pour tout point y de Y, le radical unipotent de* $F \cap B \cap {}^yB$ *soit contenu dans celui de F.*

LEMME 2. (Où l'on suppose k séparablement clos.) — *Si U est un k-sous-groupe unipotent k-plongeable de G tel que* $\mathscr{E}_k(U) = U$, *et si B est un k-sous-groupe de Borel de G contenant U, il existe un k-sous-groupe de Borel* B_1 *de G tel que U soit le radical unipotent de* $B \cap B_1$.]

Énonçons quatre corollaires importants du théorème 1. Les deux premiers résultent aussitôt de la « canonicité » de la construction qu'il décrit (pour le premier, il s'agit de l'invariance par le groupe de Galois).

COROLLAIRE 1. — *Un k-élément unipotent ou un k-sous-groupe unipotent X est k-plongeable dès qu'il est k_s-plongeable et l'on a alors* $\mathscr{R}_k(X) = \mathscr{R}_{k_s}(X)$.

COROLLAIRE 2. — *Si X est un k-élément unipotent ou un k-sous-groupe unipotent k-plongeable, tout k_s-automorphisme de G normalisant X normalise aussi* $\mathscr{P}(X)$; *en particulier, le normalisateur* $\mathscr{N}(X) \cap G(k_s)$ *de X dans* $G(k_s)$ *est contenu dans* $\mathscr{P}(X)$.

(N.B. Il n'est pas toujours vrai que $\mathscr{N}(X)$ est contenu dans $\mathscr{P}(X)$: cf. [5], 2.8(1).) Dorénavant, nous parlerons souvent d'éléments unipotents « plongeables » sans spécifier le corps auquel on se réfère, mais on se souviendra que la notion peut être altérée par une extension inséparable de ce corps.

Le corollaire suivant est conséquence immédiate du précédent compte tenu de ce qu'un sous-groupe de G formé d'éléments unipotents est nilpotent.

COROLLAIRE 3. — *Un sous-groupe de G(k) dont tous les éléments sont unipotents et k-plongeables est contenu dans le radical unipotent d'un k-sous-groupe parabolique.*

Dans l'énoncé suivant, c'est l'implication (ii) ⇒ (iii) qui découle du théorème 1. Les implications (i) ⇔ (iii) ⇒ (ii) sont immédiates.

COROLLAIRE 4. — *Pour un k-groupe semi-simple G, les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *G possède un k-sous-groupe k-isomorphe au groupe multiplicatif* ;

(ii) *G possède un k-sous-groupe k-isomorphe au groupe additif* ;

(iii) *G possède un k-sous-groupe parabolique propre.*

Chacune de ces trois propriétés définit les groupes semi-simples *isotropes*. L'équivalence de (ii) et (iii) était annoncée dans [15], mais la démonstration géométrique (cas par cas) que l'auteur avait alors en vue n'a jamais été écrite en détail et a été partiellement perdue. Pour les groupes de type classique et les groupes de rang relatif 2, elle a été exposée dans le cours de l'année 1996-1997 (cf. [19], pages 98 à 100).

La proposition suivante, facile et bien connue, sera utile au § 4.

PROPOSITION 1. — *Une k-isogénie centrale de groupes semi-simples* $\alpha : G \to G'$ *induit une bijection de l'ensemble des k-sous-groupes paraboliques de G sur l'ensemble des k-sous-groupes paraboliques de G'. Si P est un k-sous-groupe parabolique de G,* α *induit un k-isomorphisme du radical unipotent de P sur celui de* $\alpha(P)$. (Cf. [4], 2.15 et 2.20).

COROLLAIRE 5. — *Avec les mêmes notations,* α *envoie bijectivement les éléments unipotents k-plongeables de G sur ceux de G'.*

2. *Conditions suffisantes pour que tout élément unipotent de G(k) soit plongeable : critères portant sur la caractéristique du corps de base*

Le théorème 1 conduit naturellement à s'intéresser aux groupes G dont tout élément unipotent est plongeable. Nous allons voir que c'est de loin le cas le plus fréquent et que l'existence d'éléments non plongeables est un « phénomène de petite caractéristique ».

Commençons par fixer les notations et la terminologie (parfois *ad hoc*) qui seront utilisées ici en rappelant par la même occasion des éléments de la classification des groupes semi-simples. Nous notons T un k-tore maximal de G et Δ une base du système de racines de G relativement à T, et aussi le diagramme de Dynkin supporté par cette base. Ce diagramme détermine deux réseaux, le *réseau des poids*, qui contient le réseau $X^*(T)$ des caractères rationnels du tore T (et lui est égal si G est simplement connexe), et le *réseau des racines*, contenu dans $X^*(T)$ (égal à ce dernier si G est adjoint) et engendré par Δ. Le *cocentre* $C^*(\Delta)$ de Δ est défini (cf. [17], 1.2) comme le quotient du réseau des poids par le réseau des racines. Nous appellerons ici *cocentre* de G (resp. *groupe fondamental dual* de G), et nous désignerons par $C^*(G)$ (resp. $\pi_1{}^*(G)$), le quotient de $X^*(T)$ par le réseau des racines (resp. le quotient du réseau des poids par $X^*(T)$) ; son dual $C(G) = \mathrm{Hom}\ (C^*(G), \mathrm{Mult})$ (resp. $\pi_1(G) = \mathrm{Hom}\ (\pi_1{}^*(G), \mathrm{Mult})$), appelé *centre* (resp. *groupe fondamental*) de G, est un groupe algébrique fini qui n'est pas réduit si la caractéristique p du corps de base divise l'ordre de $C^*(G)$ (resp. $\pi_1{}^*(G)$). Suivant l'usage, nous appelons *type* de G, le type (A_n, B_n, ...) du système de racines de G ou, ce qui revient au même, sa classe d'isomorphie à isogénie centrale près. Le *type d'isomorphie* (exact) est constitué par le type, au sens précédent, et le cocentre ou, ce qui revient au même, le groupe fondamental dual.

Pour un type de groupe semi-simple, un nombre premier est dit *mauvais* (resp. *de torsion*) s'il est égal à un coefficient de l'expression de la racine dominante (resp. de la plus grande « racine courte ») d'un facteur presque simple du groupe sous forme de combinaison linéaire des « racines simples » (éléments d'une base du système de racines). Un nombre premier qui n'est pas mauvais au sens précédent est dit *bon*. Le tableau suivant énumère pour chaque nombre premier p les types de groupes simples pour lesquels il est de torsion :

$p = 2$	tous les types sauf A_n et C_n ($n \in \mathbf{N}^*$) ;
$p = 3$	les types E_n ($n = 6, 7, 8$) et F_4 ;
$p = 5$	le type E_8 ;
$p \geq 7$	aucun type.

Les mauvais nombres premiers sont, outre les nombres de torsion (qui sont toujours mauvais), $p = 2$ pour les types C_n ($n \geq 2$) et $p = 3$ pour le type G_2.

