Physique corpusculaire

M. Marcel FROISSART, professeur

COURS : *Les trous noirs*

1. La relativité générale

Elle est justifiée par :

— L'équivalence masse gravitationnelle-énergie.

— Le rayonnement électromagnétique, réel ou virtuel, est donc soumis à la gravitation.

— La relativité restreinte fondée sur la constance de la vitesse de la lumière dans le vide.

— En présence de gravitation, ces comparaisons vont être perturbées.

— L'idée d'Einstein est d'utiliser ces perturbations pour rendre la gravitation universelle, en l'attribuant non aux phénomènes, mais à l'espace où ils ont lieu.

— L'espace-temps est une « variété pseudo-riemannienne » de forme définie par les masses : en l'absence d'autre force, les objets y décrivent une géodésique.

1.1. La géométrie riemannienne

La géométrie riemannienne opère sur des « variétés », définies par des cartes, isomorphismes entre ouverts de la variété et ouverts d'un espace-type. Ces cartes recouvrent toute la variété, et une bijection entre cartes est définie à leur intersection.

L'adjectif « riemannien » ajoute le fait que l'on se donne sur la variété le carré d'une distance infinitésimale, conventionnellement appelée ds^2, qui donne au premier ordre le carré de la distance de deux points comme forme quadratique non-dégénérée de l'écart de leurs coordonnées, forme caractérisée par un « tenseur métrique ». Les coefficients de cette forme varient d'un point à l'autre, tout en respectant les correspondances entre cartes.

La signature est le nombre de valeurs propres positives et négatives du ds^2, la somme étant la dimension de la variété. On utilisera 1,3.

1.1.1. Vecteurs contravariants et vecteurs covariants

On définit des vecteurs, en un point. Il existe une dualité naturelle, définie par exemple par le gradient d'une fonction :

On écrit $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^a} dx^a = (\nabla\varphi)_a \, dx^a = \varphi_{,a} dx^a$ avec plusieurs notations.

— Par changement de base, l'indice a de dx^a se transforme inversement de celui de $\varphi_{,a}$ Ce dernier est dit covariant et écrit en bas, le premier contravariant et écrit en haut.

— Dans un produit un même indice écrit en haut et en bas, est implicitement sommé.

En conséquence, le ds^2, forme du second degré en dx^a, s'écrit $ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$

La partie antisymétrique donnant une contribution nulle, on définit g comme symétrique.

On définit le tenseur métrique contravariant, inverse du tenseur canonique : $g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$.

La symétrie de g_{ab} fait que g^{ab} l'est également.

On utilise ces deux tenseurs pour transformer la variance d'un indice.

1.1.2. Transport parallèle

Il faut définir la comparaison de vecteurs en des points différents de la variété, par exemple le long d'une courbe.

Ceci se fait avec une matrice spéciale, la connexion :

Le gradient des composantes d'un vecteur sera affecté par la variation du vecteur lui-même, et par celle du système de coordonnées. On peut donc écrire en général : $\upsilon^a_{,b} = \upsilon^a_{;b} + \Gamma^{\ a}_{c\ b} \upsilon^c$ la virgule note ici la simple dérivation, la matrice Γ appelée connexion, exprimant la variation de la base de coordonnées dans la direction $b.\upsilon^a_{;b}$ est un tenseur par rapport à ses deux indices, et nous l'appellerons « dérivée covariante », notée avec un « ; ».

$$\upsilon^a_{;b} = \upsilon^a_{,b} - \Gamma^{\ a}_{c\ b} \upsilon^c$$

La dérivée covariante d'une fonction scalaire est la dérivée ordinaire et la dérivation covariante d'un produit suit la formule habituelle, donc : $u_{a;b} = u_{a,b} - \Gamma^{\ c}_{a\ b} u_c$

Pour la dérivation covariante de tenseurs à plusieurs indices, il faut inclure un terme de connexion pour chaque indice.

1.2. Détermination de la connexion

1. Torsion nulle

le gradient d'une fonction scalaire est déjà une dérivée covariante.

$$\varphi_{;a;b} - \varphi_{;b;a} = [\Gamma^{c}_{a\,b} - \Gamma^{c}_{b\,a}]\varphi_{;c}$$

est un tenseur, $\Gamma^{c}_{a\,b} - \Gamma^{c}_{b\,a}$ est donc un tenseur, que l'on appelle tenseur de torsion. Nous souhaitons une torsion nulle, ce qui implique la symétrie de Γ.

2. Transport parallèle de la métrique

La métrique est une propriété intrinsèque de l'espace. Elle doit donc se transporter parallèlement à elle-même,

$$g_{ab;c} = g_{ab,c} + \Gamma^{d}_{a\,c}\, g_{db} + \Gamma^{d}_{b\,c}\, g_{ad} = 0$$

$\Gamma^{d}_{a\,c}\, g_{db} = \Gamma_{abc} = \Gamma_{cba}$.

L'équation précédente prend donc la forme : $g_{ab,c} + \Gamma_{abc} + \Gamma_{bac} = 0$

3. Calcul de la connexion

Ces relations et leurs permutations, permettent de déterminer complètement la connexion :

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(-\, g_{ab,c} + g_{ac,b} - g_{bc,a})$$

2. Le tenseur de courbure

2.1. Définition

Pour une fonction scalaire, la dérivation seconde covariante n'est commutative que par le choix d'une torsion nulle. Pour un champ de vecteurs, les dérivations covariantes successives ne commutent pas. Le résidu, inévitable, est défini par le tenseur de courbure :

$$u_{a;cd} - u_{a;dc} = R^{b}_{a\ cd}\, u_b$$

$$R_{abcd} = \Gamma_{abc,d} - \Gamma_{abd,c} + g^{ef}\Gamma_{aec}\Gamma_{fbd} - g^{ef}\Gamma_{aed}\Gamma_{bfc}$$

2.2. Symétries du tenseur de courbure

Par définition

$$R_{abcd} = -\, R_{abdc}$$

Par application sur g_{ab}, on a :

$$g_{ab;cd} - P_{cd} = 0 \text{ soit } R^{e}_{a\ cd}\, g_{eb} + R^{e}_{b\ cd}\, g_{ae} = R_{abcd} + R_{bacd} = 0$$

En outre, le calcul explicite donne $R_{abcd} = R_{cdab}$

De plus, soit f une fonction scalaire quelconque ; antisymétrisons les dérivées covariantes troisièmes :

$$0 = (f_{;ac} - f_{;ca})_{;d} + (f_{;cd} - f_{;dc})_{;a} + (f_{;da} - f_{;ad})_{;c} = [R^{b}_{a\ cd} + R^{b}_{c\ da} + R^{b}_{d\ ac}]f_{;b} = 0$$

Or $f_{;b}$ est quelconque, donc on a l'identité cyclique

$$R^{b}_{a\ cd} + R^{b}_{c\ da} + R^{b}_{d\ ac} = 0$$

R_{abcd} est une représentation du groupe des permutations du type $\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline\end{array}$;

le type $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} d & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ étant exclu en vertu de la dernière relation.

Les composantes indépendantes sont du type : $ab - bc - ad + cd$ et $ab - bd - ac + cd$

Elles ne diffèrent que pour 4 indices différents. Autrement, il n'y a qu'un seul élément indépendant.

Compte tenu des symétries binaires, R a 21 composantes, et 20 seulement avec la symétrie cyclique.

2.3. Le tenseur de Ricci

Par contraction sur les indices du tenseur de courbure, on obtient le tenseur de Ricci. Explicitement :

$$R_{ab} = g^{cd} R_{acbd}$$

D'après la symétrie du tenseur de courbure, $R_{ac} = R_{ca}$.

2.4. Identités de Bianchi

En regroupant différemment les termes de la permutation entièrement antisymétrique sur les dérivées covariantes troisièmes d'un vecteur on aboutit à

$$R_{abcd;e} + R_{abde;c} + R_{abec;d} = 0$$

Ce sont les identités de Bianchi.

Application au tenseur de Ricci

Par contraction sur les indices (be) dans

$$R_{abcd;e} + R_{abde;c} + R_{abec;d} = 0$$

on obtient $g^{be}R_{abcd;e} + R_{ad;c} - R_{ac;d} = 0$. En contractant sur ($ac$), on obtient : $g^{be}R_{bd;e} + g^{ac} R_{ad;c} - R_{;d} = 0$ où R désigne le tenseur de Ricci complètement contracté : $R = g^{ab}R_{ab}$.

Donc $- R_{;a} + 2R^{b}_{\ a;b} = 0$

$$\left[R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R\right]_{;b} = 0$$

Cette identité est fondamentale pour la construction des équations de la relativité générale.

2.5. Accélération relative de deux points voisins

Un point dans l'univers, soumis uniquement à la « gravitation », tombe en chute libre. Son accélération est nulle. Nous pouvons comparer deux points voisins, au repos relatif initialement, et étudier leur vitesse relative, donc leur accélération relative, et le gradient de la gravitation.

Soit un point A avec une trajectoire d'univers de vecteur tangent u.

Déplaçons parallèlement u vers un point voisin B, en vue de mesurer le gradient de l'accélération.

