

## Philosophie de la connaissance

M. Jules VUILLEMIN, professeur

Le cours du *mardi* a porté sur l'histoire du principe d'abstraction après 1903 chez Russell et ses contemporains. On a traité, cette année, de l'élimination des inférences et de la notion de construction chez Russell (1911-1914), des concepts de la « Géométrie sensible » selon Nicod (1923) et de la notion de « constitution » selon Carnap (1926).

Le cours du *mercredi* a porté sur la notion d'antinomie (1890-1910) et plus particulièrement sur les conséquences que les antinomies épistémologiques entraînent pour la conception du principe d'induction complète. En même temps, on a examiné comment des points de vue métaphysiques généraux : logicisme, formalisme, intuitionnisme inspirent les théories particulières qu'on a rencontrées.

Il semble qu'on puisse concevoir le principe d'induction complète comme un axiome fondamental, comme une définition logique ou comme un théorème démontré à partir d'autres axiomes. La première de ces conceptions serait commune à Poincaré et à Peano, qui l'adopte en énonçant le cinquième axiome de son système pour l'Arithmétique. On attribuerait à Russell et Frege le second point de vue, à Dedekind, Hessenberg, Zermelo le dernier.

Une telle classification risque cependant de cacher les philosophies implicites que ces choix enveloppent. Poincaré, par exemple, contesterait le statut axiomatique de l'induction.

Ce qui importe, en réalité, c'est moins la fonction actuelle que la loi d'induction joue dans un système déterminé et par laquelle elle est promue au rôle de postulat, de définition ou de théorème, que son insertion dans la philosophie mathématique que ce système suppose. Poincaré est intuitionniste ; il lui arrive d'appeler la loi d'induction un postulat, mais c'est que le mot « postulat » est alors réduit à sa signification courante (« ce qu'on admet comme principe faute de pouvoir le démontrer et qui n'est point un axiome en ce qu'il échappe à toute justification logique ») ; dans cet usage, « postulat » a le même sens que « jugement synthétique *a priori* ». Frege et Russell sont logicistes. La loi d'induction fait partie — à titre de définition ou de théorème — d'un système de notions purement logiques ; elle fournit précisément un

exemple choisi de la méthode qui permet de réduire les Mathématiques et particulièrement l'Arithmétique à la Logique. Enfin Peano, Dedekind, Hessenberg et Zermelo sont formalistes en ce qu'ils reçoivent la loi d'induction comme un axiome ou comme un théorème dans un système formel qui tantôt avec Peano est restreint à l'Arithmétique, tantôt avec Dedekind, Hessenberg et Zermelo englobe la théorie des ensembles.

Toutefois, comme les diverses conceptions ont exercé et subi des influences réciproques et que les logicistes ont emprunté le concept de chaîne à Dedekind, on procédera, dans ce qui suit, à un exposé historique.

§ 1. — *Le principe d'induction complète comme jugement synthétique a priori : la conception de Poincaré et l'intuitionnisme.*

Examinant la démonstration<sup>1</sup> que Leibniz donnait de la proposition :  $2 + 2 = 4$ , démonstration qui dépend de la définition du terme « 1 » et de l'opération « + 1 », Poincaré<sup>2</sup> remarque qu'il ne s'agit pas là d'une démonstration véritable, mais seulement d'une vérification. Une vérification est particulière ; elle est analytique puisqu'elle aboutit au terme d'un nombre fini de substitutions par définitions. Une démonstration véritable n'est féconde que parce qu'elle est générale, et « il n'y a de science que du général »<sup>3</sup>. Bien plus, l'établissement de ces lois générales a pour fin de nous dispenser des vérifications particulières.

Considérons<sup>4</sup> alors la définition de l'addition — étant supposée connue la nature de l'opération « + 1 » et la définition de l'opération  $x + (a - 1)$

D —  $x + a = [x + (a - 1)] + 1.$

Elle permet de définir successivement par récurrence  $x + 2$ ,  $x + 3$ , etc., sans être épuisée par aucune de ces définitions. C'est qu'elle contient une infinité de définitions distinctes, dont chacune n'a de sens déterminé que par la définition qui la précède. Ce procédé de récurrence permet, de même, de démontrer les propriétés formelles de l'addition, ainsi que de définir les autres opérations et de démontrer leurs propriétés.

Le procédé de démonstration est la démonstration par récurrence. « On établit d'abord un théorème pour  $n = 1$  ; on montre ensuite que s'il est vrai de  $n - 1$ , il est vrai de  $n$  et on conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers »<sup>5</sup>. Ce raisonnement n'est plus analytique. Il tient sa fécondité de ce qu'il condense une infinité de syllogismes, disposés en cascade :

---

(1) LEIBNIZ, *Nouveaux Essais sur l'entendement humain* (1740), IV, § 10, éd. B. Erdmann, p. 363, et *Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis*, éd. B. Erdmann, p. 94.

(2) *La Science et l'Hypothèse*, p. 12-13.

(3) *Ibid.*, p. 13.

(4) *Ibid.*, p. 15.

(5) *Ibid.*, p. 19.

« Dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme<sup>1</sup> et la formule générale qui contient comme cas particulier toutes les majeures »<sup>2</sup>.

En multipliant les vérifications, nous n'obtiendrons jamais un théorème général applicable à tous les nombres. Seul le raisonnement par induction le permet. Ainsi, en nous permettant de passer du fini à l'infini, il permet aussi de passer du particulier au général, c'est-à-dire de la description à la science.

Par exemple, démontrons l'associativité de l'addition. On définit d'abord par récurrence l'addition :

$$D' \quad (x + a)' = x + (a'), \quad x' = x + 1.$$

Soit à démontrer que :

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

On vérifie que :

$$(1) \quad (x + y) + 1 = x + (y + 1) \text{ par } D'$$

Soit, par hypothèse,  $n$  tel que :

$$H. \quad (x + y) + n = x + (y + n)$$

$$\begin{aligned} (x + y) + (n + 1) &= [(x + y) + n] + 1 \text{ par } D' \\ &= [x + (y + n)] + 1 \text{ par } H \\ &= x + [(y + n) + 1] \text{ par } D' \\ &= x + [y + (n + 1)] \text{ par } D'. \end{aligned}$$

Le raisonnement a été fait sous hypothèse. On a donc démontré que

$$(2) \quad \{(x+y) + n = x + (y+n)\} \supset \{(x+y) + (n+1) = x + [y + (n+1)]\}.$$

Mais (1) et (2) forment respectivement les deux clauses du principe d'induction.

(1) « Le théorème est vrai de 1 ».

(2) *Ibid.*, p. 20. Cette formule est : « Si le théorème est vrai de  $n$ , il est vrai de  $n + 1$  ». En d'autres termes, si l'on voulait réduire la démonstration par récurrence à la démonstration syllogistique, on aurait affaire à la suite infinie de syllogismes :

1. Si  $P(1) \supset P(2)$  et si  $P(1)$ , alors  $P(2)$
2. Si  $P(2) \supset P(3)$  et si  $P(2)$ , alors  $P(3)$ ...

On notera que ce sont là des syllogismes propositionnels et non des syllogismes aristotéliens. Quoi qu'il en soit, on rassemblera, selon Poincaré, la suite infinie de tous ces syllogismes en la mineure du premier syllogisme (« si  $P(1)$  ») et en la formule générale des majeures (« si  $P(k) \supset P(k + 1)$  »), pour en tirer la conclusion «  $P(n)$  ». On notera que les logisticiens ont, sans se référer à lui, repris exactement à leur compte la conception de Poincaré. Ainsi, I. Copi, *Symbolic Logic*, 1953, p. 202 écrit : « L'induction faible, dont le schéma est :

$$\begin{array}{l} f(1) \\ \text{pour } m \text{ arbitraire, si } f(m) \text{ alors } f(m + 1) \\ \hline \text{donc } f(m) \text{ pour tout } m \end{array}$$

peut se représenter comme résumant une suite infinie d'arguments ayant la forme du *modus ponens* :

$$\begin{array}{ccc} \frac{f(1)}{\text{si } f(1), \text{ alors } f(1 + 1)} & \frac{f(2)}{\text{si } f(2), \text{ alors } f(2 + 1)} & \frac{f(m)}{\text{si } f(m), \text{ alors } f(m + 1)} \\ \hline \therefore f(2) & \therefore f(3) & \therefore f(m + 1) \end{array}$$

On peut mettre ce même principe sous une autre forme ; il équivaut, par exemple, à affirmer que, dans une collection infinie de nombres entiers différents, il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres. Mais on ne peut le démontrer, à moins de recourir à un axiome aussi puissant que lui <sup>1</sup>. Irréductible au principe de contradiction, aux vérifications de l'expérience, au syllogisme analytique, il n'est que l'affirmation « de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » <sup>2</sup>. Comme l'induction physique, il est fécond ; à sa différence, il est certain parce qu'il ne porte pas sur l'ordre de la nature, mais sur l'ordre de l'intelligence <sup>3</sup>.

Naturellement, tous les principes des Mathématiques ne sauraient être réduits au principe d'induction complète. Ce dernier est seulement le plus simple de tous et, de ce fait, le plus caractéristique <sup>4</sup>. Mais, de tous ces principes et de toutes ces notions indémonstrables, on constate qu'ils exigent de notre part une intuition pour être affirmés ou compris. Ce sont de véritables jugements synthétiques *a priori* <sup>5</sup>.

## § 2. — La thèse de Frege <sup>6</sup> et le Logicisme.

Pour prouver l'identité, propre au Logicisme, de l'Arithmétique avec la Logique, Frege montre d'abord que les notions arithmétiques peuvent être définies uniquement à l'aide des notions logiques et ensuite que tous les raisonnements mathématiques peuvent être réduits à des formes logiquement valides. En particulier, il doit prouver que l'induction mathématique se réduit à un procédé de démonstration purement logique.

Il exprime alors l'idée générale de cette preuve : « C'est uniquement par le moyen de cette définition de la succession dans une série <sup>7</sup> qu'il est possible de réduire aux lois générales de la Logique l'argument de  $n$  à  $(n + 1)$ , qui, selon les apparences, est particulier à l'Arithmétique » <sup>8</sup>.

La démonstration comprend quatre moments :

I) Frege définit de façon purement logique la notion « succéder dans une suite ».

II) Il définit de façon purement logique la notion de succession dans une suite dont le premier terme possède toutes les propriétés héréditaires de la suite.

---

(1) *Ibid.*, p. 22-23.

(2) *Ibid.*, p. 23-24.

(3) *Ibid.*, p. 24-25.

(4) Poincaré, R.M.M., 1906 (2), p. 159-160.

(5) Poincaré, R.M.M., 1906 (1), p. 829-830.

