Théorie des groupes

M. Jacques Tits, membre de l'Institut
(Académie des Sciences), professeur

Le cours de cette année avait pour titre : *Groupes de rang 1 et ensembles de Moufang.* En fait, on s'est intéressé plus particulièrement à la classification des immeubles sphériques et notamment des immeubles de Moufang de rang 1 (voir le § 4 ci-dessous pour le sens donné à cette expression).

Depuis le début de mon enseignement au Collège de France, en 1973, ces problèmes de classification m'ont occupé à plusieurs reprises. Le cours de 1973-1974 a été consacré, entre autres choses, à la classification des immeubles sphériques de rang $\geq$ 3 (et de type irréductible), qui apparaît comme une version combinatoire de la classification des groupes algébriques simples de même rang (il s'agit ici du rang relatif), auxquels il convient d'adjoindre les groupes classiques sur des corps gauches quelconques et certains groupes « exotiques » dits « mixtes » (cf. le § 8). La considération d'« immeubles libres » montre qu'une classification de ce type n'est pas envisageable en rang 2, mais j'ai conjecturé dans [9] (voir aussi [10], 3.3) qu'en ajoutant aux axiomes des immeubles une condition simple à laquelle j'ai donné le nom de *condition de Moufang* (elle généralise la propriété énoncée par R. Moufang en théorie des plans projectifs), on retrouvait en rang 2 un théorème de classification tout à fait analogue à celui valable en rang supérieur. Cette conjecture, dont la preuve est restée parmi mes objectifs de recherche dans les années qui ont suivi, a fait l'objet des cours de 1977-1978, 1993-1994 et 1994-1995. À la fin de ce dernier était esquissée une stratégie pour la solution du seul cas restant à traiter à ce moment-là, celui, particulièrement difficile des « quadrangles de Moufang ». Quelques mois plus tard, faisant preuve d'une virtuosité technique remarquable, Richard Weiss réussissait à conclure, exhibant par la même occasion une nouvelle classe de quadrangles dont je n'avais pas prévu l'existence ; cela me permettait, dans un séminaire en marge du cours de 1996-1997, d'annoncer la preuve complète de la conjecture.

Pour compléter le parcours, il était tentant de consacrer mon dernier cours à l'étude des immeubles de rang 1. Cela soulevait plusieurs questions, et notamment :

— qu'est-ce qu'un immeuble de Moufang de rang 1 ?

— quel serait en rang 1 l'analogue du théorème de classification obtenu pour les rangs supérieurs ?

— cet analogue est-il vrai, et sinon, comment faut-il en modifier l'énoncé pour qu'il le devienne ?

Sans y apporter de réponse complète, le cours a tiré de ces questions une partie de ses motivations, mais cela a aussi été l'occasion d'un exposé d'ensemble (le plus souvent sans rappel des démonstrations) des résultats de la classification *en rang quelconque,* exposé mettant en évidence la similitude entre les divers rangs, y compris le rang 2, et même, jusqu'à un certain point, le rang 1. Notons cependant que cette similitude entre les *résultats* devient beaucoup plus ténue si l'on en vient à comparer les démonstrations.

Rappels. Notions de base

1. *Matrices et systèmes de Coxeter. Immeubles*

Soit I un ensemble fini (l'hypothèse de finitude, commode pour l'exposé, pourrait souvent être omise). Une *matrice de Coxeter* sur I est une matrice symétrique $M = (m_{ij} | i, j \in I)$ à coefficients entiers positifs ou ∞, tels que $m_{ii} = 1$ pour tout $i \in I$ et $m_{ij} = m_{ji} > 1$ si $i \neq j$. La matrice de Coxeter M est représentée par le *graphe de Coxeter* correspondant, « graphe avec multiplicités » dont les sommets sont les éléments de I, les arêtes étant les paires de sommets $\{i, j\}$ telles que $m_{ij} \geq 3$; la *multiplicité* d'une telle arête $\{i, j\}$ est le nombre $m_{ij} - 2$, que l'on écrit à côté de l'arête en question s'il est ≥ 2. Une matrice de Coxeter est dite *irréductible* si le graphe de Coxeter qui la représente est connexe et l'on définit de façon évidente les *composantes irréductibles* d'une matrice de Coxeter quelconque, qui correspondent biunivoquement aux composantes connexes du graphe de Coxeter associé.

Un (ou, par un léger abus de langage, « le ») *système de Coxeter* de type M est un système $(W ; (s_i)_{i \in I})$ formé d'un groupe W et d'un système générateur (s_i) de W, indexé par I et tel que les relations

$$(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, \text{ pour } m_{ij} \neq \infty$$

forment une présentation de W. La matrice M, et le graphe de Coxeter correspondant, sont dits de type *sphérique* lorsque le groupe W est fini.

Un *complexe de chambres* au-dessus de I est un complexe simplicial doté d'une application appelée *type* de l'ensemble de ses sommets sur I, dont la restriction à chaque simplexe soit injective et telle que tous les simplexes maximaux, appelés *chambres,* soient de type I. Un tel complexe est dit *épais* si chaque simplexe qui n'est pas maximal est contenu dans trois chambres au moins. Le cardinal de I est appelé le *rang* de M, du système de Coxeter de type M et de tout complexe de chambres au-dessus de I.

Nous conservons les notations I, M, s_i, W, introduites plus haut. La notion d'*immeuble de type M* jouera ici un rôle essentiel. Pour en parler, on a intérêt à disposer de deux approches qui, bien qu'équivalentes, ont des contenus intuitifs assez différents : on peut voir un tel immeuble, soit comme un ensemble C doté d'une « distance » $\omega : C \times C \to W$, à valeurs dans W, soit comme un complexe de chambres Δ au-dessus de I (dont on note $\tau : \Delta \to I$ l'application type). On passe du premier point de vue au second par la règle suivante : si, pour $J \subset I$, on note W^J le sous-groupe de W engendré par les s_j ($j \notin J$), les simplexes de type J de Δ sont les « sphères de rayon W^J », c'est-à-dire les parties de C de la forme $\{x | \omega(c, x) \in W^J\}$ pour $c \in C$ donné, appelé « centre » de la sphère en question. On voit ainsi que tout élément c de C définit une chambre de Δ (que l'on note également c), dont le sommet de type $i \in I$ est la sphère de rayon W^i et de centre c dans C ; ainsi, C s'identifie à l'ensemble des chambres de l'immeuble Δ.