Jusqu'à la fin de ce résumé (partie I), G sera toujours supposé absolument presque simple. Le résultat principal de cette section est le suivant :

THÉORÈME 2. — *Supposons que l'un des deux ensembles de conditions suivants soit rempli :*

(i) *G n'est pas de type* A *et la caractéristique p du corps de base est bonne pour le type de G ;*

(ii) *p ne divise pas l'indice de connexion de G (ordre de $\pi_1{}^*(G)$) et n'est pas un nombre premier de torsion pour le type de G.*

Alors, tout élément unipotent de G(k) est k-plongeable.

Rappelons que le centraliseur d'un élément x de G est *lisse* si son algèbre de Lie est le centraliseur de x dans l'algèbre de Lie de G (cela peut, si l'on veut, être pris pour définition). Cette propriété est évidemment « géométrique » (invariante par extension algébrique du corps de base) et stable par isogénie centrale. Le théorème suivant est dû à Richardson (cf. [13], I.§ 5).

THÉORÈME 3. — *Supposons que p soit bon pour le type de G et, si ce type est* A_n, *que* $n + 1$ *ne soit pas divisible par p. Alors, le centralisateur de tout élément de G est lisse.*

Lorsque G n'est pas de type A, ceci est une version forte, « géométrique », du théorème 2 (i) car on a :

PROPOSITION 2. — *Si le centralisateur d'un élément unipotent est lisse, cet élément est « universellement plongeable », c'est-à-dire k'-plongeable pour tout corps k' contenant k.*

Combiné avec cette proposition, dont la démonstration est essentiellement contenue dans [16], 2.5 (i), le théorème 3 entraîne le théorème 2, sauf si G est simplement connexe de type C_n ($n \geq 2$) et $p = 2$, ou G est de type G_2 et $p = 3$. Plaçons-nous dans un de ces deux cas et prouvons la validité du théorème 2 sachant qu'il est vrai dans tous les autres cas. Soit donc u un élément unipotent de $G(k)$ et soit k_1 une extension galoisienne de k sur laquelle G se déploie. On sait que si $p = 2$ (resp. 3) et si G est simplement connexe de type C_n (resp. G_2), il existe un k_1-groupe simplement connexe déployé G_1 de type A_{2n-1} (resp. D_4) et un k_1-automorphisme extérieur ϕ d'ordre p de G_1 dont G soit le groupe des points fixes. De plus, le couple (G_1, ϕ) est unique à automorphisme unique près et l'on vérifie que les k_1-sous-groupes paraboliques de G sont les intersections avec G des k_1-sous-groupes paraboliques de G_1 invariants par ϕ, et que si P_1 est un tel sous-groupe, le radical unipotent de $P_1 \cap G$ est le groupe des points fixes par ϕ du radical unipotent de P_1. L'élément unipotent u appartient à $G_1(k_1)$ et est invariant par ϕ et par $\mathrm{Gal}(k_1/k)$. Comme le théorème 2 est supposé vrai pour G_1, u est k_1-plongeable relativement à G_1 et le théorème 1 lui associe canoniquement un k_1-sous-groupe parabolique P_1 dont le radical unipotent contient u. La canonicité implique que P_1 est stable par ϕ et par $\mathrm{Gal}(k_1/k)$. Ce qui vient d'être dit sur les liens entre les sous-groupes paraboliques de G_1 et ceux de G entraîne donc que $P_1 \cap G$ est un k-sous-groupe parabolique de G dont le radical unipotent contient u, qui est par conséquent k-plongeable, c.q.f.d.

3. *Condition suffisante pour que tout k-élément unipotent soit k-plongeable : critère portant sur le degré d'imperfection du corps k*

Dans [16], 4.5, il est prouvé que si G est simplement connexe et si k est un corps de caractéristique 2 tel que $[k:k^2] \leq 2$, alors tout k-élément unipotent de G

est k-plongeable. On peut se demander si ce résultat est encore vrai lorsqu'on remplace 2 par un nombre premier quelconque. Je m'étais intéressé plus particulièrement, jadis, au cas où k est un corps de séries formelles sur un corps fini, et cela pour la raison suivante : une réponse affirmative à la question posée devait avoir pour conséquence la validité de la propriété (*) de [10], laquelle fournit une preuve simple et sans distinction de cas de la classification, en égale caractéristique, des groupes discrets d'automorphismes d'immeubles affines, transitifs sur les chambres (cf. *loc. cit.*). Le théorème précité concernant le cas $p = 2$ et des résultats partiels en caractéristique 3 m'avaient conduit à formuler la conjecture 5.4 de [16] qui aurait eu pour conséquence l'énoncé souhaité. J'ai mentionné ce problème dans une leçon du cours à laquelle assistait Philippe Gille ; celui-ci a, peu après, entièrement résolu la question par une méthode fondée sur des principes généraux de cohomologie galoisienne et de théorie des immeubles.

THÉORÈME 4 (P. Gille [9]). — *Supposons le groupe G simplement connexe et le corps de base k de caractéristique (finie) p. Si $[k{:}k^p] \leq p$, alors tout élément unipotent de $G(k)$ est k-plongeable.*

La démonstration a été exposée par P. Gille dans un exposé de séminaire, en marge du cours.

4. *Le problème réciproque. Exemples d'éléments unipotents non plongeables*

4.1. *Remarques préliminaires ; énoncé du problème*

Dans la deuxième partie du cours, on s'est intéressé au problème inverse de celui dont il a été question jusqu'ici, à savoir la recherche de critères d'existence d'éléments unipotents non plongeables et la construction de tels éléments. Nous conservons les principales notations des paragraphes précédents et notamment k, G (cf. § 1), et $\pi_1(G)$, $\pi_1{}^*(G)$ (cf. § 2). Commençons par récrire en d'autres termes une partie des résultats énoncés aux §§ 2 et 3.

PROPOSITION 3. — *Pour que G possède des k-éléments unipotents non plongeables, il est nécessaire que l'une des conditions suivantes soit remplie* :

(i) *l'ordre de $\pi_1{}^*(G)$ est divisible par p, c'est-à-dire que le groupe fondamental de G n'est pas réduit* ;

(ii) *p ne divise pas l'ordre de $\pi_1{}^*(G)$ mais est un nombre premier de torsion pour l'un au moins des facteurs presque simples de G, et $[k{:}k^p] \geq p^2$.*

La considération de groupes anisotropes dépourvus de k-éléments unipotents non triviaux montre que ni l'une ni l'autre des conditions (i) et (ii) n'est suffisante pour assurer l'existence d'éléments unipotents non plongeables, et suggère de s'intéresser d'abord au cas « opposé » de celui des groupes anisotropes, à savoir le cas des groupes déployés. Pour la question étudiée, ce cas est d'ailleurs typique en ce sens que, quel que soit G, il existe une extension galoisienne k' de k sur laquelle G se déploie, que si G possède des k-éléments unipotents non k-plongeables, ces éléments sont aussi non plongeables sur k' (cf. le corollaire 1), et que l'on a $[k{:}k^p] = [k'{:}k'^p]$. Pour cette raison, et jusqu'à la fin du § 4, *nous supposerons désormais le groupe G déployé.* Le problème qui nous occupe a alors un énoncé clair : étant donné un type d'isomorphie de groupes presque simples (système formé du réseau des caractères d'un tore déployé maximal et de la partie finie de ce réseau constituée par les racines : cf. § 2), quels sont tous les corps k tels que le k-groupe déployé du type en question possède des k-éléments unipotents non k-plongeables ? Le cours a cherché à apporter quelques éléments de réponse à cette question.