(6) Dans ce paragraphe, je m'inspire de Kneale, *The Development of Logic*, p. 468-469 et 491-492.

(7) « Série » signifie ici suite ordonnée.

(8) *Grundlagen*, § 81.



III) Il définit de façon purement logique la notion de succession dans la suite des nombres naturels, dont 0 possède toutes les propriétés héréditaires de la suite.

IV) Il déduit de cette dernière définition le principe d'induction mathématique.

I. - Considérons donc, en bref, la théorie des séries, telle que Frege l'a développée dans le troisième chapitre de sa *Begriffsschrift*. Cette théorie procède de façon purement logique et, sur son exemple, « on voit comment la pensée pure, faisant abstraction de tout contenu donné par les sens ou même par une intuition *a priori*, peut, à partir du contenu qui jaillit de sa propre constitution, produire des jugements qui, à première vue, ne semblent devoir qu'à l'intuition leur possibilité... Les propositions, développées dans ce qui suit concernant les séries, dépassent en généralité et en régularité toutes les propositions semblables qui peuvent être dérivées d'une quelconque intuition des séries » <sup>1</sup>.

Soit une relation  $\Phi$ . On peut définir une autre relation  $\Phi'$  exprimable dans la formule : « y vient après x dans la série  $\Phi$  ». Si  $\Phi$  signifie « être le fils de »,  $\Phi'$  signifiera, par exemple, « être le descendant de ». « Dans la vie ordinaire, nous expliquerions probablement la signification du mot < descendant > en disant : < Les descendants d'un homme sont ses enfants et les enfants de ses enfants et les enfants des enfants de ses enfants, etc. >. Mais Frege ne se contentait pas de cette explication, parce qu'il pensait que, pour réussir à réduire l'Arithmétique à la Logique, il était nécessaire de trouver un moyen d'éliminer le mot < etc. >. Il suggérait en réalité que y est un descendant de x > pût être considéré comme ayant même signification que < y a tous les attributs qui appartiennent à x et qui sont invariablement transmis à ses enfants par un parent qui les possède >. Au premier abord, on peut recevoir avec suspicion une telle tentative. Car nous sommes inclinés à penser que, bien qu'un descendant de x doive indubitablement avoir tous les attributs qui sont héréditaires dans la famille qui commence avec x, il n'est pas évident que quiconque possède tous ces attributs doive être un membre de la famille. Mais, peut-on répondre, l'un des attributs héréditaires dans la famille est précisément la propriété d'être membre de la famille, en sorte que quiconque possède tous les attributs héréditaires, doit posséder aussi celui-ci » <sup>2</sup>.

La définition que Frege introduit de façon purement logique à cet effet dans la *Begriffsschrift* est la suivante : « Si, à partir des deux propositions suivantes :

1° Tout résultat d'une application du procédé  $\Phi$  à x a la propriété  $\mathcal{F}$ , et que

---

(1) *Begriffsschrift*, p. 54.

(2) Kneale, p. 468-469.

2° La propriété  $\mathcal{F}$  est héréditaire dans la série  $\Phi$ , quelle que soit  $\mathcal{F}$ , alors je dis :  $y$  vient après  $x$  dans la série —  $\Phi$  ou  $x$  précède  $y$  dans la série —  $\Phi$  »<sup>1</sup>. Une telle définition évite tout recours à la notion d' « etc. », qu'envelopperait, par exemple, une définition telle que :

$x \Phi' y =_{\text{Df}} x \Phi y. \forall : (\exists z) x \Phi z. z \Phi y : \forall (\exists v) (\exists z) x \Phi z. z \Phi v. v \Phi y : \forall : \text{etc.}$ ,

qu'évoque naturellement la notion intuitive de « descendant ». Dans le symbolisme de Russell-Whitehead, la définition de Frege aura l'expression suivante :

$D_1 \quad \Delta$  vient après  $\Gamma$  dans la série  $\Phi =_{\text{Df}}$   
 $(\mathcal{F}) \{((x) [\mathcal{F} x \supset (y) (\Phi x, y \supset \mathcal{F} y)]) \supset ((z) (\Phi \Gamma, z) \supset \mathcal{F} z) \supset \mathcal{F} \Delta\}$

Ainsi, «  $\Delta$  vient après  $\Gamma$  dans la série  $\Phi$  » a la même signification que : «  $\Delta$  possède toute propriété qui appartient, 1) à chaque objet auquel le possesseur de la propriété a la relation  $\Phi$ , et 2) à tout objet auquel  $\Gamma$  a la relation  $\Phi$  ». Il est clair qu'une propriété quelconque qui satisfait à ces deux conditions doit appartenir à chaque objet dont  $\Gamma$  « descend » par  $\Phi$ . Car la seconde condition requiert que la propriété doit appartenir aux successeurs immédiats de  $\Gamma$ , et la première condition requiert qu'elle doit être transmise de tous les successeurs de  $\Gamma$  à leurs successeurs immédiats, ou, comme Frege dit lui-même, qu'elle doit être héréditaire dans la série. La définition revient donc à identifier les successeurs de  $\Gamma$  dans la série —  $\Phi$  parce qu'ils possèdent *toutes* les propriétés qui sont héréditaires dans la série à partir de  $\Gamma$ <sup>2</sup>.

Une telle définition a lieu dans une logique supérieure, le quantificateur sur  $\mathcal{F}$  portant sur toutes les propriétés, y compris celle d'appartenir à la série. On identifie les successeurs d'un terme  $\Gamma$  dans une  $\Phi$ -série par leur possession de toutes les propriétés héréditaires dans la série à partir de  $\Gamma$ , mais la propriété d'être membre de la série appartenant à cet ensemble de propriétés, une anomalie apparaît dans les deux clauses de la définition : 1) les descendants de  $\Gamma$ , c'est-à-dire les éléments ayant la relation  $\Phi$  à  $\Gamma$ , possèdent toutes les propriétés  $\mathcal{F}$ , 2)  $\Phi$  transmet toutes les propriétés  $\mathcal{F}$ . En effet, être un élément de  $\Phi$  est l'un des termes de la totalité des  $\mathcal{F}$ . Cette anomalie recevra plus tard le nom d'imprédictivité.

II. - Comment passer enfin au principe même d'induction ? De la définition précédemment proposée, Frege tire le principe de l' « induction de

(1) P. 62.

(2) KNEALE, p. 693. Kneale ajoute la remarque suivante : « Sans nul doute, quelques-unes des propriétés qui sont héréditaires dans une série appartiennent cependant à certains objets qui ne sont pas dans la série. Par exemple, avoir un long nez peut être héréditaire dans une famille et appartenir cependant à des personnes extérieures à la famille. Mais nous avons vu que ceci ne peut être vrai de *toutes* les propriétés héréditaires, puisqu'il existe au moins une de ces propriétés, à savoir celle d'être un successeur dans la série, qui appartient seulement aux membres de la série » (p. 693-694). On aperçoit ici l'imprédictivité de cette définition.

Bernoulli » : « Si  $x$  a une propriété  $\mathcal{F}$  qui est héréditaire dans la série —  $\Phi$  et si  $y$ , dans la série —  $\Phi$  suit  $x$ ,  $y$  a la propriété  $\mathcal{F}$  » <sup>1</sup>. On remarquera qu'on s'est ainsi rapproché de la forme courante du principe d'induction en Arithmétique. En effet, la définition de « vient après  $\Gamma$  dans la série  $\Phi$  » ne recouvre que les successeurs de  $\Gamma$ , sans inclure  $\Gamma$  lui-même. La définition de l'induction de Bernoulli, au contraire, ne porte plus sur la descendance propre, mais sur la descendance étendue : elle choisit parmi les  $\mathcal{F}$  une propriété  $F$  que possède  $x$ , identique avec  $\Gamma$  et héréditaire pour  $\Phi$ . Toutefois, le principe reste encore plus général que ne le demande sa formulation en Arithmétique.

III. - Pour le rendre particulier, on définira successivement, 1) la notion de « successeur immédiat de  $m$  » dans la série des nombres naturels, 2) la notion de successeur de  $m$  dans cette même série, 3) la notion d'appartenance de  $m$  à cette série.

Frege introduit les nombres individuels par le moyen de concepts typiques empruntés à la logique <sup>2</sup> ;

0 est le nombre appartenant au concept « non identique avec soi-même »

1 est le nombre appartenant au concept  $F$ , tel que

$$\langle \sim (x) \sim Fx. (y) (z) (Fy. Fz \supset y = z) \rangle$$

2 est le nombre appartenant au concept  $F$ , tel que

$\langle [\sim (x, y) \sim Fx. \sim Fy]. [(x) (y) (x \neq y). (z) (Fz \supset z = x \vee z = y)] \rangle$  etc., où pour qu'on ait affaire à des définitions véritables la notion « le nombre appartenant au concept  $F$  » doit être entendue au sens « l'extension du concept  $\langle$  équinumérique par rapport à  $F \rangle$  » <sup>3</sup>. Il reste à introduire la notion de successeur immédiat ; on dira que « le nombre  $(n + 1)$  appartient au concept  $F$  » signifie la même chose que « il existe un objet  $x$  subsumé dans l'extension de  $F$  et le nombre  $n$  appartient au concept  $G$  subsumé dans l'extension de  $F$  et différent de  $x$  ». On vérifie immédiatement cet énoncé sur les explications données pour 1 et 2.

On voit que, si l'on considère le concept « égal à 0 », il est facile de trouver un objet subsumé sous son extension : c'est le 0. D'autre part, si l'on considère le concept « égal à 0 mais différent de 0 », aucun objet ne tombe sous son extension, en sorte que le nombre qui appartient à ce dernier concept sera justement 0. Nous avons donc un concept « égal à 0 » et un objet qui tombe dans son extension, le 0, pour lesquels sont valables les deux propositions :

« Le nombre qui appartient au concept « égal à 0 » est égal au nombre qui appartient au concept « égal à 0 ».

(1) *Begriffsschrift*, p. 64.

(2) Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, § 55.

(3) *Ibid.*, § 72.

« Le nombre qui appartient au concept « égal à 0 mais différent de 0 » est le 0 »<sup>1</sup>.

D'après la notion de succession, introduite plus haut, on voit que le nombre qui appartient au concept « égal à 0 » est le successeur immédiat de 0, soit 1. En effet, dire que 1 est le successeur immédiat de 0, c'est dire qu'il existe un objet  $x$  (ici 0) subsumé dans l'extension du concept  $F$  (« = 0 ») et tel que  $1 - 1 \in G$ ,  $G$  étant défini « subsumé dans l'extension de  $F$  et différent de  $x$  », c'est-à-dire « = 0.  $\neq$  0 ». On démontre le caractère biunivoque de la correspondance ainsi établie<sup>2</sup> ; tout nombre, excepté 0, suit immédiatement un nombre dans la succession des entiers naturels.

