Leçon N. 2 - 11 mars 2024

Alessandro MORBIDELLI

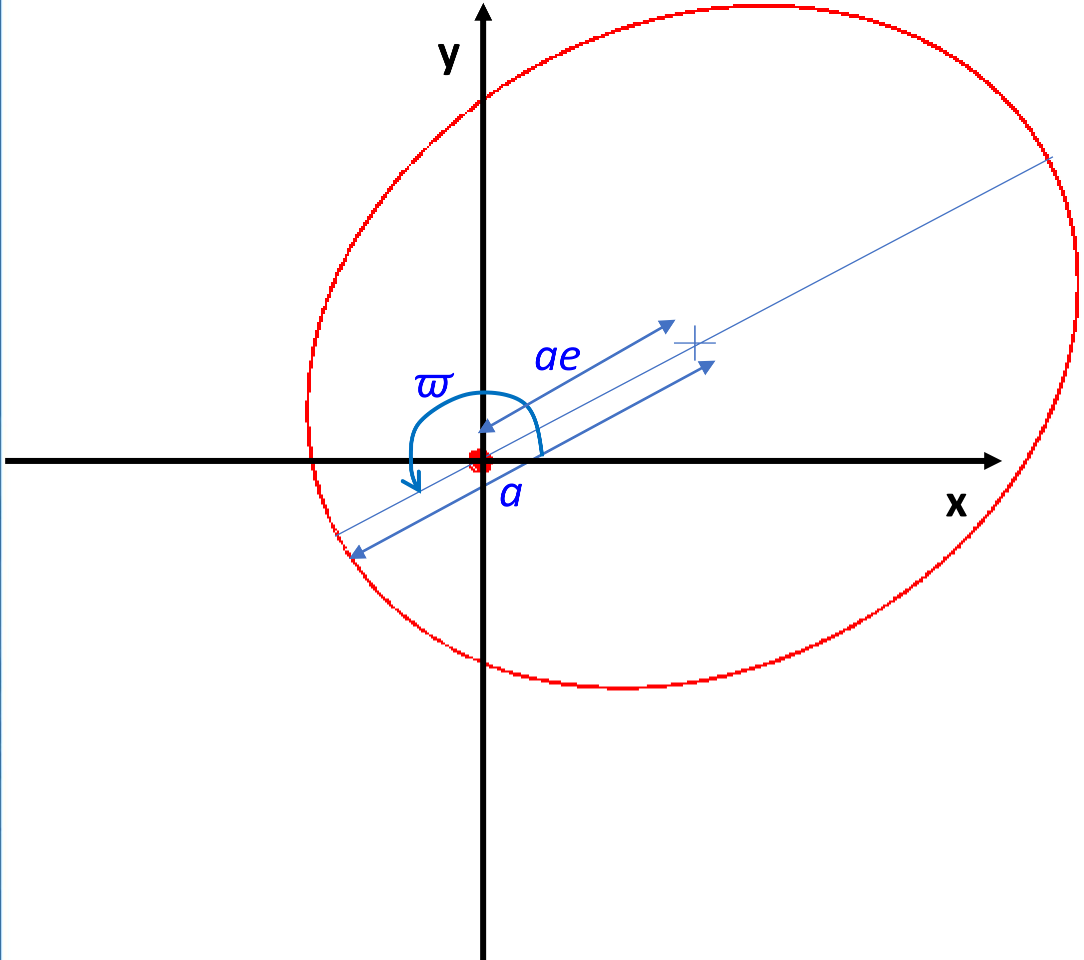
Chaire

Formation planétaire: de la Terre aux exoplanètes

Les interactions dynamiques

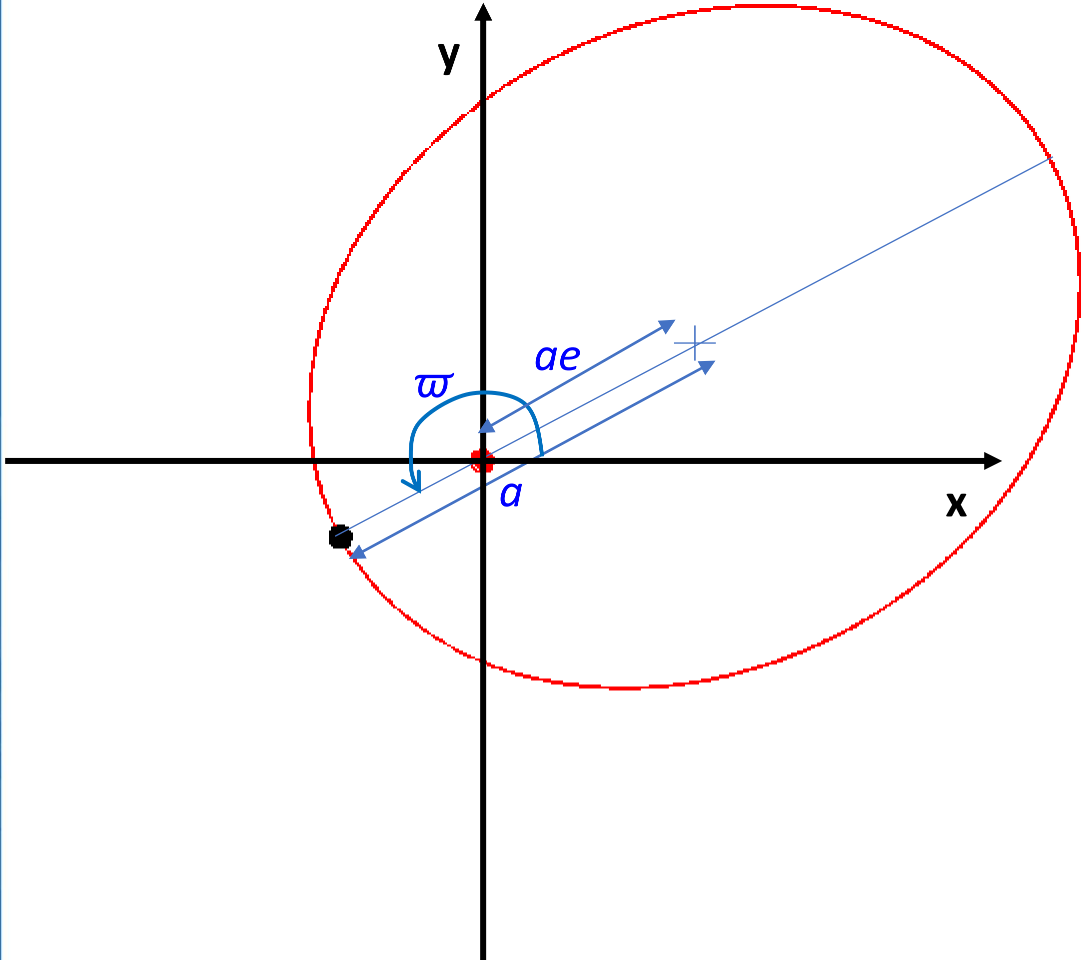