4.2. *Éléments non plongeables et éléments anisotropes. Réduction*

Un k-élément d'un k-groupe est dit *k-anisotrope* s'il n'est contenu dans aucun k-sous-groupe parabolique propre de celui-ci. Un élément k-anisotrope de G ne peut être k-plongeable. Le théorème suivant, démontré dans [16], (3.3), ramène le problème de l'existence d'éléments unipotents non k-plongeables dans G à celle d'éléments k-anisotropes dans certains sous-groupes semi-simples de G.

THÉORÈME 5. — *Si G possède un k-élément unipotent non plongeable, il existe un tore déployé de G dont le centralisateur possède un élément unipotent anisotrope ; tout élément unipotent anisotrope du groupe dérivé du centralisateur d'un tore déployé de G est non plongeable relativement à G.*

Moyennant ce théorème, le problème de la détermination des groupes possédant des éléments unipotents non plongeable devient, en principe, du niveau d'un exercice, lequel est toutefois moins simple qu'il n'y paraît : non seulement il nécessite la connaissance préalable des éléments anisotropes (voir à ce sujet la remarque (2) ci-dessous), mais en outre, même si l'on s'intéresse seulement à l'existence d'éléments non plongeables relativement à des groupes presque simples, l'application du théorème exige que l'on connaisse la situation pour des groupes semi-simples plus généraux. Cela ressort des exemples fournis par la deuxième partie de la proposition suivante.

Donnons d'abord deux définitions. On appelle *produit central* d'une famille de groupes presque simples toute image du produit direct de ces groupes par une isogénie centrale ; nous dirons qu'un tel produit central est *totalement adjoint* si tous ses quotients presque simples (qui sont en bijection naturelle avec les facteurs du produit) sont adjoints.

PROPOSITION 4. — *Supposons le corps k imparfait, de caractéristique p.*

(i) *Si* G *est un produit central totalement adjoint de groupes isomorphes à* SL_p, *$G(k)$ possède des éléments unipotents anisotropes.*

(ii) *Si $p = 2$ (resp. 3) et si G est adjoint de type* C_n ($n \geq 1$), B_n ($n \geq 3$) *ou* E_7 (*resp.* E_6), *$G(k)$ possède des éléments unipotents non k-plongeables.*

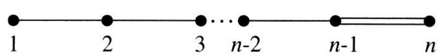
Esquissons la démonstration de ces assertions.

(i) Étant produit central de copies de SL_p, le groupe G peut s'écrire comme un quotient $\Pi(G_i \mid i = 1,\dots,d)/S$, où G_i est une copie de GL_p et S est un sous-tore du produit des centres des G_i, qui sont des copies du groupe multiplicatif et que nous notons S_i. L'hypothèse que le produit central soit totalement adjoint se traduit par le fait que, pour tout i, le tore $\Pi(S_j \mid j \neq i).S$ contient aussi S_i. Pour tout i, le déterminant $G_i \to$ Mult définit, par passage au quotient, un homomorphisme $\delta_i : (G_i/S_i)(k) \to k^\times/k^{\times p}$ et l'on vérifie qu'un élément unipotent de $(G_i/S_i)(k)$ est anisotrope si et seulement si son image par δ_i n'est pas égale à 1. Soit $(\chi_1,...,\chi_m)$ une base du réseau constitué par les caractères de $\Pi(S_i)$ dont le noyau contient S. Chaque caractère χ de $\Pi(S_i)$ induit de façon évidente un homomorphisme χ du groupe $\{(t_1,...t_d) \mid t_i \in k^\times/k^{\times p}\}$ dans $k^\times/k^{\times p}$. Soit $(\gamma_1,...,\gamma_d)$ un élément de ce groupe dont aucune composante n'est nulle mais qui annule chaque χ_s (le groupe $k^\times/k^{\times p}$ est ici pensé additivement). L'existence d'un tel élément résulte de ce que le produit central G est totalement adjoint. Pour tout i, soit u_i un élément unipotent de G_i/S_i tel que $\delta_i(u_i) = \gamma_i$; on peut en obtenir à partir de n'importe quelle matrice $(c_{rs}) \in \mathrm{GL}_p$ telle que

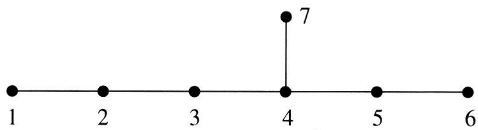
$$c_{rs} = \begin{cases} 1 \text{ si } s = r + 1, \\ \text{un représentant de } \gamma_i \text{ dans } k^\times \text{ si } (r,s) = (p,1), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Finalement, si, pour tout i, $\bar{u}_i$ désigne un représentant de u_i dans G_i, l'image de $\Pi\bar{u}_i$ modulo S est un élément k-anisotrope de G.

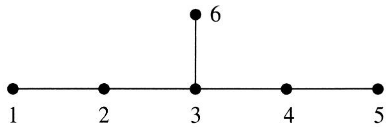
(ii) Supposons G adjoint de type C_n (resp. B_n, E_7, E_6) et $p = 2$ (resp. 2, 2, 3). Considérons dans G un tore déployé maximal et une base Δ du système de racines correspondant, que nous numérotons de la façon suivante :

pour $G = \mathrm{C}_n$ ou B_n, 

;

pour $\mathrm{G} = \mathrm{E}_7$, 

;

pour $\mathrm{G} = \mathrm{E}_6$, 

.

Soit S la composante neutre de l'intersection de toutes les racines appartenant à Δ à l'exception de celle(s) numérotée(s) n (resp. n–2 et n ; resp. 1, 3 et 7 ; resp. 1, 2, 4 et 5) ; on vérifie (par exemple à l'aide de l'algorithme de la remarque (3) ci-dessous) que le groupe dérivé du centralisateur de S est adjoint de type A_1

(resp. produit central totalement adjoint de deux, trois, deux, groupes simplement connexes de type A_1, A_1, A_2). Vu (i), ce groupe possède des k-éléments unipotents k-anisotropes, lesquels sont non plongeables relativement à G en vertu du théorème 5.

Remarques et compléments. (1) Pour les groupes des types A_n et D_n, la discussion est un peu plus longue parce qu'il faut aussi prendre en compte les groupes qui ne sont ni simplement connexes ni adjoints, mais le résultat final est le même. On voit donc que *la réciproque de la proposition 3 (i) est vraie pour les groupes presque simples.* La méthode précédente s'applique sans changement aux groupes semi-simples quelconques et il est plus que probable que, là encore, la conclusion sur la réciproque de la proposition 3 (i) reste valable, mais je ne l'ai pas vérifié.