La relation  $R$  de succession immédiate étant définie, on définit facilement celle de succession dans la série des nombres. La phrase : «  $y$  vient après  $x$  dans la série des nombres naturels » a en effet même signification que la phrase :  $y$  a toutes les propriétés qui, 1) appartiennent à  $x$ , 2) sont telles que, si elles appartiennent à un nombre particulier, elles appartiennent aussi au nombre qui a avec lui la relation  $R$ .

Mais, dans ce procédé que suivent les *Grundlagen der Arithmetik*, la notion de la série naturelle des nombres est un indéfini et l'on n'a défini logiquement que 0 et successeur immédiat ( $N$ , 0 et successeur seront les trois indéfinis postulés par Peano). Il faut donc aller plus loin pour éliminer tout terme extra-logique.

Revenons aux deux clauses contenues dans  $D_1$ . La première d'entre elles (clause générale) demeure ce qu'elle est, sauf substitution de  $R$  (relation de succession immédiate qu'on vient de définir) à  $\Phi$ . La seconde est :

$$(\mathcal{F})(z) \Phi(\Gamma, z) \supset \mathcal{F}z.$$

Les substitutions convenables donnent :

$$(\mathcal{F})(z) R(0z) \supset \mathcal{F}z.$$

Cependant une telle clause aurait pour conséquence, comme on l'a vu, d'exclure 0 de la classe des  $x$  tels qu'ils possèdent tous ces  $\mathcal{F}$ . Pour faire entrer 0 dans la série, il faut stipuler que toutes ces propriétés lui appartiennent. Mais la clause :

$$(\mathcal{F}) \{ \mathcal{F} 0 \supset [(z) (R 0z) \supset \mathcal{F}z] \}$$

est redondante par rapport à la clause générale.

$$(\mathcal{F}) \{ (x) [\mathcal{F}x \supset (y) (R(xy) \supset \mathcal{F}y)] \}$$

Il suffira donc d'en retenir la seule condition :  $\mathcal{F} 0$ .

(1) *Ibid.*, § 77. Comme le remarque Mangione, la première de ces assertions, toute évidente qu'elle soit, est nécessaire : « elle tient lieu de la proposition <  $n$  est le nombre qui correspond à  $F$  >, dont il est parlé au § 76, dans la définition du mot *suivre*. Ici, au lieu de  $n$ , nous avons < le nombre qui correspond au concept « égal à 0 » > ; et, au lieu de  $F$ , nous avons le < concept « égal à 0 » >. De façon analogue, l'affirmation suivante tient lieu de la proposition : « Et  $m$  est en revanche le nombre qui correspond au concept » ce qui tombe sous  $F$ , mais est différent de lui » (qui rentre toujours dans la définition de *suivre* au § 76). Ici, au lieu de  $m$ , on a « 0 » ; et au lieu de « ce qui tombe sous  $F$ , mais est différent de lui », nous avons : « < égal à 0, mais différent de 0 > ».

(2) *Grundlagen*, § 77.

On obtient ainsi la définition : «  $n$  est un nombre naturel » a même signification que : «  $n$  est identique avec 0 ou  $n$  a tous les attributs qui, 1) appartiennent à 0 et, 2) sont tels que s'ils appartiennent à un objet quelconque  $m$ , ils appartiennent aussi à l'objet  $n$  qui a la relation  $R$  avec  $m$  ».

IV. - « La formulation ordinaire du principe d'induction mathématique peut maintenant être regardée comme une abréviation pour le truisme logique :  $\angle$  Si  $P$  est un attribut qui, 1) appartient à 0 et, 2) est tel que s'il appartient à un objet quelconque  $m$ , il appartient aussi à tout ce qui vient-immédiatement-après- $m$ -dans-la-série-des-nombres-naturels, alors  $P$  appartient à tout ce qui ou bien est identique à 0, ou possède tous les attributs qui, 1) appartiennent à 0 et, 2) sont tels que, s'ils appartiennent à un objet quelconque  $m$ , ils appartiennent aussi à tout ce qui vient-immédiatement-après- $m$ -dans-la-série-des-nombres-naturels. En d'autres termes, la validité du principe d'induction mathématique vient de ce que la série des nombres naturels peut être définie comme le champ propre de l'induction mathématique. On notera, cependant, que cette réduction supposée du raisonnement arithmétique à la logique suppose qu'on parle de tous les attributs ou propriétés des nombres »<sup>1</sup>.

### § 3. — *La thèse de Dedekind : formalisme et infini.*

Dans la Préface de son essai *Was sind und was sollen die Zahlen* (1888), Dedekind déclare : « Lorsque je parle d'Arithmétique (Algèbre, Analyse) comme d'une partie de la Logique, je veux dire que je considère le concept de nombre comme entièrement indépendant des notions ou intuitions de l'espace et du temps, que je le considère comme un résultat immédiat des lois de la pensée ». Il semble donc que Dedekind soit « logiciste » comme Frege, à propos duquel il déclare d'ailleurs dans une lettre que « la méthode par laquelle il définit une relation entre un élément et un autre qui le suit, non nécessairement immédiatement dans une série, s'accorde dans son *essence* »<sup>2</sup> avec son propre concept de « chaîne ». Mais Frege affirme que ce logicisme est une illusion : « Dedekind pense que la théorie du nombre est une partie de la logique ; mais son œuvre passera difficilement pour renforcer cette opinion, parce que les expressions « système » et « une chose appartient à une chose », qu'il utilise, ne sont pas usuelles en Logique et ne sont pas réduites aux notions reçues comme logiques »<sup>3</sup>.

---

(1) KNEALE, p. 469. Si l'on excepte les problèmes liés à l'imprédictivité, tout lecteur non prévenu ne pourra que s'étonner des critiques incompréhensives et impertinentes que des philosophes en renom adressèrent à la théorie fregéenne. Ainsi Husserl dans la *Philosophie der Arithmetik*. Ainsi Natorp (*Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, 1910, chapitre III). Lorsqu'on prend la peine d'étudier ces constructions naïvement psychologues ou transcendantales, on est surpris : 1° de leur arbitraire et parfois de leur obscurité, 2° des pétitions de principe qu'elles enveloppent, 3° de l'ignorance qu'elles supposent des changements opérés en Mathématiques par la Théorie des ensembles.

(2) Lettre de Dedekind à Keferstein, datée du 27 février 1890 et citée par Hao Wang, *A Survey of Mathematical Logic*, p. 73-74.

(3) *Grundgesetze*.

Le jugement de Frege est-il légitime ? « Frege utilise concept et relation comme fondements de la structure qu'il érige ; Dedekind utilise classes et relation d'appartenance d'un élément à une classe. Aujourd'hui, nous penserions, écrit Hao Wang, qu'ils emploient essentiellement la même chose » <sup>1</sup>.

Deux remarques s'imposent ici.

En premier lieu, Frege, dès la *Begriffsschrift* (1878), a précisé la nature de la logique qu'il suppose pour la déduction, précision qui fait défaut aux travaux de Dedekind <sup>2</sup>.

En second lieu la théorie fregéenne du rapport entre concept et classe a évolué. Dans une note des *Grundlagen* (1884), Frege écrit : « Je crois que je pourrais plus simplement utiliser le mot « extension du concept ». Cependant, on pourrait me faire immédiatement deux objections : a) la substitution qui vient d'être proposée contredit ma précédente affirmation, suivant laquelle chaque nombre est un objet, affirmation qui est confirmée soit par l'usage de l'article déterminé dans des expressions comme « le deux », « le trois », soit par l'impossibilité de mettre au pluriel les termes « un », « deux », etc., soit encore par le fait que, dans l'attribution d'un nombre, le nombre constitue seulement une partie de l'attribution. Il me semble en réalité qu'on peut parvenir à éliminer toutes ces objections, mais cela me conduirait trop loin » <sup>3</sup>. Comme on l'a remarqué <sup>4</sup>, si l'on pouvait vraiment éliminer ces objections, cela impliquerait qu'on pourrait traduire les développements des *Grundlagen* au moyen des symboles conceptuels de la *Begriffsschrift*. Dans le cas contraire, il faudrait introduire un terme nouveau et son symbole propre : le terme d'extension d'un concept. Or, Frege a choisi la seconde solution dans les *Grundgesetze*. C'est qu'il a paru nécessaire, pour qu'on pût légitimement convertir une équivalence en une égalité, de substituer les classes aux concepts. Néanmoins, le point de vue fregéen, si le symbolisme parfait des moyens d'expression <sup>5</sup>, ne change pas : la notion d'identité de classes, qui chez Dedekind est reçue intuitivement et formulée dans l'axiome d'extensionnalité ( $M = N$ , si chaque élément de  $M$  est élément de  $N$  et réciproquement), est fondée logiquement chez Frege par le recours à la théorie des valeurs de vérité conçues comme parcours de valeurs des fonctions proportionnelles <sup>6</sup>. L'opposition entre Frege et Dedekind porte bien sur les méthodes, en dépit des discours. Dedekind procède de façon axiomatique et, lorsque les paradoxes

---

(1) P. 99.

(2) Hao Wang, p. 80.

(3) *Grundlagen*, § 68.

(4) Gottlob Frege, *Logica e Arithmetica*, scritti raccolti a cura di Corrado Mangione, Boringhieri, Torino, 1965, Introduzione, p. 32.

(5) Voir sur ce point, les *Grundgesetze der Arithmetik*, § 55-83 et l'introduction de Mangione, *op. cit.*, p. 63-72.

(6) J. Vuillemin, *L'élimination des définitions par abstraction chez Frege*, Revue Philosophique, 1964.

seront connus, cette même méthode se transformera tout naturellement en une axiomatique formaliste : Zermelo, pour construire son système, utilisera les premières sections de l'essai de Dedekind<sup>1</sup>. Au contraire, Frege est logiciste. Lorsque les contradictions auront apparu, il en cherchera la solution dans des restrictions explicites apportées à la notion de « parcours de valeurs » et non pas dans une définition implicite de la notion d'ensemble. En tous cas, les concepts d'ensemble et de correspondance biunivoque, qui sont posés comme primitifs par Dedekind, ne sont reçus par Frege qu'au terme d'une élucidation ou d'une construction logique.