Les orbites elliptiques

a: demi grand axe
e: excentricité
ϖ: longitude du périhélie



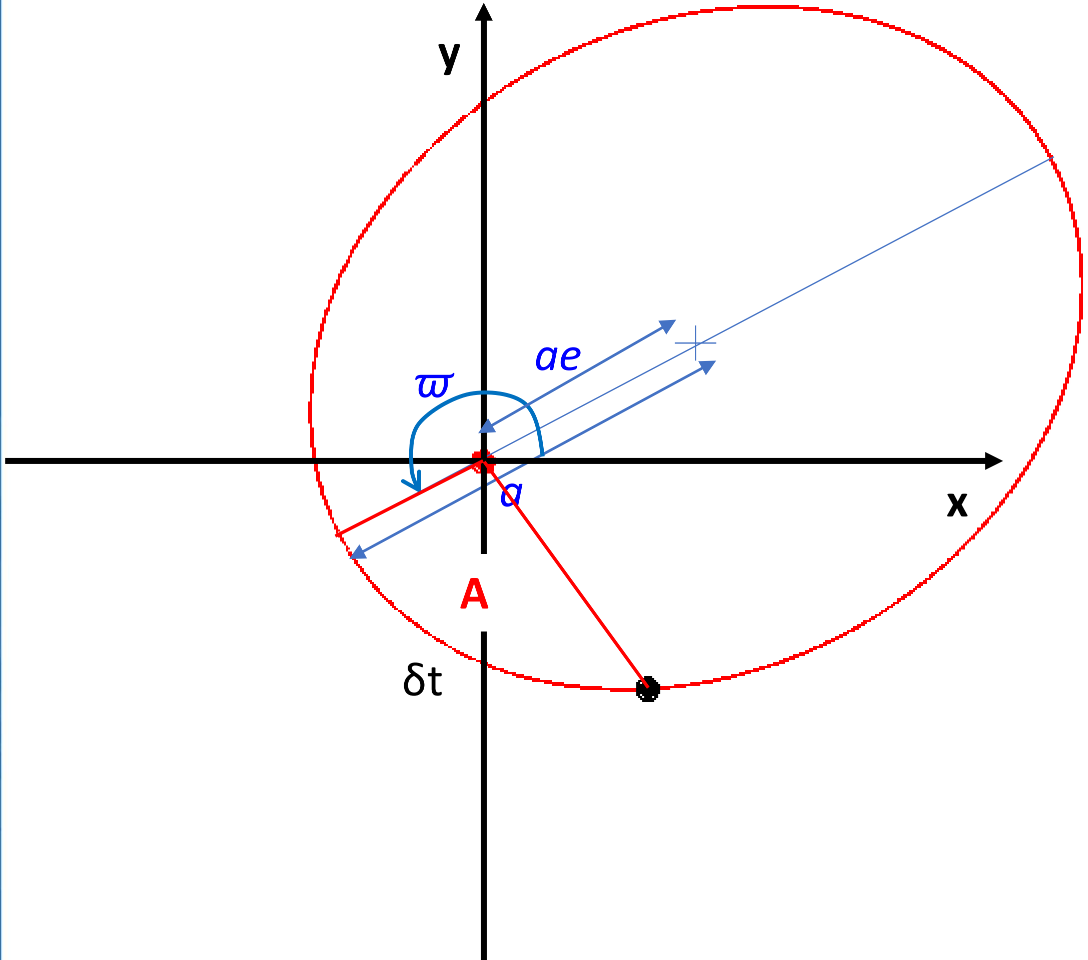
Les orbites elliptiques

a: demi grand axe
e: excentricité
ϖ: longitude du périhélie