(2) Dans [16], § 4, sont données des conditions d'existence d'éléments unipotents *anisotropes,* notamment dans les groupes classiques, pour $p = 2$. Les résultats font apparaître un contraste avec ceux que nous venons d'obtenir pour les éléments *non plongeables,* au moins dans le cas (i) de la proposition 3. Alors qu'ici, la seule distinction qui ait joué un rôle en ce qui concerne la nature du corps de base est celle d'être ou non un corps parfait, l'existence d'éléments k-anisotropes impose au degré d'imperfection une borne inférieure dépendant du type de groupe considéré (borne d'autant plus élevée que le rang du groupe est grand).

(3) Pour appliquer le théorème 5 à des situations particulières, il est utile de disposer d'un algorithme permettant, à partir du type d'isomorphie (diagramme de Dynkin et cocentre) d'un groupe G, et d'une partie Δ' d'une base Δ du système de racines de G relatif à un tore déployé maximal T, d'en déduire le type d'isomorphie du sous-groupe semi-simple G' de G correspondant à Δ', c'est-à-dire du groupe dérivé du centralisateur du tore, composante neutre de l'intersection des noyaux des éléments de Δ'. Voici un tel algorithme. Le diagramme de Dynkin de G' est évidemment la restriction de celui de G à Δ' et l'on doit décrire le groupe X' des caractères du tore maximal $T' = T \cap G'$ de G'. Ce groupe est un sous-groupe du groupe des poids $\Sigma(\mathbf{Z}\tilde{\omega}_\beta \mid \beta \in \Delta')$ de G', où $\tilde{\omega}_\beta$ désigne le poids dominant fondamental de G' associé à la racine β). Supposons d'abord G adjoint (comme dans les exemples de la proposition 4 (ii)). Alors X' est la restriction à T' du réseau des racines de G, c'est-à-dire le réseau, que nous appellerons Θ, engendré par Δ' et par les poids $\Sigma(\alpha(\beta^\vee).\tilde{\omega}_\beta \mid \alpha \in \Delta - \Delta')$, où β parcourt Δ' et l'on note $\beta^\vee$ la coracine correspondante. Dans le cas général, le réseau des caractères de T est engendré par Δ et par une partie de l'ensemble des poids minuscules de G, ensemble qui est en bijection canonique avec l'ensemble Δ_1 des éléments de Δ qui ont un coefficient 1 dans la racine dominante de l'un des facteurs de G ; ainsi le cocentre de G est caractérisé par une partie M de Δ_1 et, finalement, le calcul montre que X' est engendré par Θ et les $\beta^\vee$ pour $\beta \in M$.

4.3. *Éléments spéciaux*

Ce numéro décrit un procédé plus direct (mais moins systématique) que le précédent pour fournir des exemples d'éléments unipotents non plongeable satisfaisant à la condition (i) de la proposition 3. Un élément d'un groupe de Weyl W est dit *spécial* si, dans la représentation naturelle de W, il ne possède pas de point fixe non nul. Le lemme suivant est évident :

LEMME 3. — *Soient T un k-tore maximal déployé de G et M une classe latérale de T dans son normalisateur. Supposons que l'élément du groupe de Weyl de G représentant M soit spécial d'ordre p. Alors, tous les éléments de M sont d'ordre p (donc unipotents).*

Les éléments unipotents ainsi définis seront aussi dits *spéciaux*. Suivant la convention déjà utilisée au § 2, le groupe des caractères rationnels d'un tore S sera noté $X^*(S)$.

THÉORÈME 6. — *Soient M comme dans l'énoncé du lemme* 3, $\phi : \tilde{G} \to G$ *une k-isogénie centrale, $\tilde{T}$ et $\tilde{M}$ les images réciproques de T et M par ϕ. Supposons le noyau de ϕ « non réduit » (ce qui veut dire que l'ordre du conoyau de l'homomorphisme $X^*(T) \to X^*(\tilde{T})$ induit par ϕ est divisible par p) et le corps k non parfait. Alors, l'homomorphisme $\tilde{T}(k) \to T(k)$ et l'application $\tilde{M}(k) \to M(k)$ induits par ϕ ne sont pas surjectifs et les éléments de $M(k) - \phi(\tilde{M}(k))$ (qui sont unipotents, d'après le lemme) sont non plongeables.*

Esquissons la preuve. On peut factoriser ϕ en un produit de deux isogénies centrales $\tilde{G} \to G'$ et $\phi' : G' \to G$ telles que le conoyau de l'homomorphisme $X^*(T) \to X^*(\phi'^{-1}(T))$ induit par ϕ' soit d'ordre p. Remplaçant $\tilde{G}$ et ϕ par G' et ϕ', ce qui est loisible vu les propriétés à établir, on est ramené au cas où le conoyau de l'homomorphisme $X^*(T) \to X^*(\tilde{T})$ induit par ϕ est d'ordre p (ce qui implique l'injectivité ensembliste de ϕ). Il résulte alors du théorème des diviseurs élémentaires que T et $\tilde{T}$ peuvent s'écrire comme produits directs $T_1 \times \ldots \times T_\ell$ et $\tilde{T}_1 \times \ldots \times \tilde{T}_\ell$ de groupes multiplicatifs de telle façon que $\phi(\tilde{T}_i) = T_i$ pour $i \geq 2$, et que ϕ envoie le groupe multiplicatif $\tilde{T}_1$ dans le groupe multiplicatif T_1 par l'élévation à la puissance p-ième. La non-surjectivité de $\tilde{T}(k) \to T(k)$ résulte alors de ce que k n'est pas parfait, celle de $\tilde{M}(k) \to M(k)$ s'ensuit aussitôt et la dernière assertion de l'énoncé est conséquence du corollaire 5 du § 1.

Remarque. Les éléments unipotents anisotropes de la proposition 4(i) sont cas particuliers des éléments non-plongeables que l'on vient de construire.

4.4. *Groupes simplement connexes possédant des éléments non plongeables*

Tous les exemples d'éléments unipotents non plongeables donnés plus haut concernaient des groupes semi-simples G dont le groupe fondamental était non réduit (cas (i) de la proposition 3). Il est plus difficile de trouver des éléments non plongeables dans le cas (ii) de la proposition 3. La fin du cours a été consacrée à la construction de tels éléments ; nous en donnons à présent les grandes lignes.