A. — *Démonstration du théorème d'induction généralisé.*

Dedekind suit Dirichlet, lorsqu'il introduit le concept général de fonction ou d'application : « Il arrive fréquemment que, dans un système donné  $\Omega$  d'objets ou d'éléments, tout élément  $\omega$  est remplacé, d'après une certaine loi, par un élément déterminé lui correspondant ; on a l'habitude d'appeler un tel acte une substitution... On s'exprime de façon encore plus commode si, comme nous le ferons, on considère cette substitution comme une application du système  $\Omega$  et, de la sorte, appelle  $\omega'$  l'image de  $\omega$ ,  $\Omega'$  l'image de  $\Omega$ ... Sur cette capacité de l'esprit de comparer une chose  $\omega$  avec une chose  $\omega'$ , ou de mettre en relation  $\omega$  avec  $\omega'$ , sans laquelle aucune pensée en général n'est possible, repose aussi, comme j'essaierai de la montrer ailleurs, toute la science des nombres »<sup>2</sup>.

Il définit la relation d'application, plus générale que la relation de correspondance biunivoque. Comme le note Cavaillès, « il ne s'agit pas d'un simple élargissement de l'opération géométrique de la projection — mise en correspondance de deux réalités données —, mais d'une généralisation du rapport fonctionnel. Deux conséquences : 1) l'application n'est pas forcément biunivoque (ce qu'elle était chez Cantor, puisqu'elle ne servait qu'à définir la puissance) ; 2) surtout la seule application considérée — étudiable *in abstracto* — sera l'application d'un système en lui-même par rapport à quoi il est une chaîne. Quel autre mode de séparation, en effet, entre ensembles, indiscernables puisqu'abstraits, que la relation de partie à tout ? »<sup>3</sup>.

La définition d'une chaîne est la suivante. Si un ensemble  $S$  est transformé en un ensemble  $Z = \varphi(S)$  par une application  $\varphi$ , en sorte que  $Z$  soit une partie de  $S$  et que, par conséquent, chaque élément de  $Z$  soit aussi un élément de  $S$ , on dit que  $\varphi$  est une application de  $S$  en lui-même et que  $S$  est une

---

(1) Hao Wang, p. 75.

(2) Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3<sup>e</sup> éd., 1879, Supplément XI (rédigé par Dedekind), p. 470 ; cité par Jean Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Hermann, 1962, p. 219.

(3) Cavaillès, *ibid.*, p. 122.

chaîne. La condition nécessaire et suffisante pour que  $S$  soit une chaîne s'exprime donc symboliquement par la relation

$$(1) \varphi(S) \subset S,$$

dans laquelle on note l'intervention de l'opération d'application  $\varphi$ , sans laquelle on n'aurait qu'une relation d'inclusion — de partie à tout — et non pas une chaîne proprement dite <sup>1</sup>.

Dedekind notait que « conçues dans toute leur généralité, les substitutions n'offriraient pas d'intérêt : nous devons nous demander au contraire, s'il est possible de représenter les nombres  $a$  du corps  $A$  par les nombres  $a'$ , en sorte que les relations rationnelles qui existent entre les nombres  $a$  soient complètement transportées sur les nombres  $a'$  » <sup>2</sup>. De même, en ce qui concerne de simples ensembles ou systèmes, nous devons nous demander s'il est possible de les appliquer en eux-mêmes en sorte de conserver pour les images des éléments les relations ensemblistes qui existent pour les éléments. Ces relations sont l'inclusion, la réunion, l'intersection <sup>3</sup>. Le caractère de chaîne — relativement à une application donnée  $\varphi$  — est invariant par rapport à cette application, à l'inclusion, la réunion et l'intersection <sup>4</sup>.

Dedekind définit alors la chaîne propre : « Si  $A$  est une partie quelconque de  $S$ , nous désignerons par  $A_0$  la communauté de toutes les chaînes dont  $A$  fait partie. Cette communauté  $A_0$  existe parce que  $A$  est elle-même partie commune de toutes ces chaînes. Comme de plus  $A_0$  est une chaîne, nous nommerons  $A_0$  la chaîne propre du système  $A$ , ou, en bref, la chaîne de  $A$ . Cette définition, elle aussi, se rapporte strictement à  $\varphi$ , transformation fondamentale déterminée du système  $S$  en lui-même : il est donc nécessaire que nous puissions, dans la suite, utiliser à volonté le symbole  $\varphi_0(A)$  au lieu de  $A_0$  et, de même, désigner la chaîne de  $A$  correspondant à une autre transformation  $\omega$  par  $\omega_0(A)$  » <sup>5</sup>. Considérons, par exemple  $S$ , ensemble des nombres pairs. Soit  $\varphi x = x + 2$ . Et soit :

$$\begin{aligned} A &= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\} \\ \varphi(A) &= \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \\ \varphi(\varphi(A)) &= \{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \end{aligned}$$

.....

(1) Dedekind, *Was sind und sollen die Zahlen*, § 37, p. 56.

(2) Lejeune - Dirichlet, p. 457.

(3) Dedekind, théorèmes 22, 23 et 24 : (2) Si  $X \subset Y$ ,  $\varphi(X) \subset \varphi(Y)$  ; (3)  $\varphi(X \cup Y) = \varphi(X) \cup \varphi(Y)$  ; (4)  $\varphi(X) \cap \varphi(Y) = \varphi(X \cap Y)$ .

(4) Dedekind, théorèmes 39, 40, 42 et 43 : (5) Si  $\varphi(S) \subset S$ ,  $\varphi(S)$  est également une chaîne, (6) Si  $A \subset S$  et  $\varphi(S) \subset S$ ,  $\varphi(A \subset S)$ . (7) Si  $M = A \cup B \cup C \cup \dots$  et si  $\varphi(A) \subset A$ ,  $\varphi(B) \subset B$ ,  $\varphi(C) \subset C$ , ... ;  $\varphi(M) \subset M$ . (8) Si  $M = A \cap B \cap C \cap \dots$  et si  $\varphi(A) \subset A$ ,  $\varphi(B) \subset B$ ,  $\varphi(C) \subset C$ , ... ;  $\varphi(M) \subset M$ .

(5) Dedekind, *W.s.u.s. die Zahlen*, § 44, p. 57-58.



L'ensemble des nombres pairs négatifs et positifs est une chaîne de A. De même l'ensemble :

$$\{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

L'intersection de toutes ces chaînes pour  $\varphi$  contenant A est A.

Dedekind démontre alors que la chaîne propre de l'image d'un ensemble est identique à l'image de la chaîne propre de cet ensemble <sup>1</sup> :

$$(9) \quad [\varphi(A)]_0 = \varphi(A_0)$$

De ce théorème, on tire la décomposition <sup>2</sup> :

$$(10) \quad A_0 = A \cup [\varphi(A)]_0.$$

De ces considérations on tire une généralisation du principe d'induction complète : « Pour montrer que la chaîne  $A_0$  est partie d'un système  $\Sigma$ , il suffit de montrer, 1) que  $A \subset \Sigma$  et que, 2) l'image de tout élément commun de  $A_0$  et de  $\Sigma$  est également élément de  $\Sigma$  » <sup>3</sup>. En effet, qu'une propriété soit vraie de A s'écrit  $A \subset \Sigma$  ( $\Sigma$  étant l'ensemble des objets possédant cette propriété). Par la clause hypothétique,

$$(A_0 \cap \Sigma) = \Sigma. \supset. \varphi(A_0 \cap \Sigma) \subset \Sigma.$$

Donc  $\varphi(A_0 \cap \Sigma) \subset (A_0 \cap \Sigma)$  (en vertu de la condition) et  $(A_0 \cap \Sigma)$  est une chaîne. Donc  $A_0$  (intersection de toutes ces chaînes) est contenue dans  $A_0 \cap \Sigma$ .  $A_0 \subset A_0 \cap \Sigma$ . Mais  $A_0 \cap \Sigma \subset \Sigma$ . Donc  $A_0 \cap \Sigma = A_0$ .

Donc  $A_0 \subset \Sigma$ .

Traduit en terme de compréhension, ce théorème signifie que, si l'ensemble A possède la propriété P (qui est propre aux éléments de  $\Sigma$ ) et si, lorsque les éléments de la chaîne propre de A pour l'application  $\varphi$  possèdent la propriété P, ils la transmettent à leurs images, alors tous les éléments de la chaîne propre de A possèdent la propriété P :

$$(11) \quad \{A \subset \Sigma. ((A_0 \cap \Sigma = \Sigma) \supset [\varphi(A_0 \cap \Sigma) \subset \Sigma])\} \supset A_0 \subset \Sigma.$$

## B. — Le théorème d'induction arithmétique

Pour parvenir à l'induction arithmétique proprement dite, il faut définir un ensemble infini et passer de la notion générale d'application à la notion plus particulière de correspondance biunivoque. La notion de chaîne, à son tour, va se trouver restreinte par ce procédé.

Un ensemble est infini s'il existe une correspondance biunivoque entre lui-même et l'un de ses sous-ensembles propres <sup>4</sup>. En d'autres termes « une classe

(1) Théorème et Définition 57 de Dedekind, p. 59.

(2) Comme le note Cavaillès, p. 123, «  $[\varphi(A)]_0$  représente donc le maximum de ce que l'application itérée  $\varphi$  permet d'atteindre à partir de A (il y a chaque fois débordement sur le domaine de base puisque A n'est pas une chaîne) ».

(3) Théorème 59, p. 60-61.

(4) *Ibid.*, § 5.

u est, eu égard à une relation  $Cls \rightarrow 1$ , une chaîne, si u est contenue dans le domaine de la relation et si le corrélat de u est toujours lui-même un u. La collection des corrélats d'une classe s'appelle l'image de la classe. Donc une chaîne est une classe dont l'image est partie ou tout d'elle-même. A l'intention du lecteur non mathématicien, il peut ne pas être superflu de remarquer qu'une chaîne, eu égard à une relation biunivoque, s'il y a un terme qui n'appartient pas à l'image de la chaîne, ne peut être finie, car une telle chaîne doit contenir le même nombre de termes qu'une de ses parties propres. Si a est un terme ou une collection de termes, il peut y avoir, eu égard à une relation  $Cls \rightarrow 1$  donnée, plusieurs chaînes dans lesquelles est contenu a. La partie commune de toutes ces chaînes est désignée par  $a_0$ . C'est ce que Dedekind appelle la chaîne de a. Par exemple, si a est le nombre n, ou un ensemble quelconque de nombres dont n est le plus petit, la chaîne de a, eu égard à la relation  $<$  plus petit d'une unité  $>$ , sera tous les nombres non plus petits que n » <sup>1</sup>.

Dedekind fait abstraction de la nature particulière des éléments. Appelons un ensemble S simplement infini lorsqu'il existe une application biunivoque  $\varphi$  de S en lui-même tel qu'il a en N un élément de base nommé 1 n'appartenant pas à  $\varphi(N)$  et que la chaîne propre  $\varphi_0(1)$  coïncide avec S. On identifiera l'ensemble des nombres naturels avec ce qui est commun à tous les ensembles simplement infinis, ce qui, comme le remarque Hao Wang <sup>2</sup>, est une façon d'interpréter les postulats comme une définition implicite. Il y a isomorphisme entre deux ensembles <sup>3</sup> simplement infinis S et S' eu égard à leurs applications  $\varphi$  et  $\varphi'$  et à leurs éléments de base 1 et 1' : 1 correspond biunivoquement à 1' et pour tout a qui correspond à a',  $\varphi(a)$  correspond à  $\varphi'(a')$ .