Rappelons les axiomes des immeubles de type M exprimés en termes du système (C, ω). Pour $w \in W$, on note $\ell(w)$ la longueur minimale d'un mot en les s_i exprimant w. Voici les axiomes annoncés : soient $x, y \in C$, $w = \omega(x, y)$ et $i \in I$, alors on a

(Imm0) $w = 1$ si et seulement si $x = y$;

(Imm1) si $z \in C$ est tel que $\omega(y, z) = s_i$, on a $\omega(x, z) = w$ ou ws_i et si, de plus, $\ell(ws_i) = \ell(w) + 1$, alors $\omega(x, z) = ws_i$;

(Imm2) il existe $z \in C$ tel que $\omega(y, z) = s_i$ et $\omega(x, z) = ws_i$;

(Imm3) Card $\{z \in C | \omega(y, z) = s_i\} \geq 3$.

(Ce dernier axiome, que l'on exprime en disant que l'immeuble est *épais,* n'est pas toujours exigé ; il l'a été dans le cours pour raison de commodité).

La définition précédente peut évidemment être traduite en termes du système (Δ, τ) ; cette traduction, proche de la définition de [9], 3.1, est d'un emploi moins commode que la définition donnée ci-dessus, et elle n'a pas été utilisée dans le cours. En revanche, on a souvent fait référence à une propriété importante des immeubles vus comme complexes simpliciaux, à savoir, la *propriété des résidus,* exprimée par la proposition 2.1 ci-dessous : cette propriété est parfois prise comme axiome dans certaines présentations de la théorie des immeubles et est d'ailleurs à l'origine de la notion (cf. [7], [11] et aussi les commentaires suivant l'énoncé de la proposition 2.1).

2. *Résidus*

Soient $M = (m_{ij})_{i, j \in I}$ une matrice de Coxeter et J une partie de I. La matrice de Coxeter $(m_{ij} | i, j \in I - J)$ est appelée *résidu* de M par rapport à J et notée $M \backslash J$.

En termes de graphes de Coxeter, prendre le résidu par rapport à J consiste à effacer les sommets appartenant à J et toutes les arêtes qui en sont issues.

Si Δ est un complexe de chambres au-dessus de I et A un simplexe de Δ de type $J \subset I$, le complexe simplicial au-dessus de $I - J$ formé par les simplexes de type $\subset I - J$ de Δ qui sont contenus dans un simplexe contenant A est un complexe de chambres appelé résidu de Δ par rapport à A et que nous notons $\Delta \backslash A$.

Proposition 2.1. — *Si Δ est un immeuble de type M au-dessus de I, J une partie de I et A un simplexe de Δ, de type J, alors le résidu $\Delta\backslash A$ est un immeuble de type $M\backslash J$.*

Si $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{smallmatrix}\right)$, les immeubles de type M sont aussi appelés *m-gones généralisés (épais)* ; rappelons-en la définition élémentaire, que l'on déduit aussitôt de la définition générale du § 1 :

(PG_m) *pour m fini, un m-gone généralisé (épais) est un graphe épais de diamètre m et de circonférence (« girth ») 2m ; si $m = \infty$, c'est un arbre épais, connexe.*

Dans une version primitive de la théorie des immeubles, la définition de ceux-ci était fondée sur la définition élémentaire (PG_m) des polygones généralisée (les « briques ») complétée par la proposition 2.1 ci-dessus (le procédé de construction). Cette définition s'est avérée inadéquate en général, mais elle est « presque » suffisante dans certains cas importants (cf. [12], § 6, pour une discussion de cette question).

3. *Immeubles de Moufang*

Avant de passer au sujet annoncé par ce titre, rappelons encore, en vue de la suite, que la somme directe (ou « joint ») d'une famille d'immeubles (Δ_s), vus comme complexes simpliciaux, est aussi un immeuble dont le type (représenté par son graphe de Coxeter) est la somme disjointe des types des Δ_s, et que tout immeuble Δ est somme directe d'immeubles Δ_i de types irréductibles, appelés les « composants irréductibles » de Δ. L'immeuble Δ est sphérique si et seulement si les Δ_i le sont.

Nous venons de rappeler que les résidus d'immeubles sont des immeubles. La « propriété de Moufang » s'introduit naturellement lorsque l'on cherche ce que pourrait être une réciproque de cette assertion. Pour préciser ceci, considérons une matrice de Coxeter M au-dessus de I et soit J une partie de I. Disons qu'une propriété P se rapportant à un immeuble (non spécifié) de type $M\backslash J$ est une condition nécessaire de *prolongeabilité au type M* si, pour tout immeuble Δ de type M et tout simplexe A de Δ de type J, le résidu $\Delta\backslash A$ possède la propriété P en question. Ainsi, pour les plans projectifs (immeubles de type A_2 = $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$), la propriété de Desargues est une condition de prolongeabilité au type A_3 = $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$. La propriété de Moufang dont il va être question est une condition de prolongeabilité « universelle » pour les immeubles sphériques, au sens suivant : dans un immeuble sphérique Δ, la condition de Moufang est satisfaite pour tout résidu de rang ≥ 2 dont le type est connexe sans être cependant une composante connexe du type de Δ (les résidus d'immeubles de type M dont le type est une composante connexe de M ne sont évidemment soumis à aucune condition).

Une notion générale d'immeuble de Moufang est définie dans [9], p. 274 ; de cette définition il résulte (conséquence facile) que

(1) *un immeuble est de Moufang si et seulement si ses composants irréductibles le sont,*

et (moins immédiatement : cf. l'assertion (1) de *loc. cit.*, p. 274) que

(2) *un immeuble sphérique irréductible de rang* ≥ 3 *est toujours de Moufang.*

Rappelons d'autre part, d'après [19], que

(3) *pour* $3 \leq m < \infty$, *un* m*-gone généralisé* Γ *(qui est un graphe, selon* (PG_m)*) possède la propriété de Moufang si, pour tout chemin* $u_0,\ldots,u_m$, *de longueur* m, *sans aller et retour (c'est-à-dire que* $u_{t-1} \neq u_{t+1}$ *pour* $t \neq 0, m$*), le groupe* $U(u_0,\ldots,u_m)$ *des automorphismes de* Γ *fixant les* u_i *ainsi que tous les sommets voisins des* u_j ($j \neq 0, m$) *permutent transitivement les voisins de* u_0 *distincts de* u_1.