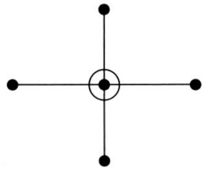
Nous supposons ici que le groupe G (déployé, selon 4.1) est presque simple et défini sur $\mathbf{F}_p$, et que p en est un nombre premier de torsion. Soient T un $\mathbf{F}_p$-tore maximal de G, T_{ad} le tore adjoint, Δ une base du système de racines de G relatif à T (et aussi le diagramme de Dynkin de cette base), α_0 l'opposée de la racine dominante et α' un élément de Δ dont le coefficient dans $-\alpha_0$ (écrit comme combinaison linéaire des éléments de Δ) est égal à p (un tel élément existe par définition des nombres premiers de torsion : cf. § 2.) On sait que l'ensemble $\Delta-\{\alpha'\}\cup\{\alpha_0\}$ est une base du système de racines d'un sous-groupe H de G contenant T dont le groupe fondamental dual est cyclique d'ordre p. Supposons α' choisi de telle sorte que H soit produit central totalement adjoint de groupes simplement connexes de type A_{p-1} (nous verrons ci-après des exemples intéressants de cette situation). Soient maintenant h un corps non parfait contenant $\mathbf{F}_p$ et u un élément unipotent anisotrope de $H(h)-\{1\}$ (il en existe, vu la proposition 4(i)). Soit t une indéterminée, posons $k = h(t^p)$ et soit τ l'élément de $T_{\mathrm{ad}}(h(t))$ sur lequel tous les éléments de $\Delta-\{\alpha'\}$ prennent la valeur 1 tandis que $\alpha'(\tau) = t^{-1}$, de sorte que $\alpha_0(\tau) = t^p$. Le théorème suivant a été établi dans le cours.

THÉORÈME 7. — *L'élément unipotent* ${}^\tau u$ *de* $G(h(t))$ *est contenu dans* $G(k)$ *et* k*-anisotrope.*

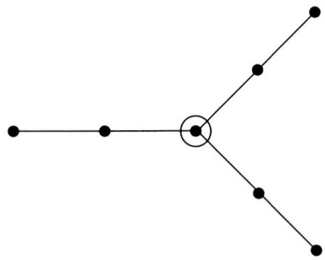
L'élément ${}^\tau u$ est même contenu dans $H(k)$, car τ et u le sont. On va à présent utiliser l'immeuble affine $\mathscr{I}$ de $G(h((t)))$ ainsi que l'immeuble affine $\mathscr{I}_p$ de $G(h((t^p)))$ contenu dans le précédent. Dans $\mathscr{I}_p$, le groupe $G(h)$ fixe un point O dont l'étoile est le cône $\mathscr{I}_s(G,h)^\wedge$ sur l'immeuble sphérique de G sur h, et le groupe $H(h)$ fixe le point $\tau(O)$ dont l'étoile est le cône $\mathscr{I}_s(H,h)^\wedge$ sur l'immeuble sphérique de H sur h. L'anisotropie de u dans $H(h)$ se traduit par le fait que $\tau(O)$ est le seul point fixe de ${}^\tau u$ dans $\mathscr{I}_s(H,h)^\wedge$. Si ${}^\tau u$ n'était pas anisotrope dans $G(k)$ il ne le serait pas non plus dans $G(h((t)))$ et aurait un point fixe c dans l'immeuble sphérique « à l'infini » de $\mathscr{I}_p$ (cf. [6], 5.1.33); cela étant le groupe $H(k)$, fixant les points c et $\tau(O)$ de $\mathscr{I}_p$, fixerait la demi-droite qui les joint et aurait donc des points fixes arbitrairement proches de $\tau(O)$, en contradiction avec ce qui vient d'être dit. Cela prouve le théorème.

(N.B. On peut trouver dans [18], § 12, une rédaction plus détaillée d'un raisonnement assez semblable à celui-ci).

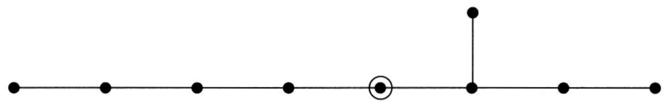
Exemples. — Soit $p = 2$, 3 ou 5, suivant le cas soit G de type D_4, E_6 ou E_8, et soit α' la racine désignée par un cercle dans le diagramme correspondant du tableau suivant :

p	G	$\Delta\cup\{\alpha_0\}$
2	D_4	

3 E_6



5 E_8



Le type d'isomorphie de H se déduit du diagramme ci-dessus par un algorithme tout à fait semblable à celui de la remarque (3) du n° 4.2 et décrit explicitement dans [18]. Suivant le cas, on trouve que H est produit central totalement adjoint de quatre, trois ou deux groupes simplement connexes de type A_{p-1}, ce qui permet d'appliquer la proposition 4 (i).

Le théorème 7, combiné avec le théorème 5 et les exemples ci-dessus, fournit une démonstration cas par cas du corollaire suivant que l'on peut considérer comme une réciproque partielle de la proposition 3 (ii).

COROLLAIRE 6. — *Soient k un corps non parfait de caractéristique p, t une indéterminée et G un $\mathbf{F}_p$-groupe presque simple simplement connexe. Alors, si p est un nombre premier de torsion pour le type de G, $G(k(t))$ possède des éléments unipotents non plongeables.*

Illustrons l'idée de la preuve par un exemple. Soit $p = 3$ et supposons G de type E_7 ou E_8. Considérons un tore déployé de G tel que le groupe dérivé L du centralisateur de ce tore soit de type E_6. Alors, vu le théorème 7, appliqué au deuxième des exemples ci-dessus, $L(k(t))$ possède des éléments unipotents $k(t)$-anisotropes, lesquels ne sont pas $k(t)$-plongeables relativement à G en vertu du théorème 5.

RÉFÉRENCES

[1] A. BOREL, *Groupes linéaires algébriques (Annals of Math.,* (2) **64** (1956), 20-82).

[2] —, *Linear algebraic groups,* 2d edition, Springer-Verlag, 1991.

[3] A. BOREL et J. TITS, *Groupes réductifs (Publ. Math. IHES,* 27 (1965), 55-150).

[4] — —, *Compléments à l'article : « Groupes réductifs » (Publ. Math. IHES,* **41** (1972), 253-276).

[5] — —, *Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs (Inventiones Math.* **12** (1971), 95-104).

[6] F. BRUHAT et J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées (Publ. Math. IHES,* **41** (1972), 5-251).

[7] C. CHEVALLEY, *Sur certains groupes simples (Tôhoku Math. J.,* 7 (1955), 14-66).

[8] —, *Classification des groupes de Lie algébriques (Séminaire ENS,* 1956-1958).

[9] P. GILLE, *Éléments unipotents des groupes algébriques semi-simples simplement connexes en caractéristique p > 0 (C. R. Acad. Sci. Paris,* **328** (1999), 1123-1128).

[10] W. M. KANTOR, R. A. LIEBLER and J. TITS, *On discrete chamber-transitive automorphism groups of affine buildings (Bull. Amer. Math. Soc.,* **16** (1987), 129-133).

[11] F. I. KARPELEVIČ, *Sur les sous-algèbres maximales non semi-simples des algèbres de Lie semi-simples (Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **76** (1951), 775-778).

[12] V. V. MOROZOV, *Sur les sous-groupes maximaux non semi-simples des groupes simples,* thèse, Kazan, 1943.