De cette définition, Dedekind dérive ce qui deviendra les cinq axiomes de Peano :

1)  $1 \in N$  (1 est un nombre) puisque  $N = \varphi_0(1)$  et que la chaîne d'un élément comprend cet élément ;

2)  $\varphi(N) \subset N$  (Le successeur d'un nombre est un nombre), en vertu de la propriété de toute chaîne ;

3)  $\varphi$  est biunivoque (Deux nombres différents n'ont pas le même successeur) ;

4)  $1 \notin \varphi(N)$  (1 n'est le successeur d'aucun nombre).

5)  $N = \varphi_0(1)$ , « en sorte que l'induction est valable, puisqu'un ensemble quelconque satisfaisant à l'hypothèse d'induction ( $1 \in M, a \in M \rightarrow \varphi(a) \in M$ ) est une chaîne contenant 1 et donc comprend  $\varphi_0(1)$  qui est par définition, l'intersection de toutes les chaînes comprenant 1 » <sup>4</sup>.

(1) Russell, *Principles of Mathematics*, § 236, p. 246.

(2) p. 75-76.

(3) Dedekind utilise le mot *système* au lieu du mot *ensemble*.

(4) Hao Wang, p. 76.

On observera, 1) que le principe d'induction n'est pas ici formulé comme il le sera par Peano, mais on verra que Dedekind donne lui-même une expression équivalente du principe en termes de possession de propriétés et non plus d'appartenance à des classes, 2) que seul ce principe fait intervenir la notion de chaîne propre (qui ne figure qu'improprement dans le premier axiome).

Cette notion (comme le principe) sert à assurer que la construction des nombres ne fournira que les nombres naturels et rien d'autre.

Supposons, par exemple, un système  $S$  qui, en plus de la suite des nombres  $N$ , que nous voulons caractériser, contienne également un système  $T$  d'autres éléments arbitraires  $t$ . « On peut toujours définir l'application  $\Phi$  en sorte de préserver le caractère de similarité et d'établir  $\Phi(T) = T$ . Mais un tel système  $S$  est visiblement quelque chose de tout à fait différent de notre séquence des nombres  $N$  et je pourrais choisir le système en sorte qu'à peine un seul théorème d'arithmétique  $y$  soit valable. Que devons-nous à présent ajouter aux faits précédemment énumérés pour éliminer de notre système  $S$  ces éléments étrangers qui suppriment toute trace d'ordre et pour nous restreindre au système  $N$  ? Ceci fut l'un des points les plus difficiles de mon analyse et j'ai dû beaucoup penser pour le maîtriser. Si l'on suppose qu'on commence avec une connaissance de la séquence  $N$  des nombres naturels et qu'on s'accorde alors une terminologie arithmétique, tout devient naturellement facile. On n'a qu'à dire : un élément  $n$  appartient à la séquence  $N$  si et seulement si, en partant de l'élément 1 et en continuant de compter, c'est-à-dire par un nombre fini d'itérations de l'application  $\Phi$ , j'atteins éventuellement l'élément  $n$  ; d'autre part je n'atteins jamais un élément  $t$  en dehors de la séquence  $N$  par le moyen de ce processus. Mais, pour le but que nous nous proposons, cette façon de distinguer entre les éléments  $t$  qui doivent être éliminés de  $S$  et les éléments  $n$  qui doivent seuls rester en  $S$  est tout à fait inutile. Une telle procédure envelopperait certainement le genre le plus pernicieux et visible de cercle vicieux... Comment puis-je donc, sans supposer aucune connaissance arithmétique, déterminer formellement et sans exception la distinction entre les éléments  $n$  et  $t$  ? Seulement en considérant les chaînes, mais complètement ! Si je souhaite éviter mon expression  $\langle$  chaîne  $\rangle$ , je dirai : un élément  $n$  de  $\Phi$  appartient à la séquence  $N$  si et seulement si  $n$  est élément de chaque partie  $K$  de  $S$  qui possède les deux propriétés, 1) que l'élément 1 appartient à  $K$  et, 2) que l'image  $\Phi(K)$  est partie de  $K$ . Dans mon langage technique,  $N$  est l'intersection  $I_0$  ou  $\varphi_0$  (1) de toutes les chaînes  $K$  (dans  $S$ ) auxquelles appartient l'élément 1. Ce n'est qu'après cette addition que le caractère complet de la séquence  $N$  est déterminé<sup>1</sup> ».

La définition alternative à la définition technique par la chaîne que Dedekind donne ici de la suite des nombres naturels  $N$  est la suivante :

$D_2 \ n \in S \supset n \in N =_{\text{df}} (K) \{ [K \subset S. 1 \in K. \varphi(K) \subset K] \supset n \in K \}$ .

(1) Lettre à Keferstein, in Hao Wang, p. 74.

Dans le crochet du *Definiens*, le quantificateur et la première clause correspondent à l'intersection de toutes les parties de S, la deuxième et troisième clauses spécifiant que cette intersection est celle de toutes les chaînes qui contiennent 1. Bref, le système S ne peut pas dépasser en ampleur la suite N.

On déduit alors la forme normale du principe d'induction de la façon suivante <sup>1</sup>. L'ensemble S de tous les éléments de N qui possèdent la propriété P est une chaîne pour la relation de succession immédiate dans N. En effet, la clause générale du principe d'induction énonce que

$$P(n) \supset P(n+1),$$

ce qui signifie que la propriété P se transmet dans N par la relation de succession, ou dans le langage des classes, que l'image de S est contenue en S, en sorte que  $\varphi(N)$  a la propriété P que possède S. De plus, S contient 1 par la clause absolue de l'induction. Donc  $S \supset \varphi_0(1)$ , ou  $N = \varphi_0(1) \subset S$ , en vertu de quoi l'on peut affirmer que tout élément de N a la propriété P.

Mais Dedekind a prouvé un principe d'induction plus général que celui-ci, et qu'on a cité plus haut <sup>2</sup>.

« Ce théorème un peu compliqué peut être exprimé plus clairement dans un autre langage. Appelons la relation par laquelle la chaîne est engendrée (ou plutôt la converse de cette relation) succession, en sorte que le corrélat ou l'image d'un terme sera son successeur. Soit A un terme qui a un successeur ou une collection de tels termes. Une chaîne en général (eu égard à la succession) sera un ensemble quelconque de termes tels que le successeur de n'importe lequel d'entre eux appartiendra aussi à l'ensemble. La chaîne de A sera la partie commune de toutes les chaînes contenant A. Ainsi les données du théorème nous informent que A est contenu dans S et que, si chaque terme de la chaîne de A est dans S, son successeur l'est aussi. Ce théorème, comme il est évident, est tout à fait semblable à l'induction mathématique, dont il diffère, premièrement par le fait que A n'a pas besoin d'être un terme unique, secondement, par le fait que la relation constitutive n'a pas besoin d'être biunivoque, mais seulement univoque » <sup>3</sup>. Lorsqu'on identifie l'ensemble A avec le terme 1 et S avec l'ensemble N des nombres naturels, il vient :

$$[1 \in S. \varphi(1_0 \cap S) \subset S] \supset 1_0 \subset S$$

c'est-à-dire, en vertu de 5) <sup>4</sup>

$$D_4 \quad [1 \in S. \varphi(N \cap S) \subset S] \supset N \subset S$$

On notera que, comme dans le cas de Frege, ce qui assure la validité du principe, c'est une définition du nombre qui se réfère à toutes les propriétés héréditaires dans une série. « Car dire que N est la plus grande partie

(1) E. W. Beth, *Les fondements logiques des mathématiques*, p. 20.

(2) Dedekind, § 4, Théorème 59.

(3) Russell, *Principles*, p. 247.

(4) Démonstration dans Kneale, p. 471.

commune de toutes les chaînes ayant 1 comme élément, c'est dire en réalité que  $N$  est contenue comme partie dans chaque chaîne  $K$  qui satisfait aux hypothèses de l'induction mathématique »<sup>1</sup>. C'est ce que montre la Définition  $D_2$  et Dedekind a lui-même noté cette rencontre avec Frege<sup>2</sup>. Mais peut-être est-ce pour se distinguer de Frege qu'il insiste sur l'aspect axiomatique de sa pensée<sup>3</sup>. Lorsqu'il annonce que les éléments de son système sont précisément les nombres, il précise : « Si, dans la considération d'un système simplement infini  $N$ , qui est ordonné par la projection  $\Phi$ , nous faisons entièrement abstraction de la nature spéciale de ces éléments, pour retenir seulement leur discernabilité, et si nous ne concevons pas les relations qui les rapportent les uns aux autres par le moyen de la projection inductrice d'ordre  $\Phi$ , alors ces éléments sont appelés *nombres naturels* ou *nombres ordinaux* ou simplement *nombres*, et l'élément de base 1 est appelé le *nombre de base* de la *suite des nombres*. Ayant égard à cette abstraction ou libérant les éléments de tout autre contenu, nous pourrions à bon droit décrire les nombres comme une libre création de l'esprit humain »<sup>4</sup>. La suite des nombres est la structure déterminée par les axiomes 1° - 5°, cette suite étant « le type abstrait » du système simplement infini<sup>5</sup>. La multiplicité des interprétations ne change rien à ceci ; il serait « déraisonnable » de demander à une structure mathématique plus que le caractère monomorphique du groupe des axiomes<sup>6</sup>. Ce caractère dépend à son tour de la détermination complète de  $N$  par le principe d'induction. La preuve que Dedekind donne de cette détermination revient à ceci : « l'ensemble des nombres naturels satisfait aux conditions : 1 lui appartient et le successeur d'un de ses éléments lui appartient. Si nous considérons tous les ensembles qui satisfont à ces deux conditions, leur partie commune ou intersection doit être exactement l'ensemble désiré : il ne peut pas contenir moins d'éléments parce que tout nombre doit être dans l'un des ensembles originaux ; il ne peut pas en contenir plus, parce que, si c'était le cas, il y aurait un ensemble plus petit qui satisferait aussi aux conditions »<sup>7</sup>.

#### § 4. — *Le système de Peano : formalisme et fini.*

En 1889, Peano publie ses *Arithmetices Principia nova methodo exposita*. Il y expose axiomatiquement l'Arithmétique. Outre les axiomes de l'égalité, il introduit les cinq postulats classiques :

- 1) 1 est un nombre ;
- 2) Le successeur d'un nombre est un nombre ;

(1) Kneale, p. 471.