Posons $B^a = A^a + \varepsilon^a$ La vitesse du point B a été soigneusement transportée parallèlement. Elle satisfait donc sur l'intervalle ε :

$$u(B)^a = u(A)^a + u(A)^a_{;b}\varepsilon^b$$

Au bout d'un temps court t, nos points A et B vont se retrouver en A' et B' avec des vitesses données respectivement par :

$$u(A')^a = u(A)^a + u(A)^a_{;c}tu^c$$

$$u(B')^a = u(B)^a + u(B)^a_{;c}\,tu^c = u(A)^a + u(A)^a_{;b}\varepsilon^b + u(A)^a_{;c}\,tu^c + u(A)^a_{;bc}\,\varepsilon^b tu^c$$

Enfin, transportons parallèlement la vitesse ainsi obtenue de A' en A'' de la quantité ε :

$$u(A'') = u(A') + u(A')^a_{;b}\varepsilon^b = u(A)^a + u(A)^a_{;c}\,tu^c + u(A)^a_{;b}\varepsilon^b + u(A)^a_{;cb}\,tu^c\varepsilon^b$$

La comparaison entre la vitesse obtenue en B' et celle obtenue en A'' donne la vitesse relative due à la variation de la gravitation dans la direction ε :

$$\text{vit.rel.} = u(B')^a - u(A'')^a = u^a_{;cb}\,tu^c\varepsilon^b - tu^c u^a_{;bc}\varepsilon^b = R_d{}^a{}_{bc}u^d tu^c\varepsilon^b$$

Les vecteurs ayant été transportés parallèlement, les dérivées covariantes premières ont été éliminées, et il reste, après division par t et par ε, le gradient de l'accélération,

$$\nabla_b\,\text{acc.}^a = R_d{}^a{}_{bc}u^d u^c$$

2.6. Equation d'Einstein

Dans le système solaire, la matière est non-relativiste par rapport au système du centre de gravité, caractérisé par un vecteur unitaire u^a. Elle subit une accélération gravitationnelle $\vec{g}$, qui selon la loi de Newton, satisfait à la condition :

$$\text{div}\ \vec{g} = -\ 4\pi G\rho = -\ 4\pi G u^a u^b T_{ab}$$

où T est le tenseur de densité d'énergie-impulsion, dominé par sa composante $T_{00} = \rho$, la densité locale.

La condition de conservation de l'énergie s'écrit :

$$T^{ab}_{;b} = 0 \tag{1}$$

La divergence de l'accélération est

$$R^{i}_{c\ id} u^c u^d = R_{cd} u^c u^d$$

où R_{cd} est le tenseur de Ricci.

Nous aurions donc comme modèle une équation reliant proportionnellement R^{ab} et T.

Cependant, R ne satisfait pas l'éq. (1), et il faut prendre, plutôt que R, le tenseur $Q^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R^c_c$ qui satisfait une équation analogue, du fait des identités de Bianchi contractées.

Recherchons donc une proportionnalité de la forme $Q^{ab} = xT^{ab}$.

Le terme dominant de T étant $T_{00} = \rho$, nous avons de ce fait un seul terme dominant dans Q, qui est $Q_{00} = xT_{00}$

Or les tenseurs contractés $Q^c_c = -R^c_c$. On exprime donc R^c_c à partir de Q^c_c par

$$R_{ab} = Q_{ab} + \frac{1}{2} g_{ab} R^c_c = Q_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} Q^c_c$$

Comme Q_{ab} n'a que le terme dominant Q_{00}, il vient que

$$R_{00} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = \frac{1}{2} Q_{00} = 4\pi G T_{00}$$

Pour finir, l'équation prend la forme, essentiellement unique :

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R^c_c = Q_{ab} = 8\pi G T_{ab}$$

Cette équation s'appelle équation d'Einstein.

On peut rajouter à l'équation d'Einstein, et il a été le premier à le faire, un terme de la forme λg^{ab} qui se comporte comme une densité d'énergie constante, et avec des composantes d'espace négatives, qui correspondent à une pression négative.

$$R^{ab} - \frac{1}{2} R^c_c g^{ab} = 8\pi G T^{ab} + \lambda g^{ab}$$

λ doit être une constante, pour rester cohérent. On l'appelle constante cosmologique, et les mesures récentes semblent montrer qu'elle est non-nulle. Ses effets ne se font sentir qu'à longue distance.

3. Equations de Schwarzschild

3.1. Eléments de base

On considère une métrique indépendante du temps et invariante par rotation sphérique. Soit r la variable définissant sur chaque sphère l'élément de distance par $r^2d\theta^2 + r^2sin^2\,\theta d\varphi^2$. L'élément de distance dans l'espace à 4 dimensions est donc

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sin^2\,\theta d\varphi^2$$

Désignons par « ' » la dérivation par rapport à r.

On en déduit les éléments de la connexion, puis ceux du tenseur de courbure et ceux du tenseur de Ricci :

$$R_{tt} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'^2}{4AB} + \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{A'}{rB} \qquad R_{rr} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'^2}{4A^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{B'}{rB}$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{A'r}{2AB} - \frac{rB'}{2B^2} + \frac{1}{B} - 1 \qquad R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta\left[\frac{A'r}{2AB} - \frac{rB'}{2B^2} + \frac{1}{B} - 1\right] = \sin^2\theta R_{\theta\theta}$$

Le tenseur conservé $Q_{ab} = R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab}$ est donné par :

$$Q_{tt} = -\frac{AB'}{rB^2} + \frac{A}{r^2B} - \frac{A}{r^2} = \frac{-A}{r^2B^2}(rB' - B + B^2) = 0$$

$$Q_{rr} = -\frac{A'}{rA} - \frac{1}{r^2} + \frac{B}{r^2} = -\frac{1}{r^2A}(rA' + A - AB) = 0$$

$$Q_{\theta\theta} = -\frac{A''r^2}{2AB} + \frac{A'^2r^2}{4A^2B} + \frac{A'B'r^2}{4AB^2} - \frac{rA'}{2AB} + \frac{rB'}{2B^2} = 0$$

$$Q_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta Q_{\theta\theta} = 0$$

Ces équations s'appliquent dans le vide extérieur à tout corps de symétrie sphérique. Elles ne sont pas valables pour l'intérieur du corps.

3.2. Interprétation d'une géométrie presque newtonienne

A l'infini, nous voyons que nous allons tendre vers une géométrie voisine de celle de la relativité restreinte, avec de légères corrections. Comment interpréter ces corrections ?

La façon la plus directe est d'assimiler le Lagrangien du corps d'épreuve à un multiple de sa trajectoire d'Univers, puisque les équations du mouvement dérivent d'un principe de stationnarité de l'un comme de l'autre.

On pose donc $\mathscr{L} = a\frac{ds}{dt} = a\dot{s}$. L'énergie est

$$\mathscr{H} = \dot{x}_i \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}_i} - \mathscr{L}$$

$\dot{s} = \sqrt{A - B\dot{\vec{x}}^2}$, l'énergie est

$$\mathscr{H} \sim -a\frac{B\dot{\vec{x}}^2}{\sqrt{A}} - a - \frac{a}{2}(A - B\dot{\vec{x}}^2 - 1) \sim -a - a\frac{B\dot{\vec{x}}^2}{2} - \frac{a(A-1)}{2}$$

On reconnaît dans cette expression la masse du corps d'épreuve $\boxed{a = -m}$, son énergie cinétique $m\dot{x}^2/2$ et son potentiel gravitationnel newtonien, proportionnel à sa masse, $\boxed{U = m(A - 1)/2}$.

3.3. Solution de Schwarzschild

La solution dans le vide, $Q = 0$, est donnée par :

$$\frac{B'}{B - B^2} = B'\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{B - 1}\right) = \frac{1}{r} \quad ; \quad B = \frac{kr}{kr - 1}$$

$$rA' + A - A\,\frac{kr}{kr - 1} = 0 \quad ; \quad A = k'\,\frac{kr - 1}{r}$$

Comme on souhaite par exemple avoir un espace de Minkowski à l'infini, on va prendre les coordonnées les plus simples. B tend vers l'unité, tandis que $A \to k'k + \mathcal{O}(\frac{k'}{r})$. Pour que $A \to 1$ à l'infini, on choisit $kk' = 1$.

D'après ce qui précède, la valeur de k' est liée au potentiel central gravifique en sorte que $-k'/r = 2U = -2MG/r$, où M représente la masse gravifique de l'objet central, et G est comme toujours la constante de Newton.

Donc :

$$A = 1 - 2MG/r \quad ; \quad B = \frac{1}{1 - 2MG/r}$$

C'est la solution de Schwarzschild au problème de la gravitation statique à symétrie sphérique.

3.4. La « singularité » de Schwarzschild

Comme on peut le constater ci-dessus, la solution de Schwarzschild est singulière pour $r = 2MG$. Cette singularitéest-elle due au choix des coordonnées ou à la structure de l'espace ?

Kruskal a le premier mis en évidence une paramétrisation permettant de voir clairement ce qui se passe au voisinage du « rayon de Schwarzschild » $2MG$. La méthode consiste à chercher des caractéristiques de l'équation des ondes, ou des rayons de genre lumière, caractérisés par la forme $du^2 - dv^2 = d(u + v)d(u - v) = 0$ et on va utiliser u et v comme coordonnées.