Les assertions (1), (2), (3) caractérisent les immeubles de Moufang parmi les immeubles de type sphérique quelconques sans facteur direct de type A_1 (point isolé du graphe de Coxeter). Dans le cours, on a choisi de traiter différemment le cas où un tel facteur existe et de ne pas retenir la définition de [9] dans ce cas-là (la définition en question étant banale et sans intérêt pour les immeubles de type A_1).

4. *Immeubles de Moufang de rang 1*

Considérons un immeuble de Moufang Δ de rang 2 et de type $\bullet\overset{m}{\text{―――}}\bullet$ ($m \geq 3$), vu comme un graphe, soient u un sommet de Δ et $X = \Delta\backslash u$ le résidu de Δ par rapport à u, c'est-à-dire l'ensemble des sommets de Δ voisins de u. Pour tout chemin ($u = u_0,u_1,\ldots,u_m$) de longueur m et d'origine u, le groupe noté $U(u_0,\ldots,u_m)$ au § 3 induit sur X un groupe de permutations fixant u_1 et transitif sur $X - \{u_1\}$. On montre que ce groupe est même simplement transitif sur $X - \{u_1\}$ et qu'il ne dépend que de Δ, $u = u_0$, u_1, et non du restant du chemin considéré (cf. p. ex. [18]) ; notons-le $U_X(u_1)$. Comme chaque élément de ce groupe est induit par un automorphisme de Δ fixant u, il normalise le système des $U_X(x)$, ($x \in X$).

Étant donné qu'en rang > 1, la propriété de Moufang se conserve par passage aux résidus (de types irréductibles), les observations précédentes suggèrent d'appeler *immeuble de Moufang de rang 1* un ensemble X doté d'un système de groupes de permutations $(U_x)_{x \in X}$ tel que pour tout $x \in X$, U_x fixe x, soit simplement transitif sur $X - \{x\}$ et normalise le système. Nous nommons X le *support* de l'immeuble et U_x le groupe des *transvections* de centre x. On note qu'avec cette terminologie, alors qu'un immeuble de Moufang de rang 2 est un immeuble irréductible de rang 2 soumis à des conditions particulières, un immeuble de Moufang de rang 1 est un immeuble de rang 1 (autrement dit, un simple ensemble) doté d'une structure additionnelle. Dans un immeuble de type irréductible et de rang ≥ 2, tout résidu de rang 1 est aussi résidu d'un résidu de type irréductible de rang 2 ; d'après ce que l'on a vu plus haut, cela lui confère une structure d'immeuble de Moufang de rang 1. On peut voir que cette structure ne dépend pas du résidu de rang 2 choisi comme intermédiaire. Dans [18], les immeubles de Moufang de rang 1 sont appelés « ensembles de Moufang » ; les immeubles de Moufang de rang 1 sont des « structures de Moufang » au sens de [16] mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Les immeubles de Moufang (de rang quelconque) sont naturellement définis comme étant des immeubles sphériques dont les composants irréductibles de rang n sont de Moufang si $n \geq 2$ (ce qui est automatique pour $n \geq 3$), et sont dotées d'une structure d'immeuble de Moufang de rang 1 si $n = 1$.

La classification

5. *Introduction. Conventions générales*

Dans le cours, voulant décrire, en guise d'introduction au cas du rang 1, les résultats connus concernant les immeubles de rang ≥ 3 (cf. [9]) et les polygones de Moufang (cf. [21], et, pour une présentation antérieure, partiellement conjecturale, [10], § 4), je me suis aperçu que les énoncés concernant les rangs ≥ 3, le rang 2 et même, partiellement, le rang 1 sont susceptibles d'une présentation uniforme, du moins tant que l'on ne se préoccupe pas des démonstrations qui, elles, diffèrent considérablement d'un rang à l'autre. C'est ce point de vue unificateur qui a été adopté dans le cours et donc aussi dans le présent résumé.

Les paragraphes 6 à 8, donnent une liste d'immeubles de Moufang irréductibles qui est complète sauf en rang 1 (à ce sujet, cf. le § 9). Nous donnons à chaque immeuble un nom de la forme $\mathbf{X}(...)$, où $\mathbf{X} = (\mathbf{A}_n, \mathbf{C}_n, \mathbf{D}_n,...)$ est le symbole représentant traditionnellement le groupe de Coxeter correspondant au type de l'immeuble en question.

6. *Immeubles classiques*

6.1. *Immeubles linéaires* $\mathbf{A}_n(K)$

Ici, K est un corps non nécessairement commutatif. Si $n \geq 2$, on considère un espace projectif P à n dimensions sur K. Ses sous-espaces propres non vides sont les sommets de l'immeuble $\mathbf{A}_n(K)$, dont les simplexes sont les drapeaux formés de tels sous-espaces. Il est naturel d'appeler $\mathbf{A}_1(K)$ l'immeuble de rang 1 résidu de $\mathbf{A}_2(K)$ par rapport à l'un de ses points (cf. le § 4) ; on vérifie que son support est une droite projective $\mathbf{P}_1(K)$ et que les transvections de l'immeuble sont les translations (aussi appelées transvections) de cette droite.