(2) Lettre à Keferstein, in Hao Wang, p. 74 ; préface à la seconde édition (1893) de *Was sind und sollen die Zahlen ?*

(3) Kneale, p. 472.

(4) *Was sind und sollen die Zahlen*, § 6, p. 73.

(5) Lettre à Keferstein, in Hao Wang, p. 72.

(6) Kneale, p. 473, Hao Wang, p. 77.

(7) Hao Wang, p. 78.

- 3) Deux nombres différents n'ont pas même successeur.
- 4) 1 n'est le successeur d'aucun nombre ;
- 5) Si une propriété appartient à 1 et au successeur de tout nombre qui la possède, elle appartient à tous les nombres.

On aperçoit immédiatement le lien étroit avec Dedekind. Même lorsque, plus tard, Peano substituera 0 à 1 dans ses postulats, il restera fidèle à cette conception ordinale, qui s'oppose à la conception cardinale de Frege. Il démontre l'indépendance des cinq postulats.

Un article de Couturat met en évidence les relations entre Dedekind et Peano. D'une part il définit la chaîne en utilisant le principe d'induction complète qui, note-t-il, contient déjà l'idée d'infini, en sorte que c'est là une définition « psychologique ». D'autre part, il montre que les axiomes de Peano coïncident avec ceux de Dedekind <sup>1</sup>.

La différence fondamentale provient de ce que la définition de Dedekind part de l'infini, tandis que celle de Peano part du fini. En effet, « M. Dedekind considère l'idée de coordination (*Zuordnung*) comme bien plus simple et plus évidente que celle de nombre ordinal, à plus forte raison que celle de nombre cardinal, et par suite comme logiquement antérieure à toutes deux » <sup>2</sup>. Or, Couturat considère comme illégitime cet ordre. En premier lieu l'ordinal est postérieur au cardinal, puisqu'il contient en plus de celui-ci la notion d'ordre : « Le nombre cardinal est donc plus simple que le nombre ordinal ; il représente un degré supérieur d'abstraction, comme l'a bien vu M. Cantor » <sup>3</sup>. En second lieu, l'équivalence ne peut suffire à définir le nombre cardinal lui-même. « C'est un cercle vicieux manifeste que de définir le nombre cardinal par l'équivalence, c'est-à-dire, comme le terme allemand l'indique, par l'égalité de nombre (*Gleichzähligkeit*) ; ce n'est pas parce que deux ensembles sont équivalents qu'ils ont le même nombre ; c'est parce qu'ils ont le même nombre qu'ils sont équivalents et peuvent être coordonnés » <sup>4</sup>.

Cette seconde critique est d'autant plus surprenante que Couturat vient d'invoquer Cantor qui a précisément introduit en Mathématiques la définition par abstraction critiquée. Couturat en appelle à la *Philosophie de l'Arithmétique* de Husserl et il en adopte la conception intuitionniste qu'il rejettera si vivement plus tard.

Le chassé-croisé des opinions à cette époque apparaît assez à propos d'une querelle entre Pierre Boutroux d'une part et Russell et Couturat de l'autre,

---

(1) L. Couturat, *Sur une définition logique du nombre*, Revue meta/morale, 1900, tome VIII, p. 23-36.

(2) *Ibid.*, p. 26.

(3) *Ibid.*, p. 29.

(4) *Ibid.*, p. 28.

à propos de la notion de correspondance <sup>1</sup>. Boutroux aperçoit dans la notion fondamentale de correspondance une donnée intuitive, qui n'est fondée ni sur la logique, ni sur l'expérience sensible et dont le contenu est infini ; la Logique procède à reculons en découvrant les principes ; la mathématique va de l'avant à l'aide des notions nouvelles. Russell réplique justement que seule l'extension de la correspondance est infinie, non sa compréhension. D'autre part, Boutroux confond psychologie et fondements : « Le point capital est que ce qui évolue, c'est notre *connaissance* des mathématiques, et non le corps des vérités que nous découvrons graduellement. Cette évolution rend très probable qu'une liste de huit constantes dressée dans l'état présent de notre connaissance aura besoin de correction ; mais elle ne rend pas le moins du monde probable qu'on ne puisse trouver aucune liste de constantes » <sup>2</sup>.

§ 5. — *La conception de Russell* (1903).

En 1903, Russell suppose encore l'équivalence des définitions inductives et réflexives des nombres finis. En vertu de la définition inductive, un nombre fini est un nombre qu'on peut atteindre par l'induction mathématique à partir de 0 en ajoutant 1 à chaque étape. En vertu de la définition réflexive, un nombre fini est la classe de toutes les classes semblables à une classe donnée qui ne demeure pas semblable à une partie d'elle-même lorsqu'on supprime quelques-uns de ses termes <sup>3</sup>. Russell définissait de la façon suivante le nombre  $\aleph_0$  des nombres finis par le moyen du principe d'induction : «  $\aleph_0$  est le nombre de n'importe quelle classe  $u$  qui est le domaine d'une relation biunivoque  $R$ , dont le domaine converse est contenu dans  $u$  sans lui être coextensif, et qui est telle que, si l'on appelle *successeur* de  $x$  le terme auquel  $x$  a la relation  $R$ , si  $s$  est une classe quelconque à laquelle appartient un terme de  $u$  qui n'est pas successeur d'un autre terme quelconque de  $u$  et à laquelle appartient le successeur de chaque terme de  $u$  qui appartient à  $s$ , alors chaque terme de  $u$  appartient à  $s$ . Ou encore, nous pouvons définir  $\aleph_0$  comme suit. Soit  $P$  une relation transitive et asymétrique et soient deux termes quelconques mais différents du champ de  $P$  ayant la relation  $P$  ou sa converse. Soit, de plus, une classe  $u$  contenue dans le champ de  $P$  et ayant des successeurs (c'est-à-dire des termes dont les prédécesseurs ou bien appartiennent à  $u$  ou précèdent quelque terme de  $u$ ). Soit un terme du champ de  $P$  n'ayant pas

---

(1) P. BOUTROUX, *Sur la notion de correspondance dans l'Analyse Mathématique*, R.M.M., 12 (1904), p. 909-920 ; POINCARÉ, *Les Mathématiques et la Logique*, R.M.M., 13 (1905), p. 830 ; COUTURAT, *Deuxième Congrès de Philosophie, Genève, C. R. Critiques, section 2*, R.M.M., 12 (1904), p. 1037-1077 ; P. BOUTROUX, *Correspondance Mathématique et Relation Logique*, R.M.M., 13 (1905), p. 620-637 ; RUSSELL, *Sur la relation des mathématiques à la logique*, R.M.M., 13 (1905), p. 906-917 ; MOOIJ, p. 77-80.

(2) Russell, *op. cit.*, p. 910, cité par Mooij, p. 80.

(3) Russell, *Principles*, p. 123.

de prédécesseur et admettons, en revanche, que chaque terme ayant des prédécesseurs a des successeurs et a aussi un prédécesseur immédiat ; alors le nombre des termes du champ de P est  $\aleph_0''$  »<sup>1</sup>.

La première des deux définitions de Russell, en particulier, n'est qu'une autre expression pour le Théorème : « Si M est une chaîne simple<sup>2</sup>, tout sous-ensemble de M contenant le premier élément e ainsi que les images de tous ses éléments est identique à M lui-même<sup>3</sup> ». Elle est donnée en 1901 par Russell comme définition d'une progression<sup>4</sup>. En langage logique actuel, on exprimerait cette condition de la façon suivante :

$$\aleph_0 = Nc'u =_{\text{df}} [uRu'. R \in 1 \rightarrow 1. u' \subset u. \sim u \subset u'].$$

$$[(s) \{ s \subset u. (\exists y) y \in s \supset \sim (\exists x) x \in u. xRy.$$

$$(z) z \in s \supset (\exists v) v \in s. zRv \} \supset u = s]$$

L'influence de Dedekind est ici visible. Et l'on pourrait traduire la définition russellienne sous la forme suivante :

$$\aleph_0 = Nc'u =_{\text{df}} (x) (x') (y) (y') x \neq x'. x\phi y.$$

$$x'\phi y' \supset y \neq y'. 1 \in P. \phi(1_0 \cap P) \subset P \supset N \subset P.$$

On observera que la restriction russellienne à une application biunivoque particularise le principe dedekindien d'induction.

Toutefois, il est notable que, s'il rend hommage à Dedekind dans les *Principles*, en lui consacrant le chapitre XXX, Russell suit la théorie plus restreinte de Peano. A la théorie de Dedekind, il adresse trois critiques :

1) Dedekind prouve l'induction, que Peano suppose. Mais cette preuve équivaut à admettre que les nombres forment la chaîne de l'un d'entre eux. L'un peut être déduit de l'autre et réciproquement. « Dans l'ensemble, bien que la considération des chaînes soit plus ingénieuse, elle est assez difficile et offre le désavantage suivant : les théorèmes concernant l'ensemble fini des nombres non plus grands que n doivent être déduits des théorèmes correspondants concernant l'ensemble infini de nombres plus grand que n »<sup>5</sup>. De plus, l'induction mathématique — comme l'avait remarqué Poincaré — n'est requise, quand on part du fini, comme le fait Peano, que lorsque l'on veut démontrer des théorèmes valables pour des nombres *quelconques*. « Au contraire, dans la méthode de Dedekind, les propositions concernant des nombres particuliers demandent la considération des chaînes, comme les propositions générales. Il y a donc, dans la méthode de Peano, un avantage distinct de simplicité et une séparation plus claire entre les propositions particulières et les propositions générales de l'Arithmétique. Mais d'un point de vue purement

(1) *Ibid.*, p. 122.

(2) Zermelo (1902), p. 186.

(3) Zermelo (1909), p. 187.

(4) Russell (1901), p. 15.

(5) *Principles*, p. 248.



logique, les deux méthodes sont également saines ; et l'on doit se souvenir que, avec la théorie logique des cardinaux, aussi bien les axiomes de Peano que ceux de Dedekind deviennent démontrables <sup>1</sup> ».

2) La seconde critique de Russell tend à dissocier le logicisme du formalisme. Dedekind déclare : « Si, on contemplant un système simplement infini,  $N$ , ordonné par une représentation  $\varphi$ , nous négligeons entièrement la nature particulière des éléments, retenant seulement la possibilité de les distinguer et considérant seulement les relations dans lesquelles les place la représentation  $\varphi$  inductrice d'ordre, alors ces éléments sont appelés *nombre naturels* ou *nombre ordinaux* ou simplement *nombre* » <sup>2</sup>. Or, selon Russell, d'une part la suite des nombres ordinaux n'est pas quelque chose qui serait contenue dans une progression telle qu'une progression de points ou d'instants et qu'on pourrait séparer de cette progression par abstraction. Considérons trois paires rangées selon un ordre ; elles ne contiennent pas le nombre 3. D'autre part, on ne peut réduire les nombres aux relations qui constituent une progression : « s'ils doivent être quoi que ce soit, ils doivent être intrinsèquement quelque chose ; ils doivent différer d'autres entités telles que points et instants, ou couleurs et sons ».