Soit donc à résoudre :

$$\sqrt{A(r)dt} \pm \sqrt{B(r)dr} = 0$$

A deux constantes d'intégration près,

$$t \pm r \pm 2MG\ln(r - 2MG) = u \pm v \qquad ds^2 = \frac{r - 2MG}{r}(du^2 - dv^2) - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\varphi^2$$

Posons

$$x = f(r)\text{ ch } at \quad ; \quad y = f(r)\text{ sh } at$$

Une solution approchée est

$$f(r) = e^{ar} (r - 2MG)^{2MGa} \sim \sqrt{\frac{r - 2MG}{r}}$$

Comme nous voulons ici en priorité éliminer la « singularité » à $r = 2MG$, peu importe que cette égalité ne soit pas satisfaite à distance de ce point. Avec $a = 1/4MG$, nous avons la transformation suivante :

$$x = e^{r/4MG} \sqrt{r - 2MG} \text{ ch } at \qquad y = e^{r/4MG}\sqrt{r - 2MG} \text{ sh } at$$

Les rayons lumineux radiaux sont bien donnés par $y \pm x = \text{Cte}$. On voit sur cette expression que dans le système de coordonnées (x,y), il n'y a aucune singularité à $r = 2MG$.

Comme $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$, le calcul de (r, t) n'est possible que dans un quadrant du plan (x,y). D'où la « singularité » du ds^2 de Schwarzschild à $r = 2MG$, soit $x^2 - y^2 = 0$ qui limite ce quadrant.

On peut étendre l'espace solution de l'équation de Schwarzschild à toutes les valeurs de (x,y) correspondant à $r > 0$.

3.5. La singularité à $r = 0$

Au bord $r = 0$ de cette hyperbole l'espace de Schwarzschild est singulier. En effet, on peut calculer le scalaire suivant :

$$R_1 = R_{abcd}R^{abcd}$$

On obtient une somme de termes tous positifs et singuliers en r^{-6} quand ils sont non-nuls.

$R_1 \sim 48M^2G^2/r^6$ est hautement singulier à $r = 0$. Ceci ne dépend pas du choix des coordonnées, puisque R_1 est un scalaire. Donc il est impossible de poursuivre l'extension de la solution de Schwarzschild au-delà de l'hyperbole $r = 0$ du plan (x,y).

4. Les horizons de Schwarzschild

Nous avons prolongé la solution de Schwarzschild dans le plan (x,y) jusqu'à $r = 0$, mais l'interprétation physique de ce prolongement pose un problème. Un rayon lumineux incident $r = -(t - t_0)$, de paramètre d'impact suffisamment petit, va venir toucher la surface $r = 2MG$, pour $y > 0$, c'est-à-dire $\frac{y}{x} = +1$, soit $\text{Argth } \frac{y}{x} = \frac{t}{4MG} = +\infty$. En outre, aucun rayon ne peut sortir de cette branche de l'horizon. Symétriquement, les rayons sortants $r = +(t - t_0)$ sont sortis de l'horizon à $y < 0$, c'est à dire à $t = -\infty$. On appelle parfois un système muni d'un horizon futur, correspondant à $t = +\infty$ un « trou noir », parce que rien ne peut en sortir, tandis qu'un système muni d'un horizon à $y < 0$; $t \rightarrow -\infty$ est appelé un

« trou blanc » car rien ne peut y rentrer, et ce qui en sort est sorti avant notre temps.

On doit se demander quelle est la topologie de l'espace qui prolonge le nôtre au-delà de l'horizon.

Chaque point dans l'espace (x,y) représente une 2-sphère, paramétrée par θ et φ, de rayon non-nul puisque $r > 0$. Un rayon lumineux envoyé sur le trou noir, codé pour transmettre de l'information arrivera dans ce cas dans la partie $x + y > 0$. Inversement, il pourrait se faire que nous recevions de l'information de la partie trou blanc, soit $x - y > 0$. Mais dans aucun cas, nous ne pouvons recevoir ou transmettre de l'information dans le quadrant opposé au nôtre $x < -|y|$. Ce quadrant représente pourtant un monde semblable au nôtre $x > |y|$, et asymptotiquement aussi pseudo-euclidien que le nôtre. Quel est ce monde ?

On a énoncé l'hypothèse qu'il se trouvait dans un univers parallèle, raccordé au nôtre par les parties au-delà des horizons. Il resterait encore à préciser dans quel sens ils se raccordent.

Une variante sur cette hypothèse est que l'univers parallèle en question est une partie du nôtre, située n'importe où, et dans n'importe quel sens du temps. On appelle cela un trou de ver (*wormhole*) à travers l'univers.

Néanmoins, toute matière tombant dans l'emprise d'un trou noir est inexorablement guidée par le $ds^2 = 16M^2G^2/re^{-r/2MG}(dy^2 - dx^2) > 0$ vers la singularité à $r = 0$ en un temps propre de l'ordre de quelques MG/c (voir 6.1).

5. Utilisation des symétries de l'espace

5.1. Formes de Killing

Comment caractérise-t-on le fait que l'espace-temps jouit d'un ensemble de symétries (translation par rapport à t, symétrie orthogonale autour du centre de masse) ?

Ceci doit pouvoir se traduire par une propriété de la métrique, puisqu'elle définit l'espace.

On veut qu'une transformation des coordonnées $y = y(x)$ laisse invariante la métrique.

$$g_{ab}(x) = g_{cd}(y)\,\frac{\partial y^c}{\partial x^a}\,\frac{\partial y^d}{\partial x^b}$$

Il est plus facile de travailler avec une transformation infinitésimale

$$y^a = x^a + \varepsilon\xi^a$$

On peut alors faire un développement limité au premier ordre en ε :

$$g_{cd}(x + \varepsilon\xi)\,\frac{\partial x^c + \varepsilon\xi^c}{\partial x^a}\,\frac{\partial x^d + \varepsilon\xi^d}{\partial x^b} = g_{ab}(x)$$

$$g_{ab}(x) + \varepsilon\,(g_{ab,e}\xi^e + g_{ad}\xi^d{}_{,b} + \xi^c{}_{,a}g_{bc}) = g_{ab}(x)$$

$$g_{ab,e}\xi^e + g_{ad}\xi^d{}_{,b} + \xi^c{}_{,a}g_{bc} = 0$$

En remarquant que l'on peut écrire $g_{ab,e} = -\,\Gamma_{eab} - \Gamma_{eba}$, on peut écrire ceci

$$-\,\Gamma_{eab}\xi^e + g_{ad}\xi^d{}_{,b} - \Gamma_{eba}\,\xi^e + \xi^c{}_{,a}g_{bc} = 0$$

$$g_{ad}\xi^d{}_{;b} + \xi^c{}_{;a}g_{bc} = \xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0$$

Cette dernière forme est une écriture compacte pour que le champ de vecteurs ξ soit le générateur d'une invariance de l'espace.

Un tel champ de vecteurs s'appelle champ (ou forme) de *Killing*.

5.2. Propriétés de la forme de Killing

Cette équation permet de calculer — en principe — le champ ξ dans tout l'espace à partir de sa valeur et de celle de ses dérivées covariantes en un seul point. Formons la combinaison totalement antisymétrique des dérivées secondes :

$$S = \xi_{a;bc} - \xi_{a;cb} + \xi_{b;ca} - \xi_{b;ac} + \xi_{c;ab} - \xi_{c;ba} = (R^d_{a\ bc} - R^d_{b\ ca} + R^d_{c\ ab})\xi_d = 0$$

$$S = 0 = \xi_{a;bc} - \xi_{b;ac} - \xi_{a;cb} + \xi_{c;ab} + \xi_{b;ca} - \xi_{c;ba}$$

$$\xi_{a;bc} = (2\xi_{c;ba} - 2\xi_{c;ab})/2 = R^d_{c\ ba}\xi_d$$

On peut calculer la dérivée seconde covariante de ξ à partir de la valeur de ξ. On pourra ainsi calculer les dérivées covariantes successives, à partir des valeurs de ξ et de ses dérivées premières. Sous réserve de sommabilité, le développement de Taylor définira ξ dans un voisinage.

5.3. Symétries et lois de conservation

Voyons l'équivalent relativiste du théorème de Noether.

Transposant le formalisme de Lagrange, en assimilant le principe de moindre action à celui de moindre longueur, qui définit la géodésique, trajectoire d'espace-temps du corps d'épreuve :

La variable temps est inadaptée pour la traversée de l'horizon, et si la masse de l'objet est nulle, le temps propre n'est pas défini.

Pour sortir de cette aporie, utilisons une variable τ pour paramétrer la trajectoire, proportionnelle au temps propre pour des trajectoires de genre temps, et passant à la limite pour des trajectoires de genre lumière. La principale propriété que nous lui demanderons est l'homogénéité tout au long de la trajectoire.

L'équation d'une géodésique peut être écrite comme des équations de Lagrange, quel que soit le paramètre τ qui paramétrise la trajectoire. Nous désignons par un « $\dot{}$ » la dérivation *par rapport à* τ. La longueur de la géodésique est alors :

$$\int \dot{s}\, d\tau = \int \sqrt{g_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c}\, d\tau$$

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial x^a} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{x}^a}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2\dot{s}}\, g_{bc,a}\dot{x}^b\dot{x}^c - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\dot{s}}\, g_{ab}\dot{x}^b\right) = 0$$

Posons $\dot{s}$ = Cte arbitraire et multiplions les deux membres par $\dot{s}$:

$$\frac{1}{2}\, g_{bc,a}\dot{x}^b\dot{x}^c - \frac{d}{d\tau}\,(g_{ab}\dot{x}^b) = 0 = \frac{1}{2}\, g_{bc,a}\dot{x}^b\dot{x}^c - g_{ab,c}\dot{x}^b\dot{x}^c - g_{ab}\ddot{x}^b$$

$$\ddot{x}^a = \Gamma_{b\ c}^{\ a}\dot{x}^b\dot{x}^c$$

Le vecteur tangent à la trajectoire $\dot{x}^a$ se transporte parallèlement à lui-même, ce qui caractérise l'homogénéité de la paramétrisation de la trajectoire.