6.2. *Immeubles semi-quadratiques* $\mathbf{C}_n(K, \sigma, q_0)$

Cette fois, K désigne un corps non nécessairement commutatif doté d'une involution σ, et l'on note K_σ le groupe $\{t\text{-}t^\sigma | t \in K\}$ des « antitraces » de σ dans K, X_0 un K-espace vectoriel à droite, non nul si $\sigma = \mathrm{id.}$, et $q_0 : X_0 \to K/K_\sigma$ une forme σ-quadratique ne représentant pas 0 : nous appelons forme *σ-quadratique* la réduction modulo K_σ de l'image de la contraction $(f(x,y) \mapsto f(x,x))$ d'une forme $(\sigma,1)$-linéaire. (Dans [9], 8.2., une telle forme est appelée $(\sigma,1)$-quadratique). Notons I l'ensemble d'entiers $\{\pm 1, \pm 2, ..., \pm n\}$ et, pour $i \in I$, soient X_i un K-espace vectoriel à droite de dimension 1 et (e_i) une base de X_i. Soient X l'espace vectoriel somme directe des X_j, $-n \leq j \leq n$, et $q : X \to K/K_\sigma$ la forme σ-quadratique somme directe de q_0 et des « formes hyperboliques standard » $e_i x + e_{-i} y \mapsto x^\sigma y + K_\sigma$ $(= y^\sigma x + K_\sigma)$. L'immeuble $\mathbf{C}_n(K, \sigma, q_0)$ a pour sommets les sous-espaces propres non nuls de X sur lesquels q s'annule (sous-espaces totalement singuliers) et pour simplexes les drapeaux formés de tels sous-espaces. Ceci définit l'immeuble en question lorsque $n \geq 2$ et il est naturel de définir l'immeuble $\mathbf{C}_1(K, \sigma, q_0)$ comme le résidu de l'immeuble $\mathbf{C}_2(K, \sigma, q_0)$ par rapport à un sommet représenté par un sous-espace singulier de dimension 1 de la forme σ-quadratique utilisée pour le définir. Dans le cours, on a déterminé le support et les groupes de transvections de l'immeuble de type $\mathbf{C}_1$ ainsi défini ; cela est d'ailleurs facile grâce aux formules données dans [2], 10.1.

6.3. *Immeubles alternés* $\mathbf{C}_n(k)$ *et immeubles quadratiques déployés* $\mathbf{D}_n(k)$

On se donne à présent un corps *commutatif* k, un entier n et un k-espace vectoriel X de dimension $2n$. On s'intéresse aux deux situations suivantes :

(C) $n \geq 3$, car $k \neq 2$ et l'on se donne une forme alternée $a : X \times X \to k$;

(D) $n \geq 4$ et l'on se donne une forme quadratique déployée (non dégénérée) $q : X \to K$.

L'immeuble $\mathbf{C}_n(k)$ (resp. $\mathbf{D}_n(k)$) a pour sommets les sous-espaces propres non nuls de X totalement isotropes pour a (resp. totalement singuliers pour q et de dimension $\neq n-1$) et pour simplexes les drapeaux (resp. les oriflammes : cf. [9], 7.12 [1]) formés de tels sous-espaces.

6.4. *Remarques.* (a) Dans cette classification, on s'est fixé pour règle d'éviter au maximum les répétitions. Cela explique la présence des hypothèses $n \geq 3$ et car $k \neq 2$ dans le cas (C) (resp. $n \geq 4$ dans le cas (D)) ; en effet, les immeubles ainsi écartés ont déjà été répertoriés au n° 6.2 (resp. 6.1).

1. Ceci est l'occasion de signaler que le système (Δ, A) décrit dans *loc. cit.* n'est pas seulement un immeuble « faible », comme cela semble impliqué à cet endroit, mais un vrai immeuble (épais), du moins lorsque les droites de S ont au moins trois points.

(b) Telle qu'elle est présentée dans [9], § 8, la classification des immeubles de type C_n fait intervenir plusieurs types de formes : formes hermitiennes, antihermitiennes $(\sigma,1)$-quadratiques (= σ-quadratiques dans la terminologie utilisée ici) et $(\sigma,-1)$-quadratiques. Il a été montré dans le cours que l'ensemble de ces cas se ramène simplement aux formes σ-quadratiques et aux formes alternées ordinaires. Ceci n'est pas seulement une reformulation du fait bien connu qu'une forme antihermitienne qui n'est pas alternée au sens usuel est proportionnelle à une forme hermitienne (pour une autre involution), car en caractéristique 2 on doit, on l'a vu, considérer des formes qui sont autres que de simples formes sesquilinéaires à valeurs dans K. En fait, sans être difficile, la réduction en question demande cependant la combinaison de plusieurs assertions du § 8 de [9].

7. *Immeubles exceptionnels*

7.1. *Rappels sur la classification relative et les immeubles des groupes algébriques simples* (cf. [8] ; [9], § 5)

Soient k un corps commutatif et G un k-groupe algébrique semi-simple. Sur une clôture séparable K de k, G est caractérisé à isogénie centrale près par son *diagramme de Dynkin* $\mathrm{Dyn}_K\mathrm{G}$ (le diagramme de Dynkin *absolu* de G), qui est un graphe de Coxeter dont les arêtes multiples sont affectées d'une orientation, représentée par une flèche (en termes de racines, celle-ci pointe vers celle des deux extrémités de l'arête qui représente la racine la plus courte, comparaison qui prend son sens dans le facteur simple auquel appartiennent les deux racines en question). Les classes de conjugaison (absolues) de sous-groupes paraboliques de G sont en correspondance canonique bijective avec les parties de l'ensemble des sommets de $\mathrm{Dyn}_K G$, ensemble que nous notons I_K.

Les k-sous-groupes paraboliques minimaux sont tous conjugués (sur k, donc aussi absolument) et déterminent par conséquent une partie distinguée de I_K désignée par I_K^{o}. Le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(K/k)$ opère naturellement sur I_K en laissant invariant I_K^{o}. On appelle *indice* (ou *indice de Witt*) de G sur k, le système formé de $\mathrm{Dyn}_K G$, de I_K^{o} et du groupe d'automorphismes de ce couple induit par Γ. Divers algorithmes simples (donnés dans [1], § 6 et [8]) permettent de déduire de cet indice le diagramme de Dynkin $\mathrm{Dyn}_k G$ du système de racines relatives de G sur k, diagramme consistant à nouveau en un graphe de Coxeter, une orientation de ses arêtes multiples et en outre, s'il existe des racines multipliables, des croix signalant les sommets de $\mathrm{Dyn}_k G$ correspondant à de telles racines. Dans ce résumé, bornons-nous à retenir des algorithmes en question le fait que les sommets de $\mathrm{Dyn}_k G$ sont en bijection avec les orbites de Γ dans I_K^{o}. Le nombre de ces orbites est appelé le *k-rang* de G ; c'est aussi le rang de l'immeuble que nous allons définir. S'il est nul, G est dit *anisotrope* (sur k) et l'immeuble est vide ; sinon G est *isotrope*.

Supposons désormais G absolument simple et isotrope. L'immeuble de G sur k, que nous notons $\mathbf{Imm}(G/k)$ est le complexe simplicial dont les sommets sont (en bijection avec) les k-sous-groupes paraboliques maximaux de G et dont les simplexes « sont » tous les k-sous-groupes paraboliques de G, les relations d'inclusion étant inversées. De tout ceci, il résulte que le type de l'immeuble **Imm**(G/k) est le graphe de Coxeter sous-jacent à $\mathrm{Dyn}_k G$.