Les orbites elliptiques

a: demi grand axe
e: excentricité
ϖ: longitude du périhélie



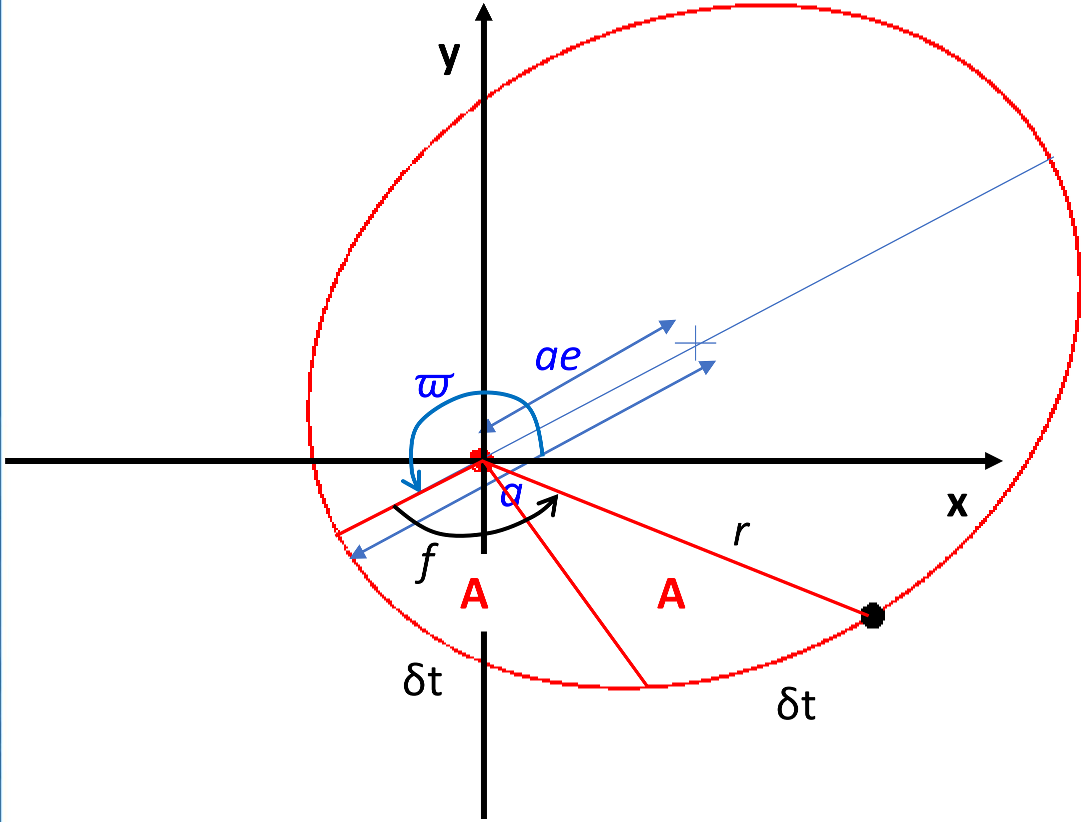
Les orbites elliptiques

a: demi grand axe
e: excentricité