Si une symétrie est caractérisée par un vecteur de Killing ξ, calculons la variation de l'expression suivante :

$$X = \xi_a\dot{x}^a$$

$$\dot{X} = \dot{\xi}_a\dot{x}^a + \xi_a\ddot{x}^a = \xi_{a,c}\dot{x}^c\dot{x}^a + \xi_a\Gamma_{c\ b}^{\ a}\dot{x}^b\dot{x}^c = \xi_{a;c}\dot{x}^c\dot{x}^a = 0$$

La quantité $X = \xi_a\dot{x}^a$ reste constante tout au long de la trajectoire.

5.4. Equations du mouvement en chute libre dans un champ statique

Désignons par champ statique un champ pour lequel il existe une paramétrisation avec une coordonnée t n'intervenant pas explicitement dans le ds^2, supposé pair en dt. Les autres coordonnées sont désignées par x_i.

Il existe un vecteur de Killing ξ_t, qui est le générateur d'une translation le long de t : $\xi_t^a = \delta_0^a$

L'existence du vecteur de Killing ξ_t implique l'existence d'une intégrale première le long des trajectoires.

$$h = \xi_{t\ a}\dot{x}^a = g_{00}\dot{x}^0 = g_{00}\frac{dt}{d\tau} \qquad (2)$$

6. Champ de Schwarzschild

6.1. Chute le long d'un rayon

Il n'y a en fait que deux variables : t et r, avec $ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2$. Connaissant les termes du tenseur de connexion, nous avons les équations du mouvement :

$$\ddot{r} = \frac{-MG(r - 2MG)}{r^3}\dot{t}^2 + \frac{MG}{r(r - 2MG)}\dot{r}^2 \quad ; \quad \ddot{t} = \frac{-2MG}{r(r - 2MG)}\dot{t}\dot{r}$$

avec la constante du mouvement

$$h = \frac{r - 2MG}{r}\dot{t}$$

La solution pour $\dot{t}$ est donnée par la constante du mouvement h.

L'équation en r est plus complexe. Nous y substituons h et utilisons la variable auxiliaire $u = \dot{r}$; ($\ddot{r} = u\, du/dr$).

$$u\, du = \frac{MG}{r(r - 2MG)}(u^2 - h^2)\, dr$$

$$\dot{r}^2 = h^2 + C\frac{r - 2MG}{r}$$

Ceci ressemble tout à fait à la formule newtonienne, avec un terme d'énergie cinétique, et un terme potentiel en $1/r$. Cela étant, c'en est fort éloigné, car le paramètre τ n'a rien à voir avec le temps, si ce n'est peut-être asymptotiquement.

Pour faire le calcul qui suit, supposons que le corps d'épreuve est un corps de masse non nulle, et ajustons les constantes pour que $\dot{s} = 1$. Il reste une constante disponible, qui définit le point où la vitesse radiale s'annule (apoastre).

Calculons le temps propre s mis par un corps lâché de l'apoastre à $r = R$ pour tomber sur la singularité $r = 0$.

$$s = \int_0^R dr\sqrt{\frac{rR}{2MG(R - r)}}$$

L'intégrale est classique. Le temps cherché est $s = \pi\sqrt{\frac{R^3}{8MG}}$

Pour un corps lâché juste à l'horizon, $R = 2MG$, le temps propre de chute entre l'horizon et la singularité est donc πMG. C'est le maximum du temps possible sur une orbite radiale entre l'horizon et la singularité à $r = 0$.

6.2. Utilisation de l'invariance

L'invariance par rotation d'espace du ds^2 de Schwarzschild constitue un groupe à 3 générateurs, avec les vecteurs de Killing correspondants, et les constantes du mouvement associées.

En fait, la partie d'espace de $-ds^2$ est la suivante :

$$B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\, \theta d\varphi^2$$

Une rotation infinitésimale est obtenue par

$$x_i \longrightarrow x_i + \alpha\varepsilon_{ijk}\omega_j x_k$$

où α est un paramètre infinitésimal, ε_{ijk} le symbole totalement antisymétrique en ses trois indices, et ω_j sont les trois coordonnées du générateur utilisé.

Le champ $\xi^i = \varepsilon^{ijk}\omega_j x_k$ est un vecteur de Killing. Il satisfait $\xi_{i,m} = \varepsilon^{ijm} = -\ \xi_{m,i}$.

Nous allons retrouver les trois constantes du mouvement par

$$j_i = \varepsilon_{ijk}x_j\dot{x}_k$$

L'élimination de r entre j_1 et j_2 puis de $\dot{\theta}$ entre j_2 et j_3 donne

$$j_1x_1 + j_2x_2 + j_3x_3 = r[\cos\theta(j_1\cos\varphi + j_2\sin\varphi) + j_3\sin\theta] = 0$$

L'invariance sphérique d'espace implique que les orbites d'un corps d'épreuve sont planes.

6.3. Orbites arbitraires

Nous choisissons pour plan de l'orbite le plan équatorial $\theta = \pi/2$ et on n'a qu'une variable φ à prendre en compte en plus de r et t.

La quantité conservée, outre $j_1 = j_2 = 0$, est

$$j_3 = r^2\sin\theta\dot{\varphi} = r^2\dot{\varphi} = j$$

et nous avons celle qui correspond à l'invariance par translation dans le temps :

$$h = \xi_{t\ a}\dot{x}^a = g_{00}\dot{t} = \frac{r - 2MG}{r}\dot{t}$$

Ceci aide à résoudre les 3 équations du mouvement. Il ne reste à intégrer que l'équation sur r

$$\ddot{r} = \Gamma^r_{t\,t}\dot{t}^2 + \Gamma^r_{r\,r}\dot{r}^2 + \Gamma^r_{\varphi\,\varphi}\dot{\varphi}^2 = -\frac{MGh^2}{r(r - 2MG)} + \frac{MG}{r(r - 2MG)}\dot{r}^2 + j^2\frac{r - 2MG}{r^4}$$

On prend comme variable intermédiaire $u = \dot{r}$, $\ddot{r} = u\ du/dr$. On a alors :

$$u\ du/dr = -\frac{MGh^2}{r(r - 2MG)} + \frac{MG}{r(r - 2MG)}u^2 + j^2\frac{r - 2MG}{r^4}$$

$$d\tau = dr\frac{r^2}{\sqrt{r[2h^2MGr^2 - j^2(r - 2MG) + Cr^2(r - 2MG)]}}$$

La discussion de ce résultat est plus délicate, compte tenu de ce qu'il y a maintenant 3 paramètres, 2 à un facteur multiplicatif arbitraire près, et que l'on devrait recourir aux fonctions elliptiques pour intégrer cette fonction.

6.3.1. Orbites ouvertes

Dans le cas $C > 0$, l'orbite peut aller à l'infini. Nous supposerons donc qu'elle en vient. Nous pouvons normaliser nos constantes du mouvement pour que τ et t soient asymptotiquement égaux pour $r \to \infty$, soit $h = 1$.

Dans ce cas, la vitesse à l'infini est $\upsilon = \lim_{r\to\infty} |\dot{r}| = \sqrt{C}$.

Le paramètre d'impact est donné par $\mathrm{tg}\varphi = b/r$, soit $(1 + \mathrm{tg}^2\varphi)\ \dot{\varphi} \sim \dot{\varphi} = -b\dot{r}/r^2$.

Or $r^2\dot{\varphi} = j = -b\dot{r} = bv = b\sqrt{C}$.

La discussion se résume maintenant à savoir si le polynôme en r donnant $(dr/d\tau)^2$ a un zéro ou non. Si oui, $dr/d\tau$ change de signe, et r repart en sens inverse : on a une orbite ouverte qui repart vers l'infini ; si non, l'intégrale se poursuit jusqu'à $r = 0$, comme pour $j = 0$.

Le polynôme dont la nullité décide de celle de $\dot{r}^2$ est :

$$P(r) = v^2r^2(r - 2MG) + 2MGr^2 - j^2(r - 2MG)$$

6.3.2. Sections efficaces de capture

On peut s'intéresser à deux limites : non-relativiste $v \ll c$, et ultra-relativiste $v \sim 1$, ce qui simplifie notablement les expressions.