Ces deux reproches s'éclairent par le principe d'abstraction russellien. L'abstraction n'est pas une activité psychologique qui isole telle ou telle propriété ; ou du moins, si l'abstraction est cela, elle n'a pas d'application en mathématiques, où l'abstraction légitime n'intervient que dans les définitions conformes au principe d'abstraction. En vertu de ce principe, lorsqu'une relation  $R$  existe et est symétrique et transitive, on peut l'analyser en la possession d'une propriété commune ou, plus exactement, en l'existence d'une entité avec laquelle sont mises en correspondance de façon univoque les termes assujettis à la relation  $R$ . Quand cette relation  $R$  est celle de similarité entre ensembles (correspondance biunivoque conservant l'ordre), les entités obtenues par l'application du principe sont les nombres ordinaux. Le nombre ordinal est donc l'ensemble de toutes les progressions similaires entre elles <sup>3</sup>. Pour l'obtenir, il faut donc considérer *toutes* les progressions, faute de quoi l'univocité de la suite des nombres n'est pas assurée. Et le nombre est une entité définie *intrinsèquement*, comme ensemble de toutes ces progressions, en quoi il diffère des entités mêmes qui constituent ces progressions particulières.

Lorsque Dedekind, dans *une* progression, fait abstraction de tout ce qui constitue l'individualité des éléments pour ne considérer que leur distinction, il abstrait de ces éléments leur place. Le fondement de la distinction et les relations constitutives de la progression sont les seuls éléments qui jouent dans le raisonnement mathématique. Russell d'ailleurs a distingué les pro-

---

(1) *Ibidem*.

(2) Dedekind, *W.s.u.s. die Zahlen*, § 76.

(3) *Principles*, p. 245.

priétés *sérielles* ou *ordinales* des nombres et leurs propriétés *logiques*. Les nombres définis logiquement sont ceux qu'on utilise dans la vie courante et ces définitions sont essentielles à toute assertion numérique. « Mais ce ne sont pas ces propriétés que les Mathématiques ordinaires emploient, ... ce qui est pertinent pour les Mathématiques, c'est seulement le fait que les nombres finis forment une progression » <sup>1</sup>. On voit s'esquisser ici l'une des frontières entre logicisme et formalisme. Pour les logicistes, les nombres servent à compter. Pour les formalistes, les nombres sont une structure dont l'Arithmétique définit les lois. Pour reprendre une opposition kantienne, ceux-ci, s'ils avaient à légitimer leur définition du nombre, se contenteraient d'une définition « métaphysique » portant sur la possibilité interne du système des nombres, tandis que ceux-là exigent une déduction « transcendantale », montrant comment le système des nombres peut s'appliquer au monde extérieur.

3) Dedekind fonde la théorie des cardinaux sur celle des ordinaux. Russell s'accorde avec Cantor, Frege et Couturat pour contester la légitimité de cet ordre. Pour définir les cardinaux, la relation de similarité entre ensembles et le principe d'abstraction suffisent <sup>2</sup>. Il n'en va pas de même lorsqu'on veut définir les ordinaux : la notion de puissance d'une relation est ici inévitable et, à travers elle, le recours aux cardinaux <sup>3</sup>. « Les ordinaux, considérés soit comme ensembles de relations sérielles similaires, soit comme notions comme le  $n^{\text{me}}$ , sont plus complexes que les cardinaux ; la théorie *logique* des cardinaux est complètement indépendante de la théorie générale des progressions et requiert un développement indépendant pour montrer que les cardinaux forment une progression ; et les ordinaux de Dedekind ne sont essentiellement ni des ordinaux, ni des cardinaux, mais ce sont les termes de n'importe quelle progression... Pour ma part, je n'affirme pas que ce soit une erreur absolue de commencer avec l'ordre, puisque les propriétés des progressions et même la plupart des propriétés des séries en général paraissent largement indépendantes du nombre. Mais les propriétés du nombre doivent être capables de preuves sans en appeler aux propriétés générales des progressions puisque les nombres cardinaux peuvent être définis indépendamment et qu'on doit donc apercevoir qu'ils forment une progression avant de pouvoir leur appliquer les théorèmes qui concernent les progressions » <sup>4</sup>. Ainsi, pour Russell, la question de la priorité entre cardinaux et ordinaux est double : logiquement, ce sont les cardinaux qui sont antérieurs mathématiquement, l'ordre est indifférent, mais la priorité des cardinaux énonce avec plus de pureté les lois de l'Arithmétique.

On a défendu la priorité absolue des ordinaux en montrant que l'ordre est supposé dans la définition logique des cardinaux : « Le critère de l'équivalence numérique utilise la possibilité de la correspondance entre paires, qui ne peut

---

(1) *Ibid*, p. 241.

(2) *Principles*, p. 249.

(3) *Ibid.*, p. 250.

(4) *Ibid.*, p. 251.

être assurée que si les actes de corrélation sont accomplis l'un après l'autre dans une succession temporelle et que les éléments des ensembles eux-mêmes sont donc arrangés suivant un ordre. Même si l'on suit la route de l'abstraction et qu'on divise l'acte de comparaison numérique entre deux ensembles, en assignant d'abord un nombre à chaque ensemble et en comparant ensuite ces nombres, il reste indispensable d'ordonner chaque ensemble individuel lui-même en exhibant ses éléments un à un dans une succession temporelle. (Une telle exhibition un à un est nécessaire chaque fois qu'un agrégat doit être considéré comme donné concrètement ; et les nombres que nous employons dans la vie quotidienne ne concernent que de tels agrégats). Pour cette raison, il me paraît hors de question que le concept de nombre ordinal est le concept primaire »<sup>1</sup>. On voit ainsi que, selon Weyl, l'assignation d'un nombre cardinal à un ensemble exige qu'on ait préalablement ordonné des ensembles objets de comparaison. C'est là un postulat typiquement intuitionniste. Ainsi, bien que la préférence de Dedekind pour les ordinaux n'implique nullement ce postulat, la préférence cantorienne de Russell (et de Frege) pour les cardinaux implique un postulat réaliste, typiquement associé au logicisme, et en vertu duquel l'existence mathématique ne dépend nullement des procédés de construction qui sont en notre pouvoir.

En résumé, Russell admet l'équivalence de la définition inductive et de la définition réflexive des nombres finis. Cette supposition faite, il pourrait donc tout aussi bien ajouter à la définition logique des cardinaux soit les axiomes de Dedekind et la définition réflexive sélectionnant les nombres finis comme les cardinaux des ensembles qui n'ont pas de partie propre semblable au tout, soit les axiomes de Peano et la définition inductive des nombres finis. Il choisit la seconde solution pour des raisons propres au logicisme et au réalisme. Naturellement, il ne reçoit nullement une conception axiomatique des ordinaux. Comme le remarque Reichenbach, le système peanien ne donne qu'un système formel. Russell lui ajoute une définition « coordinative »<sup>2</sup> qui, indépendante de ce système, en assure une interprétation univoque et conforme à l'application ordinaire des nombres dans l'expérience ; cette définition « coordinative » est la définition logique de « 1 » et de « successeur ». Couturat<sup>3</sup>, soutient exactement ce même point de vue que Russell défend dans *Les Principes des Mathématiques*, se conformant à un article de Whitehead sur le nombre cardinal, qui, pour les questions qui nous concernent, avait été rédigé par Russell<sup>4</sup>.

La théorie des nombres finis est indépendante et de l'axiome du choix<sup>5</sup> — nécessaire pour démontrer qu'un nombre non inductif est réflexif — et de

---

(1) H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, p. 34-35.

(2) H. Reichenbach, *Bertrand Russell's Logic*, in *The Philosophy of Bertrand Russell*, p. 32.

(3) 1905 (paru dans la Revue de Métaphysique et de Morale de 1904 et 1905), Couturat (1906), p. 247.

(4) A. N. Whitehead, *On Cardinal Numbers*, *American Journal of Mathematics*, v. 24, n° 4, 1902, p. 367-394. La section III est entièrement due à Russell.

(5) Russell, *Introduction à la philosophie mathématique*, p. 156.

l'axiome de l'infini<sup>1</sup>. A cet égard — et si l'on fait abstraction du problème de l'imprédictivité — on peut conclure comme le fera Russell<sup>2</sup> : « L'emploi de l'induction mathématique dans les démonstrations était, autrefois, quelque chose comme un mystère. On ne doutait pas que ce fût une méthode convenablement probante, mais personne ne savait exactement comment elle était fondée. D'aucuns croyaient réellement à une induction dans le sens que la logique donne à ce mot. Poincaré considérait qu'il y avait là un principe de la plus haute importance, au moyen duquel un nombre infini de syllogismes pouvaient être condensés dans un raisonnement unique. Nous savons maintenant que toutes ces vues sont erronées et que l'induction mathématique est une définition et non un principe. Il y a des nombres auxquels on peut l'appliquer et il y en a d'autres qui sont rebelles à son emploi. Nous définissons les « nombres naturels » comme ceux que l'on peut établir grâce à l'induction en mathématique, c'est-à-dire comme ceux qui possèdent toutes les propriétés inductives. Par suite, ces déterminations peuvent être employées pour les nombres naturels non pas en raison de quelque intuition mystérieuse, d'un axiome ou d'un principe, mais elles se présentent comme une simple proposition littérale. Si nous définissons les « quadrupèdes » comme des animaux qui ont quatre pieds, il s'ensuivra que tout animal qui aura quatre pieds sera un quadrupède ; le cas des nombres soumis au régime de l'induction mathématique est exactement le même ».

§ 6. — *Critique de Poincaré : le reproche d'imprédictivité. Introduction de l'axiome de réductibilité par Russell.*

Quelles que soient les difficultés particulières dans lesquelles se trouve engagée telle des définitions ou des démonstrations précédentes qui ont été données de l'induction complète, elles possèdent toutes — exception faite du système de Peano qui, recevant le principe parmi les axiomes, paraît lui accorder une place irréductible — un même caractère : elles sont imprédictives.