ϖ: longitude du périhélie

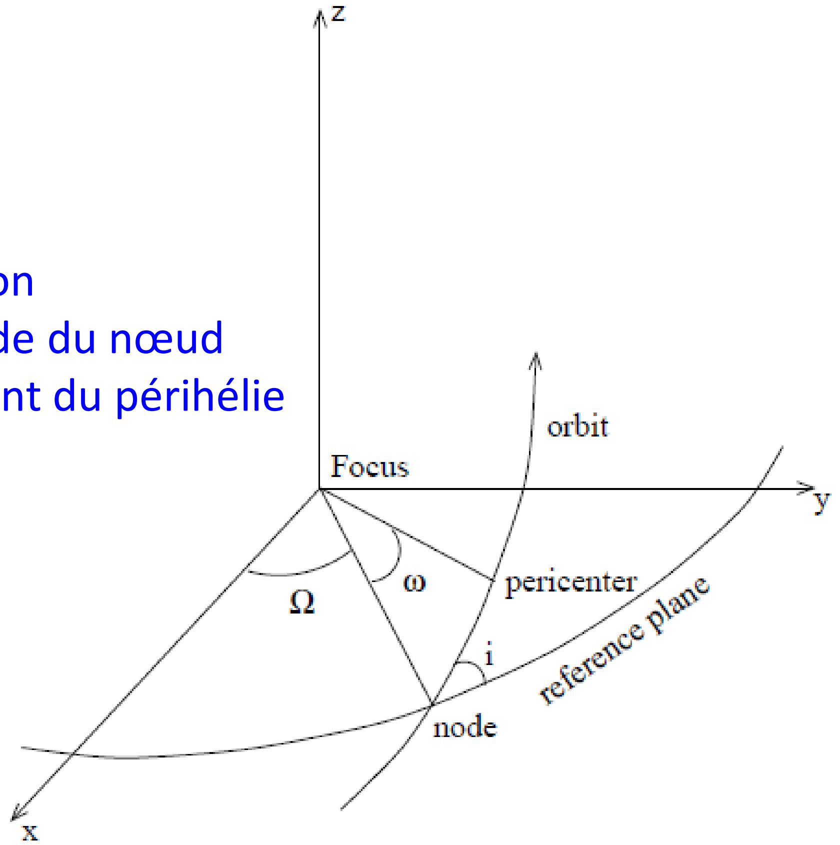
$l = 2\pi\, A(t)/A_{tot}$: anomalie moyenne

$$E - e \sin E = M$$

$$r = a(1 - e\cos E)\ , \quad \cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}$$