Pour v négligeable, on a

$$P(r) = 2MGr^2 - j^2(r - 2MG) = 2MGr^2 - rj^2 + 2MGj^2$$

a une racine réelle pour $j^4 - 16M^2G^2j^2 \geq 0$, soit

$$j = bv \geq 4MG$$

La section efficace de capture est donnée pour les valeurs inférieures de b, soit

$$\sigma_{\text{capture}} = 32\pi \frac{M^2G^2}{v^2}$$

La valeur correspondante du périastre limite est donnée par le zéro de la dérivée $4MGr - j^2 = 0$, soit

$$r_{\text{péri}} \geq 4MG$$

Pour $v = 1$ (cas des photons), on a

$$r^3 - j^2r + 2MGj^2 = r^3 + pr + q$$

qui a ses trois racines réelles pour

$$-4\, j^6 + 108M^2G^2j^4 = 4j^4(27M^2G^2 - j^2) \leq 0$$

Comme $v = 1$, on peut identifier $j^2 = b^2 = 27M^2G^2$, ce qui donne pour

$$\sigma_{\text{capture}} = 54\pi\, M^2G^2$$

La valeur correspondante du périastre est à nouveau donnée par la racine de la dérivée du polynôme, $3r^2 - j^2 = 0$:

$$r_{\text{péri}} \geq 3MG$$

6.3.3. Déviation gravitationnelle

Si l'orbite n'est pas absorbée par le trou noir, elle ressort après avoir effectué un angle

$$\varphi = 2\int_{r0}^{\infty} d\varphi = 2\int_{r0}^{\infty} \left|\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\right| dr = 2\int_{r0}^{\infty} \frac{bv}{\sqrt{rP(r)}}\, dr$$

où r_0 est la plus grande racine de $P(r)$. Le calcul ne peut pas être effectué sans approximation.

Au premier ordre en MG :

$$r_0 = b - MG/\upsilon^2$$

La déviation gravitationnelle est

$$\alpha_{\upsilon\sim 0} = \varphi - \pi = 2MG(1 + \upsilon^2)/b\upsilon^2$$

Ceci n'est valable que pour des valeurs petites de $MG/b\upsilon^2$, raison du développement utilisé.

Le cas le plus facile est $\upsilon = 1$, où la formule donne tout simplement

$$\alpha_{\upsilon=1} = \frac{4MG}{b}$$

6.4. Orbite liée

On maîtrise mieux la géométrie de l'orbite en prenant comme paramètres indépendants, au lieu de j et C, le moment cinétique j et l'apoastre R, par la soustraction de

$$\dot{r}^2 = h^2\frac{2MG}{r} - j^2\frac{(r - 2MG)}{r^3} + C\frac{r - 2MG}{r}$$

et

$$0 = h^2\frac{2MG}{R} - j^2\frac{(R - 2MG)}{R^3} + C\frac{R - 2MG}{R}$$

et comme la normalisation de τ est de toute manière arbitraire, et que nous sommes maintenant dans le cas $C < 0$, on peut poser comme précédemment $h^2 - C = 1$. On a alors $\tau = t_\infty/h$, où t_∞ est le temps normalisé à $r \rightarrow \infty$.

$$\dot{r}^2 = (R - r)\left(\frac{2MG}{rR} - j^2\frac{rR(r + R) - 2MG(r^2 + rR + R^2)}{r^3R^3}\right) = \frac{R - r}{r^3R^3}P(r)$$

Comme $\dot{r}$ est réel, P doit rester positif, jusqu'à un point r_0 où il s'annule, et qui correspond au périastre. En particulier $P(R) \geq 0$:

$$P(R)/R^2 = MGR^2 - j^2[R - 3MG] > 0 \tag{3}$$

r_0 doit être réel :

$$j^2 > \frac{16M^2G^2R^2}{(R + 6MG)(R - 2MG)} \tag{4}$$

et être inférieur à R

$$P'(R) = 2R[+ 2MGR^2 - j^2(R - 2MG)] - R(R - 2MG)j^2 > 0$$

$$j^2 < \frac{4MGR^2}{3(R - 2MG)} \tag{5}$$

La compatibilité entre les équations (3), (4) et (5) n'existe que pour $R > 6MG$ dans une fourchette de j^2 donnée par

$$\frac{16M^2G^2R^2}{(R + 6MG)(R - 2MG)} \leq j^2 \leq \frac{MGR^2}{R - 3MG}$$

La limite supérieure correspond à $P(R) = 0$, c'est à dire que le périastre correspond à l'apoastre. C'est le cas d'une orbite circulaire.

A la limite $R = 6MG$, j^2 doit valoir exactement $12M^2 G^2$. C'est le cas de la plus petite valeur de l'apoastre, qui correspond à une orbite circulaire, appelée « la plus petite orbite stable ».

6.4.1. Orbite circulaire

L'orbite circulaire est obtenue pour la limite $P(R) = 0$,

$$j = R\sqrt{\frac{MG}{R - 3MG}}$$

avec $R > 6MG$

6.4.2. Précession du périastre

Choisissons une orbite légèrement excentrée, afin de pouvoir définir le périastre, soit j légèrement inférieur à la limite supérieure définissant l'orbite circulaire.

La solution de $P(r) = 0$ est r', voisin de R tout en lui étant inférieur. On peut alors approcher

$$P(r) \sim (r - r')P'(R) = (r - r')[\, 2R(2MGR^2 - j^2R + 2MG\, j^2) - (R - 2MG)\, j^2R]$$

$$\dot{r}^2 = MGR^{-3}(R - r)(r - r')\,\frac{R - 6MG}{R - 3MG}$$

La période en τ entre deux périastres est donc :

$$\tau_{\text{péri}} = 2\int d\tau = 2\int_{r'}^{R}\left(\frac{R^3(R - 3MG)}{MG(R - 6MG)(R - r)(r - r')}\right)^{1/2} dr = 2\pi R\sqrt{\frac{R(R - 3MG)}{MG(R - 6MG)}}$$

Par contre, la période angulaire de l'orbite est donnée par $j = r^2\dot{\varphi}$:

$$\tau_{\text{orb.}} = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = 2\pi R^2/j = 2\pi R^2\sqrt{\frac{R - 3MG}{MGR^2}} = 2\pi R\sqrt{\frac{R - 3MG}{MG}}$$

Le rapport entre le temps entre périastres et la période d'une orbite donne le nombre d'orbites (« années ») entre périastres. C'est donc :

$$\frac{\tau_{\text{péri}}}{\tau_{\text{orb.}}} = \sqrt{\frac{R(R - 3MG)}{MG(R - 6MG)}}\sqrt{\frac{MG}{R - 3MG}} = \sqrt{\frac{MG}{R - 6MG}} \approx 1 + 3MG\,/\,R$$

Le temps entre périastres est donc plus grand que l'année : le périastre se décale chaque année vers l'avant de $6\pi\, MG/R$ radians, c'est la précession du périastre, qui a été mise en évidence — toutes corrections faites — pour la planète Mercure pour lequel il vaut $3MG/R = 1.4\ 10^{-9}$ rd/orbite, ce qui fait environ 43'' par siècle, ce qui est vérifié.

L'orbite de Mercure étant relativement excentrée (e ≈.2), il se pose la question de savoir quelle est la bonne valeur à introduire dans cette dernière formule pour R. Ce n'est pas celle des extrêmes, aphélie ou périhélie. Il faut en fait prendre dans la formule de précession la moyenne harmonique entre les deux valeurs : $2Rr' \,/\, (R + r') = 2(a + c)(a - c) \,/\, (a + c + a - c) = a(1 - e^2) = R(1 - e)$.

6.4.3. Autre extrême : orbite critique

A l'autre extrême de l'intervalle admissible pour j^2

$$j^2 = \frac{16M^2G^2R^2}{(R + 6MG)(R - 2MG)}$$

on se retrouve avec une racine double pour $P(r)$, et l'intégrale sur dr devient singulière.

$$P(r) = \frac{2MGR^2(R - 2MG)}{R + 6MG}(r - r')^2$$

avec

$$r' = \frac{4MGR}{R - 2MG}$$

Dans ces conditions, l'intégrale sur dr diverge logarithmiquement quand $r \to r'$. La trajectoire rejoint asymptotiquement $r = r'$ en un temps infini.

Négligeons les variations du terme en $\sqrt{R - r}$. Selon le signe de $\pm\sqrt{r - r'}$, r s'approche ou s'éloigne exponentiellement de r' avec τ. Donc r' est un point d'équilibre éminemment instable. N'importe quelle perturbation peut faire repartir r vers R, ou au contraire, vers 0.

La constante en τ de l'exponentielle étant, $\dfrac{R^2\sqrt{R + 6MG}}{\sqrt{2MGR(R - 6MG)}}$ elle caractérise, multipliée par le logarithme de l'inverse des incertitudes sur les éléments de l'orbite ou sur ses perturbations, un temps d'incertitude pendant lequel le corps d'épreuve hésite entre rebondir sur un périastre ou plonger dans le trou noir.

7. Éléments de théorie quantique des champs dans l'espace de la relativité générale

L'objet de cette partie n'est pas de formaliser la quantification dans le cadre de la relativité générale, encore moins la quantification de cette dernière.

Il ne s'agit que de montrer le genre de mécanisme par lequel un trou noir peut engendrer un rayonnement malgré l'impossibilité classique pour la lumière de sortir de l'horizon de Schwarzschild.

Nous commencerons par un exemple qui montre que le processus de quantification dépend lui-même du choix des coordonnées, et que la question est bien plus compliquée que l'on pourrait le penser a priori.

7.1. Le modèle de l'espace de Rindler

Ce modèle simplifié donne pour l'essentiel les structures du problème. Nous les esquisserons rapidement.

7.1.1. Définition et description

Un repère de Rindler est un repère dans l'espace plat, où les observateurs de coordonnée fixe sont en accélération constante. Il peut servir de modèle local à plusieurs des caractéristiques du trou noir.