Si le k-rang de G est égal à 1, ce qui précède détermine bien l'immeuble (banal) de G sur k, *mais non son immeuble de Moufang*. Pour celui-ci, une définition s'impose naturellement : on prend pour support X de l'immeuble l'ensemble des k-sous-groupes paraboliques propres de G, et si P est un tel sous-groupe et U son radical unipotent, le groupe des transvections de centre P est le groupe de permutations de X induit par $U(k)$ opérant par conjugaison.

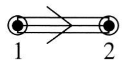
Nous appelons *immeubles algébriques* les immeubles **Imm**(G/k) qui viennent d'être définis ; leur classification est équivalente à la classification à isogénie centrale près des groupes absolument simples isotropes sur les corps commutatifs, laquelle est donnée dans [8] (modulo la classification des groupes anisotropes). Elle a pour principe un « théorème de Witt » selon lequel un tel groupe G est caractérisé à isogénie centrale près par son indice et par un certain groupe anisotrope G^{an} (dont seule la classe d'isogénie centrale importe) appelé le *noyau anisotrope* de G, dont l'indice (qui se résume ici à un simple diagramme de Dynkin doté d'une action du groupe de Galois Γ) se déduit de celui de G en lui retirant les sommets appartenant à I^0_K et les arêtes de $\mathrm{Dyn}_K G$ qui y aboutissent. Ce théorème étant posé, il reste, pour rendre la classification effective, à énumérer tous les indices possibles et, pour chacun d'eux, à déterminer, parmi les groupes semi-simples anisotropes G^{an} dont l'indice s'obtient de la façon qui vient d'être décrite à partir de $\mathrm{Dyn}_K G$ (avec l'action prescrite de Γ) et de I^0_K, quels sont ceux qui proviennent effectivement d'un k-groupe G ; nous disons qu'un tel groupe G^{an} (noyau anisotrope potentiel) est *admissible*. Des conditions nécessaires et suffisantes d'admissibilité sont données dans [8], 3.4. (cf. aussi [14]). Le type absolu de G^{an} étant déterminé par l'indice auquel on s'intéresse, l'un des critères d'admissibilité est l'existence sur k de certaines représentations linéaires dont les types absolus (poids dominants) se lisent sur les diagrammes. Le cas du rang 1 est particulièrement simple : dans ce cas, la condition se résume en l'existence sur k d'*une* représentation irréductible (sur k) de type absolu donné. Nous verrons une application de cette remarque au n° 7.5.

7.2. *Immeubles exceptionnels. Notations*

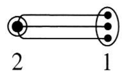
Il s'avère que tout immeuble de la forme **Imm**(G, k) où G est un k-groupe isotrope absolument simple, est un immeuble classique au sens du § 6, sauf dans les sept cas dits *exceptionnels,* où le diagramme de Dynkin absolu de G et l'action de Γ sur ce diagramme est donné par l'une des figures suivantes, dans lesquelles les orbites de Γ dans I_K sont encerclées (ces orbites sont numérotées ici pour faciliter les références ultérieures) :

Table 7.2.1.

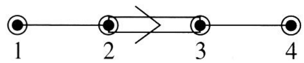
G_2



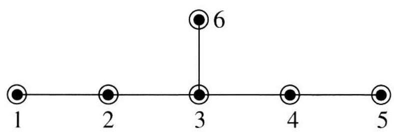
${}^3D_4$ ou ${}^6D_4$



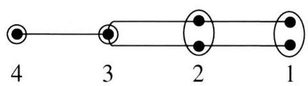
F_4



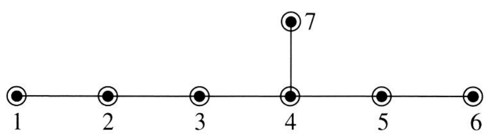
E_6



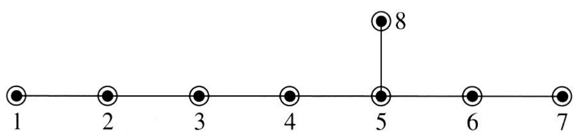
${}^2E_6$



E_7



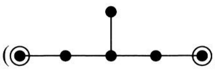
E_8



Dans le cours, les immeubles algébriques **Imm**(G/k) ont été désignés par un « symbole » de la forme suivante :

$$\mathbf{X}(\mathrm{Ind},\ k,\ G^{\mathrm{an}})\ ;$$

où **X** est le type du système de racines relatif de G (si l'on s'intéresse seulement au type de l'immeuble, $\mathbf{BC_n}$ et $\mathbf{B_n}$ doivent être remplacés par $\mathbf{C_n}$, et $\mathbf{BC_1}$ devient $\mathbf{A_1}$), Ind est l'indice de Witt (dans la représentation duquel les orbites distinguées de Γ dans I_K^{o} sont encerclées) et G^{an} est le noyau anisotrope de G qu'il suffit de connaître à isogénie centrale près. Par exemple, le symbole représentant l'immeuble du plan projectif sur une algèbre d'octaves à division de centre k est

(7.2.2) $\mathbf{A}_2$( , k, Spin n)

où n désigne la forme quadratique norme de l'algèbre d'octaves en question. Dans cette présentation de la classification il importe, pour chaque cas énuméré, de donner le type absolu de G^{an} et d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes d'admissibilité de la k-forme G^{an} envisagée.