La quantification sur  $\mathcal{F}$  dans la formule de Frege est imprédictive : parmi les propriétés héréditaires pour la suite des entiers naturels, il y a la propriété d'appartenir à cette suite. Il en va de même, chez Dedekind, pour la notion de chaîne : l'intervention de toutes les chaînes contenant un élément enveloppe la chaîne propre elle-même. La définition du nombre inductif par Russell-Whitehead — de laquelle est tiré le principe d'induction — est, elle aussi, imprédictive. Le principe repose en effet : a) sur la définition du nombre inductif : tout nombre qui fait partie des classes récurrentes, c'est-à-dire qui contiennent 0 et qui contiennent  $n + 1$  si elles contiennent  $n$  ; b) sur

---

(1) *Ibidem*, p. 38, p. 162.

(2) *Ibidem*, p. 41.

la proposition : si  $n$  n'est pas inductif et que  $m$  le soit,  $n-m$  ne l'est pas <sup>1</sup>. « La définition du nombre inductif n'est pas prédicative. Un nombre inductif est celui qui appartient à toutes les classes récurrentes ; si nous voulons éviter un cercle vicieux, nous devons entendre : à toutes les classes récurrentes dans la définition desquelles n'intervient pas déjà la notion de nombre inductif » <sup>2</sup>. De même, il est illégitime de faire intervenir « la classe des nombres  $m$  tels que  $n$  étant un nombre non inductif donné,  $n-m$  ne soit pas inductif » <sup>3</sup>.

Ainsi, définitions et démonstrations du principe d'induction complète offrent les mêmes défauts logiques et elles ne permettent pas d'éviter l'imprédictivité.

De ce fait, Poincaré conclut qu'on doit considérer le principe comme une synthèse *a priori*, propre aux mathématiques et irréductible à toute autre donnée.

Selon lui, ou bien la définition par induction est existentielle, comme il convient à la définition par postulat qu'elle est sans le dire ; on doit alors démontrer sa validité et cette démonstration enveloppe l'affirmation de la légitimité du principe d'induction, qu'elle devait servir à démontrer. Ou bien, elle est en elle-même démonstrative ; mais, dans ce cas, elle ne doit son caractère synthétique qu'à son imprédictivité. Dans le premier cas, il faut revenir à l'intuition d'une synthèse *a priori* irréductible. Dans le second, on bute sur un raisonnement vicieux : c'est le même qui a conduit aux antinomies ; il était illégitime quand il donnait des résultats faux ; il « reste illégitime quand il conduit par hasard à un résultat vrai » <sup>4</sup>.

Russell ne retient pas le premier argument de l'alternative de Poincaré ; le second, au contraire, l'a contraint à refondre en 1906 la théorie des types.

Poincaré justifie ainsi son premier argument : toute définition doit posséder deux caractères fondamentaux. D'abord elle implique un axiome, celui qui affirme l'existence de l'objet défini <sup>5</sup> ; à cet axiome on peut substituer toute démonstration de non contradiction, qui, au point de vue mathématique, revient à une démonstration d'existence. Cette démonstration s'opère soit par l'exemple, soit, quand ce n'est pas possible, en montrant que sont compatibles toutes les propositions dérivables de la définition ou des postulats qui l'ont rendue implicite ; mais, si ces propositions sont en nombre infini, toute vérification directe devenant impossible, on devra invoquer le principe d'induction complète qu'il s'agit précisément de vérifier. Ensuite, une définition doit être utile et cohérente avec l'usage du mot défini : « Ainsi, voici un mot dont nous avons donné explicitement une définition  $A$  ; nous en faisons ensuite dans le discours un usage qui suppose implicitement une autre défi-

---

(1) Whitehead, *American Journal of Mathematics*, t. XXIV.

(2) Poincaré (1906), p. 309-310.

(3) Poincaré (1906), p. 310.

(4) Poincaré (1906), p. 310.

(5) Poincaré, 1906, (2), p. 161-163. Cette formule est de John Stuart Mill. Poincaré la reprend à son compte, en l'amendant de son sensualisme primitif.

inition B. Il est possible que ces deux définitions désignent un même objet. Mais, qu'il en soit ainsi, c'est une vérité nouvelle, qu'il faut, ou bien démontrer, ou bien admettre comme un axiome indépendant » <sup>1</sup>.

Quant à Russell, il considère que les seules définitions acceptables dans un système mathématique sont les définitions nominales et, à la différence de Peano, il rejette les définitions par postulats. Or, « pour les définitions nominales, la question de la compatibilité ne se pose pas ou tout au moins est singulièrement simplifiée, puisqu'une telle définition est constituée par une seule formule. Il y a entre ces deux sortes de définitions la même différence qu'entre une équation et sa solution : on peut se demander si une équation sous sa forme primitive a des racines réelles ; on n'en peut plus douter lorsqu'on a tiré la formule de solution » <sup>2</sup>.

Quant à la question de la cohérence sémantique des définitions, il suffit que celle-ci soit assurée objectivement par la légitimité des substitutions du Défini et du Définissant, sans qu'intervienne nécessairement la conscience subjective de ces substitutions. Le procédé logiciste n'engage nullement à donner une définition simple ou intuitive des nombres ; mais, réduisant les termes indéfinis à n'être que des termes logiques, il définit les nombres par un symbolisme, éventuellement compliqué, en fonction de ces derniers termes. Il suffit que ces définitions soient en accord avec la signification des nombres (en tant que les nombres sont des propriétés d'ensembles), sans découler pour autant du contenu intuitif immédiat de cette signification, pour qu'elles soient acceptables et cohérentes <sup>3</sup>.

Reste le second argument de Poincaré. Et soit donc l'énoncé qui exprime le principe d'induction : toute propriété qui appartient à 0 et qui appartient au suivant de tout nombre qui la possède appartient à tous les nombres finis, c'est-à-dire inductifs. « Or, dans cet énoncé, *toute propriété* doit, pour éviter le cercle vicieux, être restreint aux propriétés  $\varphi x$  qui peuvent être énoncées sans

---

(1) Poincaré, *Ibidem*, p. 165. On notera la ressemblance de la position du dernier Wittgenstein avec celle de Poincaré.

(2) Couturat, 1906, p. 244-245.

(3) Cette différence entre la définition logiciste et la définition mathématique courante est exprimée parfois par Russell comme étant une différence entre philosophie et mathématiques pures : « Aucune d'entre elles n'asserte des propositions qui, comme c'est le cas pour celles de l'histoire et la géographie, dépendent de faits concrets actuels pour leur essence. Nous pouvons illustrer cette caractéristique par le moyen de la conception leibnizienne de plusieurs mondes *possibles*, dont l'un seulement est *actuel*. Dans tous les mondes possibles multiples, philosophie et mathématiques seront les mêmes ; les différences n'auront trait qu'aux faits particuliers dont les sciences descriptives tiennent la chronique. Donc une réalité par laquelle notre monde actuel est distingué de tous les autres mondes abstraits possibles doit être ignorée tant par les mathématiques que par la philosophie. Les mathématiques et la philosophie diffèrent cependant dans leur manière de traiter les propriétés générales qui font l'accord de tous les mondes possibles ; car, tandis que les mathématiques, partant de propositions comparativement simples, cherchent à construire par synthèse déductive des résultats de plus en plus complexes, la philosophie, partant des données de la connaissance commune, cherche à les purifier et à les généraliser en les énonçant les plus simples de forme abstraite qui puissent être obtenus à partir d'elles par analyse logique » (RUSSELL, 1926, p. 190).

introduire aucune variable apparente... Ainsi les propriétés visées dans l'énoncé du principe d'induction ne peuvent être que celles qu'on peut énoncer sans employer les mots tels que : *un, quelque, tout, le*. *Mais si cette restriction n'est pas atténuée par un axiome, elle rendra invalides la plupart des emplois courants de l'induction* ».

Rien ne rendait absolument contraignante, du point de vue de Russell, une telle conclusion, qui ne se justifie que si l'on admet avec Richard et Poincaré que les paradoxes sémantiques consistent dans un cercle vicieux et que tous les paradoxes relèvent de la même erreur. Mais une fois admis ces principes, que Zermelo déjà contestait, Russell est contraint de leur trouver une solution propre et d'introduire, à cet effet, l'axiome de réductibilité : « Mais la modification précédente de l'Epiménide prouve seulement qu'un énoncé contenant une variable réelle  $x$  et une variable apparente n'est pas *identique* à un énoncé quelconque de la forme  $\varphi x$ . Elle ne prouve nullement qu'il n'est pas *équivalent* à un tel énoncé... L'Epiménide n'empêche nullement d'admettre que tout énoncé contenant  $x$  et une variable apparente est *équivalent*, pour toutes les valeurs de  $x$ , à quelque énoncé,  $\varphi x$  ne contenant aucune variable apparente. Avec cette assumption, les emplois usuels de l'induction se trouvent justifiés et parmi eux aussi ceux que M. Poincaré a critiqués <sup>1</sup>. En même temps, la contradiction de l'Epiménide est exclue <sup>2</sup> : « Dans la plupart des énonciations que nous voulons faire en mathématiques, si une proposition  $p$  se présente autrement que dans une matrice, elle peut être remplacée par toute autre proposition équivalente sans altérer la vérité ou la fausseté de notre énoncé. Et si l'on a une fonction  $\varphi x$ , où l'argument  $x$  est une variable apparente,  $\varphi$  peut être ordinairement remplacée par toute autre fonction  $\psi$  ayant la même extension, c'est-à-dire vraie pour toutes les valeurs de  $x$ . Il en est de même pour une matrice  $p/a$ . Mais dans le cas de l'Epiménide, cela n'est plus vrai. Il faut tenir compte de la matière de ses énonciations, et l'on ne peut pas leur substituer des énonciations équivalentes ne contenant pas le même nombre de variables apparentes. Ainsi notre assumption qu'un énoncé contenant  $x$  et une variable apparente a toujours la même extension que quelque énoncé contenant  $x$  et aucune variable apparente ne nous permet pas de substituer l'un à l'autre dans l'Epiménide, mais nous permet de faire cette substitution dans tous les cas ordinaires ».

#### PUBLICATIONS

— *Sur les conditions qui permettent d'utiliser les matrices russelliennes des antinomies* (1905) *pour exprimer les théorèmes de limitations internes des formalismes* (*Notre-Dame Journal of Symbolic Logic*, vol. VII, Number 1, janvier 1967, p. 1-19).

---

(1) Russell, 1906 (1), p. 647-648.

(2) Russell, 1906 (1), p. 648.

— *Sull'influenza innovatrice della logica matematica in filosofia*, trad. par Pia Bozzi (Annuario Internazionale della Scienza e della Tecnica, Mondadori, Milan, 1967).

— *La théorie kantienne de l'espace à la lumière de la théorie des groupes de transformations* (*The Monist*, vol. 51, 3 juillet 1967).

— *De la Logique à la Théologie* (*Cinq études sur Aristote*, Flammarion, mai 1967).

#### CONFÉRENCES

Université et Société de logique et d'histoire des sciences de Bruxelles, Universités de Londres et d'Oxford.