[13] T. A. SPRINGER and R. STEINBERG, *Conjugacy classes (in Seminar on algebraic groups and related finite groups,* Springer Lecture Notes in Math., **131** (1970), 166-266).

[14] J. TITS, *Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie (Mém. Acad. Roy. Belg.,* **29** (3) (1955)).

[15] —, *Groupes semi-simples isotropes* (in *Coll. sur la Théorie des groupes algébriques, CBRM,* Bruxelles, 1962, 137-147).

[16] —, *Unipotent elements and parabolic subgroups of reductive groups, II.* (in *Algebraic groups Utrecht 1986,* Springer Lecture Notes in Math., **1271** (1987), 265-284).

[17] —, *Résumé de Cours (Annuaire du Collège de France,* 88e année, 1987-1988, 85-100).

[18] —, *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups (J. Algebra,* **131** (1990), 648-677).

[19] —, *Résumé de cours (Annuaire du Collège de France,* 97e année, 1996-1997, 89-102).

[20] B. WEISFEILER, *On one class of unipotent subgroups of semisimple algebraic groups (Uspehi Mat. Nauk),* **22**, 2 (128) (1966), 222-223).

⁂

Le cours donné à Bruxelles a porté sur

II. Le plan de Cremona

À la demande de collègues belges, j'y ai repris, en les actualisant quelque peu, l'étude d'un sujet qui m'avait occupé au début des années cinquante, sans que les résultats obtenus aient jamais donné lieu à publication. En termes heuristiques il s'agit de la question suivante. On considère un plan — disons dans un premier temps un plan projectif ou affine — sur un corps algébriquement clos k. Les transformations birationnelles de ce plan sur lui-même sont appelées transformations de Cremona ; elles forment un groupe et la géométrie associée à ce groupe, dans l'esprit de Félix Klein, géométrie des notions et objets « crémoniennement invariants », est la *géométrie (plane) de Cremona*. Le problème que m'avait posé jadis P. Libois, et qui a fait l'objet du cours, était la description et, surtout, l'axiomatisation de cette géométrie. Mes premières recherches dans ce domaine ont été fortement influencées par les réflexions de Libois [L], par la thèse de son élève P. Defrise [D], où celui-ci introduisait et étudiait diverses notions (courbes généralisées, courbes pures, contenance,...) adaptées à la géométrie birationnelle des surfaces, et par certains travaux de O. Zariski, tout particulièrement la brève note [Z] où il définit la Riemannienne d'un corps de fonctions algébriques. Les notions qui ont été utilisées dans le cours n'étaient pas neuves : elles sont pour la plupart équivalentes à des concepts classiques en géométrie algébrique. Mais, si en faire l'objet d'un cours a besoin d'une justification, elle peut se trouver dans l'éclairage géométrique inhabituel qui leur a été donné. Car il faut insister sur le fait que la matière exposée était bien moins un chapitre de la géométrie algébrique, au sens actuel, qu'une simple extension de la « géométrie intuitive » élémentaire.

Le cours a comporté deux parties, l'une descriptive, l'autre axiomatique. La première ne sera que très brièvement évoquée ici : elle doit occuper une plus grande place dans des notes de cours rédigées par F. Buekenhout et H. Van Maldeghem, qui seront sans doute publiées sous une forme ou une autre.

1. *Notions crémoniennes*

1.1. Comme il ressort de l'introduction précédente, un plan de Cremona sur un corps k, que nous choisissons une fois pour toutes et que nous supposons algébriquement clos, est, en quelque sorte, l'« émanation géométrique » d'un corps $K = k(x,y)$, extension transcendante pure de degré 2 de k. Un *modèle* de K est une surface rationnelle (non nécessairement complète ou non singulière) dotée d'une identification de son corps de fonctions rationnelles avec K. Nous allons passer en revue diverses façons de décrire un « objet crémonien », en prenant chaque fois comme exemple le point crémonien qui jouera le rôle principal dans l'axiomatique du § 2.

1.2. Une première méthode consiste à choisir un modèle, par exemple un plan projectif P, et à décrire la classe d'objets auxquels on s'intéresse comme celle de tous les transformés d'un de ces objets par toutes les transformations de Cremona de P. Ainsi, pour décrire les points crémoniens, on peut partir d'un point ordinaire de P ; les transformations de Cremona le transforment en certaines combinaisons linéaires à coefficients entiers de courbes et de points, ordinaires ou voisins, de P (« courbes généralisées » au sens de [D]). [Nous utilisons l'expression *points voisins* pour désigner les *punti infinitamente vicini* de la terminologie italienne ; certains préfèrent parler de « points proches », mais *punti prossimi* a une signification différente en géométrie italienne et cette autre notion jouera aussi un rôle au § 2.] Pour utiliser cette méthode, il est nécessaire de définir les points voisins et de déterminer la façon dont une transformation de Cremona opère sur une courbe, un point ou un point voisin ; grâce au théorème de Noether, il suffit d'ailleurs de faire ceci pour une seule transformation quadratique arbitrairement choisie. Un procédé expérimental pour résoudre la question (c'est-à-dire, en fait, pour choisir la définition appropriée du transformé) consiste à identifier un point avec l'ensemble des branches de courbes qui en sont issues.

1.3. Plus abstraitement, on peut considérer simultanément tous les modèles de K, ou une catégorie invariante de modèles (par exemple les plans projectifs, les plans affines, les surfaces cubiques, etc.) et choisir parmi eux ceux dans lesquels l'objet auquel on s'intéresse a la forme la plus simple. Considérons à nouveau l'exemple du point crémonien. Si P et P' sont deux modèles, l'identification préassignée des corps de fonctions rationnelles de P et P' définit une transformation birationnelle $\phi : P \dashrightarrow P'$. Un point simple a de P et un point simple a' de P' sont dits équivalents si ϕ et ϕ^{-1} sont définis respectivement en a et en a' et si $a' = \phi(a)$, d'où $a = \phi^{-1}(a')$. Les points crémoniens sont alors les classes d'équivalence de cette relation.

1.4. Plus abstraitement encore, les notions invariantes doivent pouvoir être définies directement, algébriquement, à partir de K. Par exemple, les points crémoniens « ne sont autres » que les anneaux locaux réguliers contenus dans K et dont K est le corps des quotients.

1.5. Enfin un mode de définition plus proche de l'intuition géométrique est fourni par l'approche axiomatique du § 2.

1.6. *Remarques sur les points crémoniens*

(a) On voit qu'une caractéristique essentielle des points crémoniens est qu'un tel point en contient d'autres, avec multiplicités d'ailleurs, suivant le point de vue adopté au § 2. Si l'on fait abstraction de ces multiplicités (ce qui conduit à une notion plus simple mais à des axiomes plus compliqués), l'identification des points et des points voisins à des ensembles de branches de courbes montre qu'un point se subdivise en (i.e. est réunion disjointe de) ses voisins du premier ordre, chacun d'eux se subdivise à son tour en ses voisins du premier ordre (voisins du second ordre du point de départ), et ainsi de suite... Cela donne la vision de « points-taches ». On peut, si l'on veut, passer à la limite et introduire des points indivisibles, les *points voisins d'ordre infini*. Du point de vue algébrique, ceux-ci sont *grosso modo* équivalents aux valuations de dimension 0, utilisées par Zariski [Z].