Pour simplifier, nous prenons une métrique à deux dimensions :

$$ds^2 = e^{2ar}\,[(dt)^2 - (dr)^2]$$

soit

$$g_{ab} = e^{2ar}\,\mathrm{Diag}\,(1, -1)$$

On en déduit les seuls éléments de la connexion non-nuls :

$$\Gamma_{trt} = -\Gamma_{rtt} = -\Gamma_{ttr} = \Gamma_{rrr} = ae^{2ar}$$

ou, si l'on veut,

$$-\Gamma^{r}_{t\,t} = -\Gamma^{t}_{r\,t} = -\Gamma^{t}_{t\,r} = -\Gamma^{r}_{r\,r} = a$$

ou, pour le seul élément du tenseur de courbure

$$R^{r}_{t\,tr} = \Gamma^{r}_{t\,t,r} - \Gamma^{r}_{t\,r,t} + \Gamma^{t}_{t\,r}\Gamma^{r}_{t\,t} - \Gamma^{r}_{t\,t}\Gamma^{r}_{r\,r} = 0$$

On est bien dans un espace plat. Chaque observateur maintenu à r = Cte dans ce système subit une accélération $\gamma^b = -\Gamma^{b}_{a\,c}u^a u^c$ où u est la tangente normalisée à sa ligne d'univers. Comme l'observateur est à r fixé, $u^r = 0$, et on a donc $g_{tt}(u^t)^2 = 1$, soit $u^t = e^{-ar}$ Dans ces conditions, l'accélération est spatiale $\gamma^r = +\,ae^{-2ar}$

$$g_{ab}\gamma^a\gamma^b = -e^{2ar}\,a^2e^{-4ar} = -a^2e^{-2ar}$$

son module physique est ae^{-ar}, constant dans le temps, et décroissant exponentiellement avec sa coordonnée r. La connexion avec des coordonnées de Minkowski se fait le plus commodément en prenant pour coordonnées les paramètres des caractéristiques de l'équation d'onde :

$$u = t + r\,;\; v = t - r$$

soit

$$ds^2 = e^{au-av}du\, dv = a^{-2}d(e^{au})d(-e^{-av})$$

On peut donc utilement prendre comme coordonnées

$$U = a^{-1}e^{au} \ ; \ u = a^{-1}\ln(aU) \ ; \ V = -a^{-1}e^{-av} \ ; \ v = -a^{-1}\ln(-aV)$$

On notera que l'ensemble des valeurs de (u,v) ne recouvre pas tout l'ensemble des valeurs de (U,V) par cette transformation, car on se retrouve avec :

$$U > 0 \, ; \, V < 0$$

7.2. Quanta dans l'espace de Rindler

La courbure de l'espace de Rindler est nulle, et l'équation d'onde scalaire de masse nulle est :

$$g^{ab}\, f_{;ab} = g^{ab} f_{,ab} + g^{ab}\Gamma^{e}_{a\,b}\, f_{,e} = 0$$

$$g^{tt}\, f_{,tt} + g^{rr}\, f_{,rr} + g^{tt}\Gamma^{r}_{t\,t}\, f_{,r} + g^{rr}\Gamma^{r}_{r\,r}\, f_{,r} = e^{-2ar}(\, f_{,tt} - f_{,rr}) = 0$$

On retrouve bien ici l'équation d'onde de masse nulle, dont la solution est

$$f(u) + g(v) = f\big(a^{-1}\ln(aU)\big) + g\big(-a^{-1}\ln(-aV)\big)$$

qui est tout aussi bien une solution de l'équation d'onde dans l'espace de Minkowski. Noter que ceci n'est valable que pour la masse nulle.

7.3. Transformation de Bogoliubov

Si l'on a une transformation linéaire entre champs, par exemple entre champs *in* et *out*, mais cela peut être beaucoup plus général — prenons ici l'exemple d'un champ de bosons : —

$$\phi_\alpha = M_{\alpha\beta}\psi_\beta + N_{\alpha\beta}\psi^+_\beta$$

$$\phi = M\psi + N\psi^+ \ ; \ \phi^+ = M^*\psi^+ + N^*\psi$$

$$\delta_{\alpha\beta} = [\phi_\alpha, \phi^+_\beta] = [M\psi + N\psi^+, M^*\psi^+ + N^*\psi] = MM^+ - NN^+ = 1 = M^*M^T - N^*N^T$$

$$0 = [\phi_\alpha, \phi_\beta] = [M\psi + N\psi^+, M\psi + N\psi^+]$$

$$MN^T - NM^T = 0 \ ; \ M^*N^+ - N^*M^+ = 0$$

$$\begin{vmatrix}\phi \\ \phi^+\end{vmatrix}\Big\rangle = \begin{pmatrix} M & N \\ N^* & M^* \end{pmatrix} \begin{vmatrix}\psi \\ \psi^+\end{vmatrix}\Big\rangle$$

Les formules ci-dessus montrent que

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N^* & M^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^+ & -N^T \\ -N^+ & M^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne l'inversion :

$$\begin{vmatrix}\psi \\ \psi^+\end{vmatrix}\Big\rangle = \begin{pmatrix} M^+ & -N^T \\ -N^+ & M^T \end{pmatrix} \begin{vmatrix}\phi \\ \phi^+\end{vmatrix}\Big\rangle$$

Cela étant fait, il reste à voir comment se comportent les espaces de Fock correspondants. Ils sont construits à partir des vides respectifs :

$$\phi_\alpha |0\rangle_\phi = 0 \quad ; \quad \psi_\alpha |0\rangle_\psi = 0$$

Ce ne sont pas les mêmes états. En particulier, l'opérateur « nombre de particules dans l'espace de Fock ψ »

$$\mathcal{N}_\psi = \sum_\alpha \psi_\alpha^\dagger \psi_\alpha$$

n'annule pas le vide $|0\rangle_\phi$:

$$\psi_\alpha = M^*_{\beta\alpha}\phi_\beta - N_{\beta\alpha}\phi^\dagger_\beta$$

$$\langle 0|_\phi \mathcal{N}_\psi |0\rangle_\phi = \sum_{\alpha\beta} |N_{\alpha\beta}|^2$$

Plus précisément, le spectre des particules est donné par

$$\langle 0|_\phi d\mathcal{N}_\psi |0\rangle_\phi = \sum_\beta |N_{\alpha\beta}|^2 d\alpha$$

Dans le cas de la transformation de Rindler, il va falloir se livrer à cet exercice, car on modifie la fréquence et le support des ondes, et c'est donc une transformation linéaire des champs que l'on a à faire, et par suite une transformation du vide et de tout l'espace de Fock.

Les champs dans le repère de Rindler ne recouvrent pas tout l'espace qui leur est alloué dans l'espace de Minkowski.

Il n'y a pas de diffusion, puisque l'équation d'onde est la même. Donc tous les quanta provenant de la partie inférieure de l'horizon central disparaissent de l'espace de Rindler dans l'horizon à l'infini, au bout d'un temps infini, mais nous sommes en présence d'une espèce de trou blanc, et inversement.

D'où la distinction nécessaire à faire entre les deux espaces de Fock.

Dans l'espace de Minkowski, les ondes de fréquence positive aboutissant à l'infini sont

$f_{\omega'} = (2\pi\omega')^{-1/2} e^{-i\omega' U}$, dans l'espace de Rindler, ce sont

$g_\omega = (2\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega u} = (2\pi\omega)^{-1/2} (aU)^{-i\omega/a}$

Les éléments de la matrice N de la transformation de Bogoliubov sont donc :

$$N(\omega',\omega) = (f^*_{\omega'}, g_\omega) = i\int_0^\infty (f_{\omega'}\dot{g}_\omega - \dot{f}_{\omega'} g_\omega)dX$$

$$N(\omega',\omega) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega'\omega}}\int_0^\infty e^{-i\omega' X}(aX)^{-i\omega/a}(\omega/(aX) - \omega')dX$$

Posons $X = e^{i\theta}s/\omega'$: nous pouvons déformer le contour librement $(0 \geq \theta \geq -\pi)$.

$$N(\omega',\omega) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega'\omega}}\int_0^\infty e^{-ie^{i\theta}s}(ae^{i\theta}s/\omega')^{-i\omega/a}(\omega\omega'/(ae^{i\theta}s) - \omega')e^{i\theta}/\omega' ds$$

$$(ae^{i\theta}/\omega')^{-i\omega/a} = \exp\left[\left(i\theta + \ln\left|\frac{a}{\omega'}\right|\right)\frac{-i\omega}{a}\right] = \exp\left(\frac{\theta\omega}{a} - i\,\frac{\omega}{a}\ln\left|\frac{a}{\omega'}\right|\right)$$

$$N(\omega',\omega) = \frac{i}{\pi\sqrt{\omega'\omega}} \exp\left(-\frac{\pi\omega}{2a} - i\frac{\omega}{a}\ln\left|\frac{a}{\omega'}\right|\right)\Gamma\left(1 - i\frac{\omega}{a}\right)$$

$$|N(\omega', \omega)|^2 = \frac{1}{\pi^2\omega'\omega} e^{-\pi\omega/a}\,\Gamma\left(1 - i\frac{\omega}{a}\right)\Gamma\left(1 + i\frac{\omega}{a}\right)$$

Le dernier produit de fonctions Γ est calculable grâce à l'identité classique :

$$\Gamma(1 + x)\Gamma(1 - x) = x\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi x}{\sin\pi x}$$

$$|N(\omega', \omega)|^2 = \frac{1}{\pi\omega' a}\exp\left(-\frac{\pi\omega}{a}\right)\frac{1}{\operatorname{sh}\pi\omega/a} = \frac{2}{\pi\omega' a}\,\frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}$$

Ceci représente pour l'observateur de Minkowski extérieur, en intégrant sur ω' — avec des coupures raisonnables pour limiter la divergence de l'intégrale une densité spectrale de rayonnement : $\dfrac{d^2N}{d\omega d\omega'} = \dfrac{2}{\pi a\omega'}\,\dfrac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}$ qui est un rayonnement thermique à une dimension d'espace, de température $T = \dfrac{a}{2\pi}$ et qui provient de l'horizon interne.