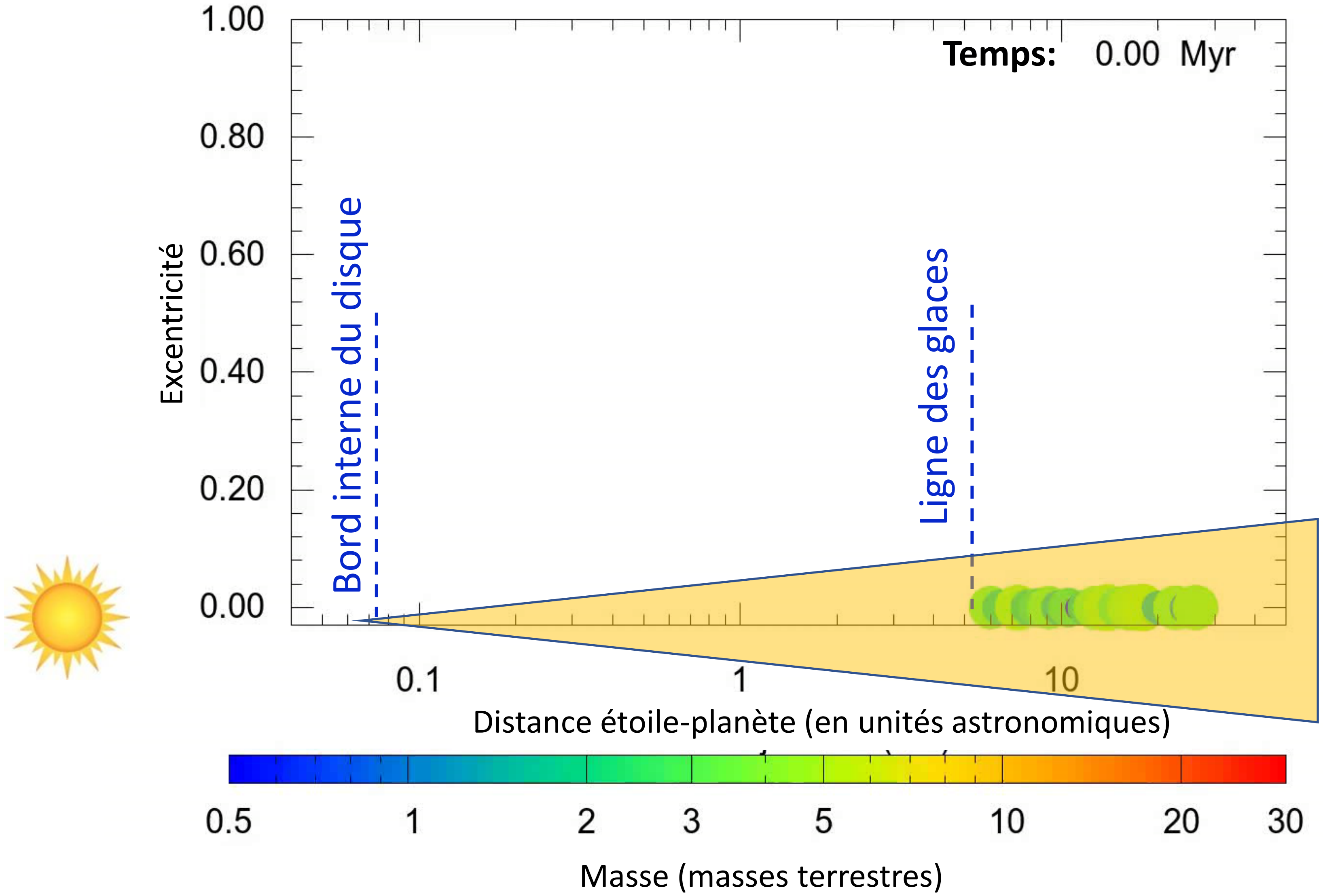


i: inclinaison
Ω: longitude du nœud
ω: argument du périhélie
$\varpi = \Omega + \omega$