Dans la suite de ce § 7, nous allons donner une liste quelque peu simplifiée des types d'immeubles exceptionnels. Outre que nous omettons systématiquement la mention explicite du corps de base k, les simplifications, destinées à éviter des problèmes typographiques et un allongement excessif de ce résumé, sont de deux ordres :

— nous remplaçons chaque fois la figure représentant l'indice par la mention du type absolu du groupe G, avec action de Γ, suivie des numéros des orbites distinguées, le tout se référant aux notations de la table 7.2.1 (si l'on préfère les figures, on peut les trouver dans [8]) ;

— en ce qui concerne les groupes G^{an}, les symboles donnés indiquent seulement leurs types absolus, avec action de Γ (données que l'on peut d'ailleurs déjà déduire de Ind, comme on l'a remarqué plus haut) ; ainsi, le symbole (7.2.2) devient

$$\mathbf{A}_2(\mathrm{E}_6 ;\ 1,\ 5 ;\ \mathrm{D}_4).$$

Pour les immeubles de rang 1, considérés au n° 7.5 et qui devaient faire dans ce cours l'objet d'une attention particulière, nous suppléons à la perte d'information due aux conventions simplificatrices adoptées en énonçant un critère uniforme, déjà évoqué à la fin du n° 7.1, permettant de déduire la structure de G^{an} de la seule donnée Ind. Du fait que pour les immeubles déployés et quasi-déployés (n° 7.3) le groupe G^{an} est connu *a priori* (car réduit à l'élément neutre !), il n'y a plus que les immeubles énumérés au n° 7.4 pour lesquels notre description reste quelque peu imprécise, mais le mal n'est pas bien grand car ces immeubles-là sont, parmi les immeubles exceptionnels, ceux qui sont les plus étudiés dans la littérature (cf. p. ex. [8], [9]).

7.3. *Immeubles déployés et quasi-déployés*

Nous appelons ainsi les immeubles **Imm**(G, k) où G est déployé ou quasi-déployé sur k. Avec les notations et conventions introduites plus haut, ils sont désignés par les symboles $\mathbf{X}(\mathrm{X})$ ($\mathrm{X} = \mathrm{G}_2$, F_4, E_6, E_7, ou E_8), $\mathbf{G}_2({}^3\mathrm{D}_4$, ou ${}^6\mathrm{D}_4)$, $\mathbf{F}_4({}^2\mathrm{E}_6)$.

7.4. *Immeubles de rang ≥ 2 qui ne sont ni déployés ni quasi-déployés*

Ils sont de dix espèces, dont voici la liste :

$\mathbf{A}_2$ (E_6 ; 1, 5 ; D_4)

$\mathbf{G}_2$ (E_6 ; 3, 6 ; $\mathrm{A}_2 \times \mathrm{A}_2$)

$\mathbf{BC}_2$ (${}^2\mathrm{E}_6$; 4, 1 ; ${}^2\mathrm{A}_3$)

$\mathbf{G_2}$ ($^2E_6$; 4, 3 ; $^2(A_2 \times A_2)$) (l'exposant 2 signifie que les deux facteurs A_2 sont permutés par Γ)
$\mathbf{F_4}$ (E_7 ; 2, 4, 5, 6 ; $A_1 \times A_1 \times A_1$)
$\mathbf{C_3}$ (E_7 ; 1, 2, 6 ; D_4)
$\mathbf{BC_2}$ (E_7 ; 2, 6 ; $A_1 \times D_4$)
$\mathbf{F_4}$ (E_8 ; 1, 2 3, 7 ; D_4)
$\mathbf{BC_2}$ (E_8 ; 1, 7 ; D_6)
$\mathbf{G_2}$ (E_8 ; 1, 2 ; E_6).

7.5. *Immeubles de rang 1*

Commençons par dresser la liste des symboles, dans lesquels seul le type absolu de G^{an} est indiqué ; ils sont au nombre de neuf :
(a) $\mathbf{BC_1}$ ($^sD_4$; 2 ; $^s(A_1 \times A_1 \times A_1)$) (selon que $s = 3$ ou 6, Γ induit un groupe cyclique ou un groupe symétrique d'ordre 6 de permutations des trois facteurs A_1 de G^{an})
(b) $\mathbf{BC_1}$ (F_4 ; 4 ; B_3)
(c) $\mathbf{BC_1}$ ($^2E_6$; 4 ; $^2A_5$)
(d) $\mathbf{BC_1}$ ($^2E_6$; 1 ; $^2D_4$)
(e) $\mathbf{A_1}$ (E_7 ; 1 ; E_6)
(f) $\mathbf{BC_1}$ (E_7 ; 6 ; D_6)
(g) $\mathbf{BC_1}$ (E_7 ; 2 ; $A_1 \times D_6$)
(h) $\mathbf{BC_1}$ (E_8 ; 1 ; E_7)
(i) $\mathbf{BC_1}$ (E_8 ; 7 ; D_7).

Décrivons à présent le procédé permettant de déterminer la famille de noyaux G^{an} admissibles à partir de l'indice $\mathrm{Ind}_k G$. Celui-ci se compose d'un diagramme de Dynkin $\mathrm{Dyn}_K G$, l'un de ceux de la table 7.2.1, d'une action de Γ sur celui-ci (l'image de cette action dans $\mathrm{AutDyn}_K G$ se lit dans la table) et d'une orbite O de cette action. Soit $\mathrm{Dyn}' = \mathrm{Dyn}_K G \backslash O$ le diagramme de Dynkin, non nécessairement connexe, déduit de $\mathrm{Dyn}_K G$ en retirant de celui-ci les sommets appartenant à O et les arêtes qui en sont issues : c'est le diagramme de Dynkin de G_K^{an} (nous notons ainsi le K-groupe déduit de G^{an} par extension des scalaires). Pour $x \in O$, notons ω_x la somme des poids dominants fondamentaux de G_K^{an} correspondant aux sommets de Dyn' connectés à x dans $\mathrm{Dyn}_K G$. Une condition nécessaire et suffisante d'admissibilité d'une k-forme donnée G^{an} de G_K^{an} est l'existence d'une k-représentation linéaire de G^{an} (que l'on suppose simplement connexe) dont les composants irréductibles sur K ont pour poids dominants les ω_x et sont permutés par Γ de la même façon que les x. Il est facile, à l'aide de [14] par exemple, de donner une forme plus concrète à cette condition. Donnons quelques exemples, en nous référant à l'étiquetage ((a), (b), (c), ...) de la liste ci-dessus :

dans le cas (a), la condition revient à exiger que G^{an} soit une restriction de scalaires $R_{k'/k}H$, où k' est une extension cubique de k, cyclique ou non selon que $s = 3$ ou 6, H est le groupe des éléments de norme réduite 1 (ou, en caractéristique

2, de trace réduite nulle) d'un corps de quaternions de centre k' dont la corestriction de k' à k est triviale ;

dans le cas (d), on doit avoir G^{an} = Spin q, où q est une forme quadratique anisotrope à 8 variables dont le discriminant (ou l'invariant d'Arf) est non trivial et, si l'on note k' l'extension quadratique séparable de k qu'il définit, telle que la corestriction de k' à k de l'invariant de Hasse-Witt de q (invariant qui est un élément du groupe de Brauer de k') soit nulle ;

dans le cas (h) G^{an} est un groupe anisotrope de type E_7 et la condition d'admissibilité est que son invariant de Brauer (cf. [14]) soit nul ; ici, la principale difficulté consiste à montrer l'existence d'un corps k sur lequel il existe une forme anisotrope de E_7 satisfaisant à cette condition (pour la preuve de ce fait, cf. [17]) ;

dans le cas (i), on doit avoir G^{an} = Spin q, où q est une forme quadratique anisotrope à 14 variables de discriminant (ou d'invariant d'Arf) trivial, dont l'invariant de Hasse-Witt est nul (pour l'existence d'une telle forme sur certains corps k, voir aussi [17]).