7.4. Rayonnement du trou noir (Hawking)

En reprenant les résultats sur le trou noir « éternel », c'est à dire suffisamment vieux pour qu'on puisse négliger les restes de matière terminant de tomber sur l'horizon (qui se refroidissent exponentiellement avec le temps), on a plusieurs expressions :

Schwarzschild :

$V(r) = (r - 2MG)\,/\,r$

$$ds^2 = -\frac{2M}{r}\,e^{-r/2M}e^{(\upsilon-u)/4M}du\,d\upsilon + r^2d\Omega^2$$

$$= -\frac{2M^3}{r}\,e^{-r/2M}dU\,dV + r^2d\Omega^2$$

ce sont les coordonnées de Kruskal.

Rappelons que $u,\upsilon = t \pm r^*$ avec $r^* = r + 2M\ln\left(\dfrac{r}{2M} - 1\right)$

L'équation d'onde pour une onde scalaire $\psi(t,r^*)Y_{lm}(\Omega)$ s'écrit alors

$$\psi_{,tt} - \psi_{,r^*r^*} + W(r)\,\psi = 0$$

avec

$$W(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)$$

Nous retrouvons un potentiel qui s'annule pour $r^* \to \pm\infty$, donc une représentation de l'espace extérieur à l'horizon en ondes asymptotiquement planes.

Mais en fait, l'espace physique est celui paramétré par les coordonnées de Kruskal. Donc il y a une transformation de Bogoliubov à faire entre le vide de l'espace extérieur à l'horizon, et le vide de l'espace de Kruskal.

Ceci revient à attribuer à l'horizon un pouvoir émissif de particules. Pourquoi émissif plutôt qu'absorptif ? Parce qu'il n'y a pas de particules incidentes de l'infini. Il pourrait se tenir en équilibre radiatif avec une source convenable, mais celle-ci n'existe pas.

7.5. Résultats

Le calcul est beaucoup plus difficile que dans le cas de Rindler. On arrive néanmoins, par approximations, à un résultat d'émission thermique approprié, Bose-Einstein ou Fermi-Dirac, selon le type de relation d'(anti)commutation supposé. C'est Hawking qui a le premier réussi à montrer cette émission quantique des trous noirs.

Comme dans le résultat de Rindler, la température croît avec l'accélération à l'horizon, c'est à dire est inversement proportionnelle à la masse du trou noir.

On peut supposer, en raison de la conservation de l'énergie totale, que le trou noir perd de sa masse. La surface se comporte alors en M^2, la température en M^{-1}, il rayonne donc en M^{-2}. Il peut atteindre la masse de Planck en un temps fini : $t \sim M^{1/3}$. On ne sait pas traiter cette limite.Par ailleurs, si le trou noir porte une charge électrique ou autre, ou un moment cinétique de rotation, on peut voir que les particules émises ont tendance à emporter en moyenne ces nombres quantiques, et que le trou noir se neutralise et arrête de tourner.

8. Observations

8.1. Principe de la microlentillle

L'étoile E est vue dans la direction A, en raison de la déviation des rayons lumineux par un corps N proche de la ligne de visée. L'angle solide sous-tendu par (φ_A, θ_A) est amplifié par la déviation, par rapport à celui sous-tendu par (φ_E, θ_E), et par suite le flux lumineux est accru. En effet, $\frac{d\Omega_A}{d\Omega_E} \sim \frac{d(\theta_A^2)}{d(\theta_E^2)}$ puisque $\varphi_A = \varphi_E$ dans le système où N est pris comme pôle.

Si nous repartons de la formule trouvée précédemment, savoir la déviation est de $4MG / b = 4MG / d\theta_A$, nous déduisons

$$\theta_E = \theta_A - \frac{4MG}{\theta_A}\frac{D - d}{dD}$$

d'où

$$\frac{d\Omega_E}{d\Omega_A} = \frac{d(\theta_E^2)}{d(\theta_A^2)} = \frac{\theta_E \, d\theta_E}{\theta_A \, d\theta_A} = \frac{\theta_E}{\theta_A}\left(1 + \frac{4MG}{\theta^2{}_A} \frac{D-d}{dD}\right) = 1 - \frac{16M^2G^2}{\theta_A^4} \frac{(D-d)^2}{d^2D^2}$$

$$\theta_A = \theta_E / 2 - \sqrt{\theta_E^2 / 4 + 4MG\,(D-d) / dD}$$

Tous calculs faits, l'amplification lumineuse est de :

$$\frac{d\Omega_A}{d\Omega_E} = \left(1 - \frac{16M^2G^2}{\theta_A^4} \frac{(D-d)^2}{d^2D^2}\right)^{-1}$$

avec l'expression de θ_A^4 donnée précédemment. Une seule solution pour θ_A est réaliste, compte tenu des l'approximations faites. On néglige la contribution correspondant à la déviation la plus forte.

Le plus important est le comportement de l'amplification avec θ_E, qui croît considérablement quand θ_A^2 est de l'ordre de $4MG(D - d) / dD$.

Ceci correspond à un angle solide très faible : l'amplification est extrêmement peu probable, et elle va durer de quelques jours à quelques mois. La différence de position $\theta_A - \theta_E$ n'est pas mesurable avec les moyens actuels. Mais les effets d'amplification ont été notés en surveillant systématiquement les luminosités de millions d'étoiles, en particulier par les collaborations MACHO, OGLE, AGAPE, etc...

8.2. Les trous noirs stellaires

On connaît deux classes de trous noirs : ceux de masse stellaire $(5 - 10M_\odot)$, qui viennent de l'effondrement de supernovae trop lourdes pour que la matière résiste à l'écrasement, et ceux de masse de millions ou de milliards de fois plus élevée, qui résulte de la condensation de matière dense au cœur des galaxies pendant leur formation.

Les trous noirs de masse stellaire ont été mis en évidence dans des systèmes binaires, en tant que compagnons invisibles d'une étoile visible, trop lourds pour être stables. Deux d'entre eux ont été détectés isolément, par effet de microlentille. L'un d'eux, détecté par la collaboration MACHO dans la direction du bulbe de la Galaxie, n'a pu être analysé à fond tant que le HST (Télescope spatial Hubble) n'a pas été en mesure d'identifier et de résoudre les diverses composantes (3 étoiles principales) situées dans le champ amplifié.

La comparaison de deux photos de l'autre prises à 7 mois d'intervalle montre une amplification notable. L'observation par HST de la zone d'incertitude du point amplifié a permis d'identifier avec certitude l'étoile-source qui a été amplifiée.

8.3. Les trous noirs galactiques

8.3.1. Les galaxies

La formation des galaxies

Il est très difficile d'observer les galaxies à l'époque de leur formation, car elles ne sont pas encore très brillantes, et leur rayonnement est fortement décalé vers le rouge. On s'en fait une idée en observant des galaxies proches, et rayonnant dans l'UV. On voit une croissance par accrétion, les éléments s'attirant mutuellement par gravitation, et la viscosité transformant l'énergie mécanique en chaleur. La conservation globale du moment cinétique donne aux galaxies en formation leur aspect plus ou moins aplati. Le transfert radial de ce moment cinétique apparaît possible, ce qui peut favoriser la concentration d'un cœur dense, les bras prenant l'essentiel du moment cinétique.

Quasars et galaxies

Entre 1 et 3 milliards d'années dans le passé, la formation de galaxies est passée par un stade où les cœurs très denses se sont agglomérés brutalement, en émettant des quantités d'énergie considérables sur des distances très faibles. Ces cœurs se sont effondrés gravitationnellement sur eux-mêmes, tirant l'énergie nécessaire à leur rayonnement de l'énergie gravitationnelle potentielle. Ils sont actuellement perceptibles comme des objets de diamètre apparent non mesurable, très lointains, et de luminosité apparente voisine de celle d'une étoile de notre Galaxie.

On peut distinguer, avec la résolution du HST (Hubble Space Telescope) au sein de galaxies hôtes de quasars, des nuages de la taille du Grand Nuage de Magellan, susceptibles d'être absorbés par le quasar en quelques dizaines de millions d'années.

Galaxies et trou noir central

Dès 1995, le HST apportait un détail inégalé sur la structure du centre des galaxies. La photo du cœur de la galaxie NGC 4261 faisait apparaître ce que l'on considère maintenant comme structure standard pour un cœur de galaxie, à savoir un trou noir central, résidu éventuel de quasar surgi au moment de la formation de la galaxie. Autour de ce trou noir, un mince disque de matière tombe sur le trou noir, entretenant la luminosité de son entourage, puis un bourrelet de matière plus ou moins épais qui tourne autour de l'ensemble, masquant une bonne fraction de l'angle solide, en équilibre approximatif entre la force de gravitation du trou noir, la force centrifuge et la pression de radiation.