(b) Les « courbes généralisées » de P. Defrise correspondent à peu près, en géométrie algébrique classique, aux courbes « considérées, comme appartenant à un système linéaire, éventuellement virtuel, donné ». Retrancher un point à une courbe ordinaire revient à attribuer à celle-ci une multiplicité virtuelle 0 en ce point.

(c) Les points crémoniens sont certaines courbes généralisées de self-intersection -1. En voici des exemples (ici, l'on tient évidemment compte des multiplicités) :

droite d'un modèle plan projectif diminuée de deux de ses points (ordinaires) ;

droite d'un modèle plan projectif diminuée de deux points, l'un d'eux ordinaire, l'autre voisin d'un autre point ordinaire de la droite et situé sur une branche de courbe non singulière, transversale à celle-ci ;

conique d'un modèle plan projectif diminuée de cinq de ses points ;

génératrice d'un modèle quadrique diminuée d'un de ses points ;

droite (totale) d'un modèle surface cubique.

2. *Axiomatique*

L'axiomatique présentée dans le cours repose sur deux notions de base, la notion de *point* (crémonien) et celle de *contenance* d'un point p pour un point q ; celle-ci est un entier positif, fonction de p et q et notée $[p{:}q]$. [Dans le style heuristique du § 1, on peut la décrire ainsi : on considère un modèle du plan dans lequel q est un point ordinaire et p est représenté par une courbe ; la contenance est alors la multiplicité de cette courbe en q. On peut donner une définition précise, en termes d'anneaux locaux, mais elle est plus technique et nous ne l'énoncerons pas ici ; disons seulement, cela suffira à nos besoins (cf. n° 2.9), que $[p{:}q] > 0$ (c'est-à-dire que p contient q) si et seulement si l'anneau local de q domine celui de p.] Bien que la contenance soit réellement le concept primordial, il sera commode de la faire découler d'une notion plus passe-partout : les points seront certains éléments strictement positifs d'un groupe ordonné $\mathscr{F}$: le groupe des *figures*. On note $\mathscr{F}_+$ l'ensemble des figures positives et $\mathscr{P}(\subset \mathscr{F}_+ - \{0\})$ l'ensemble des points. Toutes les figures qui joueront un rôle dans l'axiomatique seront sommes algébriques finies de points ; pour éviter d'encombrer l'exposé d'objets inutiles, il est donc naturel de poser l'axiome de « minimalité » suivant (dans toute la suite, les axiomes seront introduits par des symboles en caractères gras) :

(Min1) *Le groupe des figures est engendré par les points.*

2.2. *Axiomes concernant la contenance*

Définition. — Pour $f, g \in \mathscr{F}_+$, posons $[f{:}g] = \sup\{n \in \mathbf{N} \mid f - ng \geq 0\}$. Ce nombre, élément de $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$, est appelé *contenance* de f pour g. S'il est positif, on dit que *f contient g* ou que *g est contenu dans f.*

(C1) *Si $g \neq 0$, $[f{:}g]$ est fini.*

(C2) *Si g_i $(i = 1, ..., n)$ sont des figures et si z_i sont des entiers quelconques tels que $\Sigma_i z_i g_i \geq 0$, tout point contient un point p tel que pour tout point q contenu dans p on ait $\Sigma_i\, z_i.[g_i{:}q] \geq 0$.*

(C3) *Si g_i $(i = 1, ..., n)$ sont des figures positives, si z_i sont des entiers et si tout point contient un point p tel que $\Sigma_i z_i.[g_i{:}p] \geq 0$, alors $\Sigma_i z_i g_i \geq 0$.*

Définitions. — Deux figures positives f et g sont dites *disjointes*, et l'on écrit $f \cap g = 0$, s'il n'existe aucun point contenu dans f et dans g. On dit qu'une figure positive h est *intersection* de deux autres f et g si elle est contenue dans f et dans g et si $(f-h) \cap (g-h) = 0$.

(C4) *Si p et q sont des points et si q n'est pas contenu dans p, il existe un point contenu dans q et disjoint de p.*

2.3. *Axiomes concernant les points contenus dans un point donné*

Un point q contenu dans un point p et distinct de lui est aussi dit *voisin* de p.

(V1) *Si deux points sont voisins d'un même point, ils sont disjoints ou l'un d'eux contient l'autre.*

(V2) *Si p, q sont des points, l'ensemble des points contenant q et contenus dans p est fini.*

Définition. — Si l'ensemble en question dans **(V2)** est réduit au point q, celui-ci est dit *voisin du premier ordre* de p.

(V3) *Tout point possède au moins trois voisins du premier ordre.*

[Il serait intéressant d'étudier les plans de Cremona *minces*, dans lesquels tout point posséderait exactement deux voisins du premier ordre.]

Il résulte des axiomes déjà énoncés que si p est un point et si q est un point voisin de p, l'ensemble des points contenus dans p et contenant q est totalement ordonné. Soient $p = p_0 > p_1 > ... > p_m = q$ ces points.

Définition. — Avec les notations précédentes, le point q est dit *proche* de p si $[p{:}q] = m$.

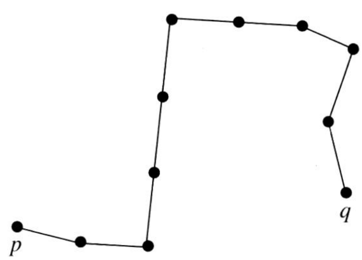
On note que, dans ce cas, $[p{:}p_i] = i$ et p_i est proche de p pour tout $i > 0$.

(V4) *Si q est un point proche de p, il existe un unique point qui est proche de p et de q.*

(V5) *La contenance d'un point p pour un point $q \neq p$ est la somme des contenances des points proches de p pour q* (presque toutes ces contenances sont nulles, vu **(V2)**).

Moyennant une modification des conventions de langage, qui permettrait d'accepter des sommes infinies, on pourrait dire qu'un point est la somme de ses points proches.