8. *Immeubles mixtes*

8.1. *Immeubles de rang ≥ 2*

Une fois pris en compte les immeubles énumérés aux §§ 6 et 7, il ne reste plus que cinq « petites » familles d'immeubles de Moufang de rang ≥ 2. Ils apparaissent comme des variantes d'immeubles algébriques à ceci près que, pour les décrire, on a généralement besoin de *deux* corps au lieu d'un seul (d'où le nom d'immeubles mixtes) et que les corps qui entrent en ligne de compte doivent satisfaire à des conditions très restrictives ; en particulier, ce sont tous des corps de caractéristique 2 sauf dans un des cinq cas (cf. le n° (i) ci-dessous) où la caractéristique est 3. Comme pour les immeubles algébriques, on peut distinguer des formes déployées, quasi-déployées et « tordues ».

(i) *Formes déployées de première espèce.* Ces immeubles sont décrits dans [9], n° 10.3.2. On considère deux corps k et K, de caractéristique $p = 2$ ou 3, tels que $K^p \subset k \subset K$, et un groupe algébrique presque simple déployé G défini sur le corps premier F_p et dont les racines sont de deux longueurs différentes, dans le rapport de 1 à $\sqrt{p}$. On choisit un tore maximal déployé de G, d'où un système de racines Φ et un système de sous-groupes radiciels $(U_a)_{a \in \Phi}$ que l'on épingle « à la Chevalley » ce qui implique la donnée d'un paramétrage des U_a par le groupe additif. On note G le groupe engendré par les $U_a = U_a(k)$ pour a une racine longue et les $U_a = U_a(K)$ pour a une racine courte. Ayant fixé un ordre dans le système de racines Φ, on désigne par U_+ le groupe engendré par les U_a, a positif. On a une bijection ω (décomposition de Bruhat) de l'ensemble de doubles classes $U_+\backslash G/U_+$ sur le groupe de Weyl W de G. Finalement, il existe un immeuble défini, selon la première approche du § 1, comme l'espace homogène $C = G/U_+$ (ensemble des chambres) doté de la distance à valeurs dans W donnée par $\omega(c, c') = c^{-1}c'$; nous le notons $\mathbf{X}(k, K)$, où X est le type du groupe G.

On montre que, si ce type est classique (B ou C), l'immeuble en question est en fait un immeuble classique au sens du § 6. Restent donc les deux familles exceptionnelles

$$\mathbf{G}_2(k, K) \text{ et } \mathbf{F}_4(k, K).$$

(i') Formes déployées de seconde espèce. Nous appelons ainsi les quadrangles « indifférents » (cf. par ex. [19], 2.1, ou [21], chap. 23), qui sont caractérisés par la donnée de deux corps k, K de caractéristique 2 tels que $K^2 \subset k \subset K$, d'un K^2-sous-espace vectoriel générateur ℓ de k et d'un k-sous-espace vectoriel générateur L de K ; nous les désignons par le symbole

$$\mathbf{C}_2(k, \ell\, ; K, L).$$

(ii') *Formes quasi-déployées.* Les seuls immeubles de rang ≥ 2 de cette espèce sont les octogones de Moufang décrits dans [13]. Un tel octogone est caractérisé par un couple formé d'un corps k de caractéristique 2 et d'un endomorphisme $\sigma : k \to k$ dont le carré est l'endomorphisme de Frobenius. Avec des notations directement inspirées de celles du n° 7.3, le symbole correspondant est

$$\mathbf{I}_2^{(8)}({}^2\mathrm{F}_4\, ; k, \sigma).$$

(iii) *Formes de rang ≥ 2 non quasi-déployées.* On ne trouve sous cette rubrique que les quadrangles généralisés découverts par R. Weiss (cf. [21], pp. 100-101 ; [4] ; [22], chap 27) auxquels, procédant par analogie avec 7.2 ci-dessus, on est conduit à attacher un symbole de la forme $\mathbf{C}_2(\mathrm{F}_4\, ; 1, 4\, ; G^{\mathrm{an}})$, où G^{an} est une forme anisotrope d'un groupe mixte de type C_2. Le problème de l'énoncé des conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire G^{an} n'est pas encore entièrement résolu.

8.2. *Immeubles de rang 1*

Contrairement à ce qui se passe pour les immeubles classiques et algébriques, il ne semble pas y avoir de notion naturelle évidente d'immeuble de Moufang mixte de rang 1. Toutefois, si une telle notion existe, elle doit en tout état de cause inclure tout immeuble de rang 1 pouvant être construit à partir d'un immeuble de Moufang mixte de rang supérieur par l'un des deux procédés suivants :

(a) le passage aux résidus de rang 1 ;

(b) une descente analogue à celle utilisée dans les cas (ii) et (iii) ci-dessus (ceci est susceptible d'une formulation précise, qui a été donnée dans le cours).

On s'est donc intéressé aux immeubles ainsi obtenus, mais sans arriver à des résultats définitifs. Pour le procédé (a), un raisonnement rapide, mais qui demande à être contrôlé, semble indiquer qu'il ne fournit rien d'autre que des immeubles classiques, au sens du § 6. Quant à (b), il conduit au moins aux immeubles de rang 1 de Suzuki et de Ree, correspondant aux symboles

$$\mathbf{A}_1({}^2\mathrm{C}_2\, ; k, \sigma) \text{ et } \mathbf{A}_1({}^2\mathrm{G}_2\, ; k, \sigma),$$

où car $k = 2$ ou 3 selon le cas et où σ est un endomorphisme de k dont le carré est l'endomorphisme de Frobenius. Le procédé (b) pose des problèmes intéressants, tels que le suivant par exemple : peut-on obtenir des immeubles de rang 1 par descente à partir des immeubles de rang 2 décrits en 8.1 ?