Une vérification quantitative de ce modèle a été fournie par l'étude de la galaxie Cygnus XR-1 où l'on a observé des rayonnements UV pulsés, et amortis. Un modèle quantitatif en est que de petits nuages de gaz se détachent du bord interne du bourrelet, et tombent en spirale. On détecte leur rotation par la variation de brillance due à l'absorption par la matière centrale. Cette rotation accélère en fréquence, avec un rayon diminuant, jusqu'au moment où ce dernier atteint le rayon critique où la rotation cesse et le nuage gazeux disparaît à l'horizon.

8.3.2. Quelques galaxies typiques

La galaxie active NGC 4438

Elle est classée parmi les galaxies actives, en ce sens qu'elle émet, perpendiculairement à son plan de rotation, un faisceau de particules chargées. Ces particules, fortement énergiques, excitent la matière, ce qui provoque des jets colorés clairement visibles sur des milliers de pc.

La galaxie M87

Elle est l'une de celles contenant les plus massifs des trous noirs centraux : $3\ 10^9 M_\odot$. Elle présente un jet très collimaté, normal à son disque, probablement constitué d'électrons fortement relativistes qui excitent les masses de gaz qu'ils traversent.

La galaxie est suffisamment proche ($5\ 10^7$ années-lumière) pour qu'il soit possible de mesurer par spectrographie la vitesse du gaz de part et d'autre du centre. On obtient une vitesse de 500 km/s à une distance au centre de 60 années-lumière. On en déduit la masse du corps central de $3\ 10^9 M_\odot$.

Le jet émet considérablement dans le domaine radio, puisque ce sont des électrons pris dans un champ magnétique, et les mesures faites par le VLBA (Very Long Baseline Array interferometer) nord-américain, synchronisées avec des mesures faites en Europe, donnent une résolution angulaire meilleure que 0,1 année-lumière à la racine du jet.

La galaxie M84

Elle est située dans l'amas de la Vierge, non loin de M87, à 50 millions d'années-lumière.

Avec le spectrographe à image STIS du HST, on a pu décrire les vitesses du disque d'accrétion, la meilleure précision étant de 400 km/s à 26 années-lumière du centre, ce qui donne un minimum de $3\ 10^8 M_\odot$, à ce centre.

Vue directe sur un trou noir

La galaxie active NGC 6251 se présente quasiment de face, ce qui fait que le bourrelet d'accrétion ne masque pas la vive lumière de la masse de gaz très chaud tombant sur le trou noir. Cette galaxie, située à 500 millions d'années-lumière dans la Petite Ourse, est typiquement une galaxie active, avec un jet de 3 millions d'années-lumière perpendiculaire à son plan.

La nature exacte des irrégularités de la coloration du bourrelet, que l'on pense semblable à un disque, n'est pas clarifiée. Il pourrait se faire que ce soit dû à un voilement du disque, qui renforce l'éclairement du disque en UV sur un secteur.

8.3.3. Combien de galaxies hébergent un trou noir géant en leur centre ?

Le HST a repéré une foison de galaxies susceptibles d'héberger en leur centre un trou noir géant, et, comme nous l'avons vu, a permis de faire la démonstration de ce phénomène, et même de mesurer la masse de ces trous noirs.

Mais il reste tout un ensemble de points douteux. Il semble que certaines galaxies aient plus d'un trou noir géant, le phénomène s'expliquant par le fait que la rotation d'un système binaire de trous noirs relativement éloignés est pratiquement sans amortissement, les forces de friction ou de viscosité étant faibles à l'échelle de l'énergie du système. D'autant que les trous noirs ont une tendance marquée à faire le vide autour d'eux, ce qui fait que le milieu intragalactique doit être particulièrement léger dans leur zone d'évolution.

En 1997, la table des trous noirs géants considérés comme sûrs était

Galaxie	**Constellation**	**Type**	**Dist.(a.-l.)**	$L / L_\odot$	$M_{\text{trou}} / M_\odot$
Voie Lactée	—	Sbc	$3\ 10^4$	$2\ 10^9$	$2\ 10^6$
M31	Andromède	Sb	$2.3\ 10^6$	$5.2\ 10^9$	$3\ 10^7$
M32	Andromède	E2	$2.3\ 10^6$	$2.5\ 10^8$	$3\ 10^6$
NGC 3115	Sextant	S0	$2.7\ 10^7$	$1.4\ 10^{10}$	$2\ 10^6$
NGC 4258	Chiens de chasse	Sbc	$2.4\ 10^7$	$1.3\ 10^9$	$4\ 10^7$
NGC 4261	Vierge	E2	$9\ 10^7$	$3.3\ 10^{10}$	$4\ 10^8$
M87	Vierge	E0	$5\ 10^7$	$5.6\ 10^{10}$	$3\ 10^9$
M104	Vierge	Sa	$3\ 10^7$	$4.7\ 10^{10}$	10^9
NGC 3377	Lion	E5	$3.2\ 10^7$	$5.2\ 10^9$	10^8
NGC 3379	Lion	E1	$3.2\ 10^7$	$1.3\ 10^{10}$	$5\ 10^7$
NGC 4486b	Vierge	E0	$5\ 10^7$	$8.2\ 10^8$	$5\ 10^8$

Tableau de trous noirs reconnus depuis déjà 4 ans

9. Laboratoire « Physique Corpusculaire et Cosmologie »

Les activités scientifiques du PCC se déroulent exclusivement dans le domaine en émergence que l'on appelle « astroparticules », domaine frontière entre la physique des particules et l'astrophysique, qui englobe également la cosmologie. Les thématiques abordées se retrouvent au cœur d'un des 3 pôles (le pôle « astroparticule et cosmologie » — APC) du projet scientifique de l'UFR de Physique de l'Université de Paris VII dans l'optique de sa refondation sur le site des Grands Moulins à partir de fin 2003. Le Laboratoire deviendra à terme une composante essentielle du futur pôle APC. En attendant, un rapprochement formel s'est établi avec l'Université de Paris VII depuis le 1er janvier 2001, sous la forme d'une UMR tripartite entre le Collège de France, le CNRS-IN2P3 et l'Université de Paris VII.

Parmi les points marquants de l'année écoulée concernant le programme scientifique, nous rappelons :

a) la mise en place de la participation à GLAST, où les partenaires français sont l'IN2P3 et le CEA, sous l'égide du CNES qui assure l'essentiel du financement ;

b) le succès du vol d'Archéops en janvier 2001 à Kiruna, en Suède, dont les premiers résultats sont en cours d'analyse ;

c) l'installation des 40 premières cuves de l'observatoire Pierre Auger sur le site argentin de Malargüe, leur mise en service devant intervenir l'été 2001 ;

d) les tests réussis des flash-ADC pour l'expérience de neutrinos solaires Borexino ;

e) un résultat marquant sur la R&D Hellaz.

Les activités se focalisent sur 4 thèmes correspondent aux 4 groupes de physique du laboratoire. En allant des énergies les plus élevées vers les énergies les plus basses, nous rencontrons :

a) l'étude des rayons cosmiques de très haute énergie (> 10^{19} eV), avec l'expérience Auger ; l'expérience a pris son envol en 1999, avec la décision de financement au niveau du CNRS ;

b) l'astronomie gamma à haute énergie (10 GeV-10 TeV), avec les expériences CAT et CELESTE, qui fonctionnent sur le site de Thémis et le futur, avec le projet HESS à partir de fin 2001 (astronomie gamma au sol en Namibie) et le projet GLAST (astronomie gamma sur satellite) à partir de 2005 ;

c) l'étude des neutrinos et la quête de sa masse via les oscillations ; l'activité s'est réorientée vers un programme à court et moyen terme sur les neutrinos solaires avec le couplage Borexino/LENS ;

d) la cosmologie observationnelle avec l'étude du rayonnement cosmologique primordial à 3K, grâce au ballon Archéops (2001) et au satellite Planck (2007), sans oublier la fin du programme AGAPE (recherche d'événements de microlentille gravitationnelle par la méthode des pixels) avec les observations sur le télescope INT des Canaries.

Après le recrutement à la rentrée 2000 d'un professeur à Paris 7, Thomas Patzak, dans le groupe de cosmologie observationnelle, le laboratoire comprend aujourd'hui 24 physiciens, 44,5 ITA, 10 doctorants et 5 postdocs ou visiteurs étrangers. Le personnel est pour l'essentiel CNRS. Le personnel « Collège de France » comprend un professeur, 2 maîtres de conférence et 6 ITARF. Il y a également une mise à disposition du CEA (le directeur), un maître de conférences à Paris 6, un professeur à Paris 7. Un second professeur à Paris 7 est attendu à la rentrée 2001.

Il y a trois services techniques au PCC, mécanique, électronique, informatique, dont Gérard Tristram assure la coordination (sans oublier un service administratif, un service intérieur et une équipe bibliothèque- documentation). Parmi les réalisations techniques de cette année : achèvement du Lidar sur le site de Thémis, commande des héliostats de CELESTE, mise au point des flash-ADC pour Borexino, banc de test des cônes de Winston pour HESS, station locale et ASIC de « time tagging » pour Auger, enregistreur de vol et communication par satellite téléphonique pour Archéops.

Enfin, l'année a été marquée par les Journées du Laboratoire à Blois en février 2001.