[Les relations de proximité et les valeurs des contenances entre les p_i sont représentés de façon imagée par un *schéma d'Enriques* $\mathscr{E}(p,q)$ que l'on associe aux couples de points (p,q) tels que $p > q$. Il s'agit d'un graphe plan, topologiquement un simple chemin, dont les sommets représentent les p_i (et seront nommés de même), dont les arêtes sont les couples (p_i,p_{i+1}) et tel que les arêtes (p_i,p_{i-1}) et (p_i,p_{i+1}) forment un angle de 90° si p_{i+1} est proche de p_{i-1}, un angle de 180° s'il existe $j < i-1$ tel que p_{i-1}, p_i et p_{i+1} soient proches de p_j, et un angle « très obtus » mais strictement inférieur à 180° dans tous les autres cas. On remarque que, si $j < i$, le sous-graphe de $\mathscr{E}(p,q)$ compris entre p_j et p_i est le schéma d'Enriques de (p_j,p_i), à ceci près que toute section initiale p_j, p_{j+1}, ... de ce sous-graphe qui est rectiligne doit plutôt être incurvée. Pour calculer la contenance $[p,q]$ à partir du schéma $\mathscr{E}(p,q)$, on calcule successivement les $[p_i{:}q]$ par récurrence descendante sur i en utilisant **(V5)** ; par exemple, pour le schéma d'Enriques



on a $q = p_{10}$, et les valeurs de $[p_i,q]$ pour $i = 9, 8, ..., 0$ sont 1, 1, 2, 2, 2, 6, 6, 6, 20, 20. Le schéma d'Enriques a été proposé par ce dernier pour donner une représentation graphique des types de singularités de courbes planes (cf. [EC]).]

2.4. *Axiomes concernant les demi-droites*

Définitions. — Deux points sont dits *transversaux* s'ils ont une intersection qui est un point voisin du premier ordre de chacun d'eux. On appelle *demi-droite* tout somme de deux points transversaux.

Du point de vue adopté au § 1, et notamment en 1.2 et 1.6, les demi-droites sont les génératrices des modèles quadriques du plan. Ce sont des courbes de self-intersection 0.

Définitions. — Un point *ordinaire* d'une demi-droite d est un point p tel que $[d{:}p] = 0$. Deux demi-droites sont dites *transversales* si elles ont une intersection qui un point ordinaire de chacune d'elles, et *parallèles* si elles sont disjointes.

(D1) *La différence $d-p$ entre une demi-droite et un de ses points ordinaires est un point transversal à p.*

(D2) *Il existe des demi-droites transversales.*

(D3) *Tout point disjoint d'une demi-droite donnée est contenu dans une unique demi-droite parallèle à celle-ci.* (Postulat d'Euclide !)

(D4) *Si deux demi-droites sont parallèles, toute demi-droite transversale à l'une est transversale à l'autre.*

2.5. *Pinceaux de demi-droites et axiome de projectivité*

Il résulte de **(D3)** que le parallélisme entre demi-droites est une relation d'équivalence.

Définitions. — Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée un *pinceau* de demi-droites. Une bijection π d'un pinceau P sur un autre P' porte le nom de *perspectivité* s'il existe une demi-droite d transversale à tous les éléments de P et à tous les éléments de P' telle que deux demi-droites, éléments de P et P' respectivement, se correspondent dans π si et seulement si leurs points d'intersection avec d coïncident. On appelle *projectivité* toute bijection d'un pinceau de demi-droites sur un autre qui est le résultat d'une succession de perspectivités.

(P) *Toute projectivité d'un pinceau de demi-droites sur lui-même qui laisse invariant trois éléments du pinceau est l'identité.*

2.6. *Minimalité du modèle*

[Le mot « modèle » est pris ici au sens du système axiomatique et non au sens du n° 1.1.]

(Min2) *Soit $\mathscr{P}'$ une partie de $\mathscr{P}$ telle que tout point contenu dans un élément de $\mathscr{P}'$ appartienne aussi à $\mathscr{P}'$, et soit $\mathscr{F}'$ le sous-groupe ordonné de $\mathscr{F}$ engendré par $\mathscr{P}'$. Alors, si le système $(\mathscr{F}',\mathscr{P}')$ satisfait à tous les axiomes* **(C), (V), (D),** *et* **(P)**, *il coïncide avec $(\mathscr{F},\mathscr{P})$.*

2.7. *Le corps de base*

Appelons *Plan de Cremona*, tout système $(\mathscr{F},\mathscr{P})$ satisfaisant aux axiomes **(Min), (C), (V), (D)** et **(P)** et considérons un tel système.

THÉORÈME 1. — (i) *Soient P un pinceau de demi-droites et d_∞, d_0, d_1 trois éléments distincts de P. Alors, l'ensemble $P - \{d_\infty\}$ possède une structure de corps commutatif k dont d_0 et d_1 sont les points 0 et 1 et telle que, si l'on identifie P à la droite projective $\mathbf{P}^1(k)$ en posant $d_\infty = \infty$, le groupe des projectivités de P sur lui-même soit le groupe projectif. Cette structure est unique et le corps k est algébriquement clos.*

(ii) *Il existe des projectivités de tout pinceau de demi-droites sur tout autre.*

L'assertion d'unicité de (i) est évidente et il résulte aussitôt de (ii) que le corps k est unique à isomorphisme unique près. C'est le *corps de base* du plan de Cremona $(\mathscr{F},\mathscr{P})$.

2.8. *Existence et unicité*

THÉORÈME 2. — *Pour tout corps k algébriquement clos, il existe un et, à isomorphisme près, un seul plan de Cremona ayant k pour corps de base.*

2.9. *Le plan sans multiplicités*

Le théorème suivant montre la possibilité de principe de fonder l'axiomatique sur la relation de contenance.

THÉORÈME 3. — *Si* ($\mathscr{F}'$,$\mathscr{P}'$) *est un autre plan de Cremona, tout isomorphisme d'ensembles ordonnés de* $\mathscr{P}$ *sur* $\mathscr{P}'$ *se prolonge de façon unique en un isomorphisme de groupes ordonnés de* $\mathscr{F}$ *sur* $\mathscr{F}'$.

COROLLAIRE. — *Le groupe des automorphismes de l'ensemble ordonné* $\mathscr{P}$ *est induit par le groupe des automorphismes du corps* $K = k(x,y)$ *qui prolongent un automorphisme de* k.

Le sens donné ici au mot « induit » est expliqué par ce qui précède. Les démonstrations des résultats des trois derniers numéros sont longues ; seules de brèves indications ont été données dans le cours.

RÉFÉRENCES

[D] P. Defrise, *Étude locale des correspondances rationnelles entre surfaces algébriques* (*Mém. Soc. Roy. Sci. Liège,* 4e série, t. IX, 1949).

[EC] F. Enriques et O. Chisini, *Lezioni sulla teoria algebrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, vol. IV (Zanichelli,* Bologna, 1918).

[L] P. Libois, *La synthèse de la géométrie et de l'algèbre (Coll. de Géométrie Algébrique,* CBRM, Liège, 1949, 143-153).

[Z] O. Zariski, *The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions (Bull. Amer. Math. Soc.,* **50** (1944), 683-691).

PUBLICATION

M. Ronan and J. Tits, *Twin trees II : Local structure and a universal construction (Israel J. Math.,* **109** (1999), 349-377).

MISSIONS

Cours

— *Isotropic simple algebraic groups and Moufang buildings,* huit leçons à l'Université d'Ottawa, octobre 1999.

Exposés

— *The classification of Moufang polygons : a survey,* Algebra Symposium, Université d'Ottawa, le 2 octobre 1999.

— *Exceptional Moufang buildings,* Trois exposés au Colloque : *« (Moufang) polygons and (twin) buildings »,* Gand, juin 1999.