9. *Immeubles de Moufang de rang 1 (suite mais non fin)*

Le cours s'est achevé par quelques questions et remarques complémentaires concernant le problème de la classification des immeubles de Moufang de rang 1. En voici quelques-unes.

— Les §§ 6, 7 et (dans une moindre mesure) 8 ont fourni une collection assez structurée d'immeubles de Moufang de rang 1. On pourrait se demander si l'on est ainsi proche d'une classification complète de ces immeubles. Cela est bien improbable car, comme me l'a fait remarquer B. Mühlherr, tout groupe strictement deux fois transitif G de permutations d'un ensemble X définit de façon évidente un immeuble de Moufang de rang 1 de support X dans lequel le groupe des transvections de centre donné c est le stabilisateur de c dans G. Toutefois, il résulte d'un théorème bien connu de C. Hering, W. Kantor et G. Seitz [3] (voir aussi E. Shult [5]), que *tout immeuble de Moufang* fini *de rang 1 appartient à l'une des familles décrites aux §§ 6 et 8 ou bien est défini comme ci-dessus à partir d'un groupe strictement deux fois transitif.*

— J'ignore quel est l'état actuel de la classification des groupes strictement deux fois transitifs. On connaît depuis longtemps tous les groupes finis ayant cette propriété [22] et ceux qui sont localement compacts non discrets [6] ; le cours a donné un procédé de construction plus général de tels groupes, englobant ces deux cas-là.

— Un problème intéressant concernant les immeubles de Moufang de rang 1, ou certaines classes particulières de tels immeubles, est la recherche de définitions « purement combinatoires », consistant par exemple en la donnée d'un système de parties distinguées dans un ensemble (sur le modèle de la « théorie des ombres » dans les immeubles de dimension supérieure : cf. [9], § 12). Un résultat allant dans cette direction a été exposé dans un cours précédent (voir [20], section B).

— Les sujets évoqués ici sont étroitement liés à des questions de théorie des groupes qui ont fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années. Je n'ai pas essayé d'en rendre compte dans ces leçons ni même de faire les recherches bibliographiques nécessaires, mais il me paraît approprié d'indiquer ici que les travaux récents de F. Timmesfeld et son école sont une source indispensable à qui souhaiterait approfondir ces problèmes.

Références

[1] A. Borel et J. Tits, *Groupes réductifs (Publ. Math. IHES.* **27** (1965) 55-151).

[2] F. BRUHAT et J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées (Publ. Math. IHES* **41** (1972) 5-251).

[3] C. HERING, W. KANTOR and G. SEITZ, *Finite groups with a split BN-pair of rank 1,* I (*Journal of Algebra* **20** (1972) 435-475).

[4] B. MÜHLHERR and H. VAN MALDEGHEM, *Exceptional Moufang quadrangles of type F_4 (Canad. J. Math.* **51** (1999) 347-371).

[5] E. SHULT, *On a class of doubly transitive groups (Illinois J. Math.* **16** (1972) 434-455).

[6] J. TITS, *Sur les groupes doublement transitifs continus : Corrections et compléments (Comment. Math. Helv.* **30** (1956) 234-240).

[7] —, *Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes (Coll. d'Algèbre Supérieure du CBRM,* Bruxelles, 1956, 261-289).

[8] —, *Classification of algebraic semi-simple groups (Proc. Symp. Pure Math.* **9** (1966) 33-62).

[9] —, *Buildings of spherical types and finite BN-pairs (Springer Lecture Notes in Math.* **386** (1974)).

[10] —, *Classification of buildings of spherical types and Moufang polygons : a survey (Atti Coll. Internat. Teorie Combin.,* Accad dei Lincei, Rome, 1975, vol. 1, 229-246).

[11] —, *Buildings and Buekenhout geometries (Finite simple groups II, ed. M.J. Collins,* Academic Press, 1980, 303-320).

[12] —, *A local approach to buildings (The Coxeter Festschrift,* Springer-Verlag, 1981, 519-547).

[13] —, *Moufang octagons and the Ree groups of type $^2F_4$ (Amer. J. Math.* **105** (1983) 539-594).

[14] —, *Résumé de cours (Annuaire du Collège de France,* 88^e année, 1987-1988, pp. 85-100).

[15] —, *Résumé de cours (Annuaire du Collège de France,* 89^e année, 1988-1989, pp. 81-95).

[16] —, *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups (J. Algebra,* **131** (1990) 648-677).

[17] —, *Résumé de cours (Annuaire du Collège de France,* 90^e année, 1989-1990, pp. 87-103).

[18] —, *Twin buildings and groups of Kac-Moody type (Groups, Combinatorics and Geometry, London Math. Soc. Lecture Notes Series,* **165** (1992) 249-286).

[19] —, *Résumé de cours (Annuaire du Collège de France,* 95^e année, 1994-1995, pp. 79-95).

[20] —, *Résumé de cours (Annuaire du Collège de France,* 97e année, 1996-1997, pp. 89-102).

[21] J. TITS et R. WEISS, *The classification of Moufang polygons,* à paraître.

[22] H. ZASSENHAUS, *Über endliche Fastkörper (Abhandlungen Math. Sem. Hamburg,* **11** (1936) 187-220).

J. T.

SÉMINAIRE

Quatre heures d'exposés ont été consacrées par J. Tits à *Quelques remarques sur le Monstre de Fischer-Griess et certains sous-groupes.*

MISSIONS

Exposés :

— *Bäume mit diskreten Automorphismengruppen,* Würzburg, novembre 1999.

— *Introduction à la théorie des immeubles,* Amiens, décembre 1999.

— *Espaces et nombres,* « Université de tous les savoirs », Mission 2000 en France, juin 2000.

PUBLICATIONS

— J. TITS, *Symmetry (Monthly of the Math. Amer. Assoc.,* **107** (2000) 454-461) ; traduction par J. Stillwell de l'article *Symmetrie (Miscellanea Mathematica,* Springer Verlag, 1991, pp. 293-304).

— H. BASS and J. TITS, *Discreteness criteria for tree automorphism groups* (appendice à *Tree Lattices,* par H. Bass et A. Lubotzky, Birkhäuser Boston, 2000, pp. 185-212).