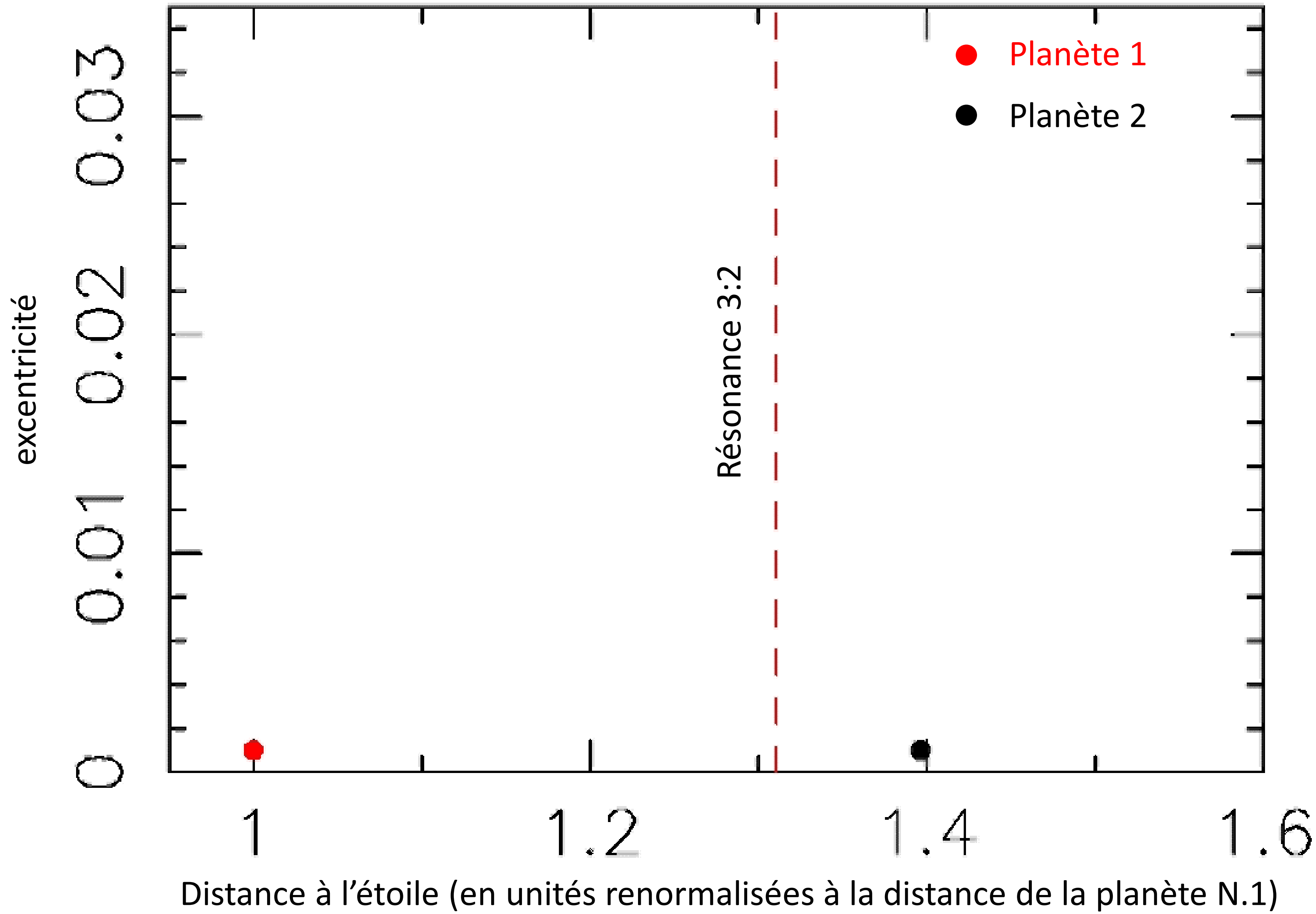
La période orbitale dépend uniquement du demi grand axe

Exemple de migration d'un système de Super-Terres

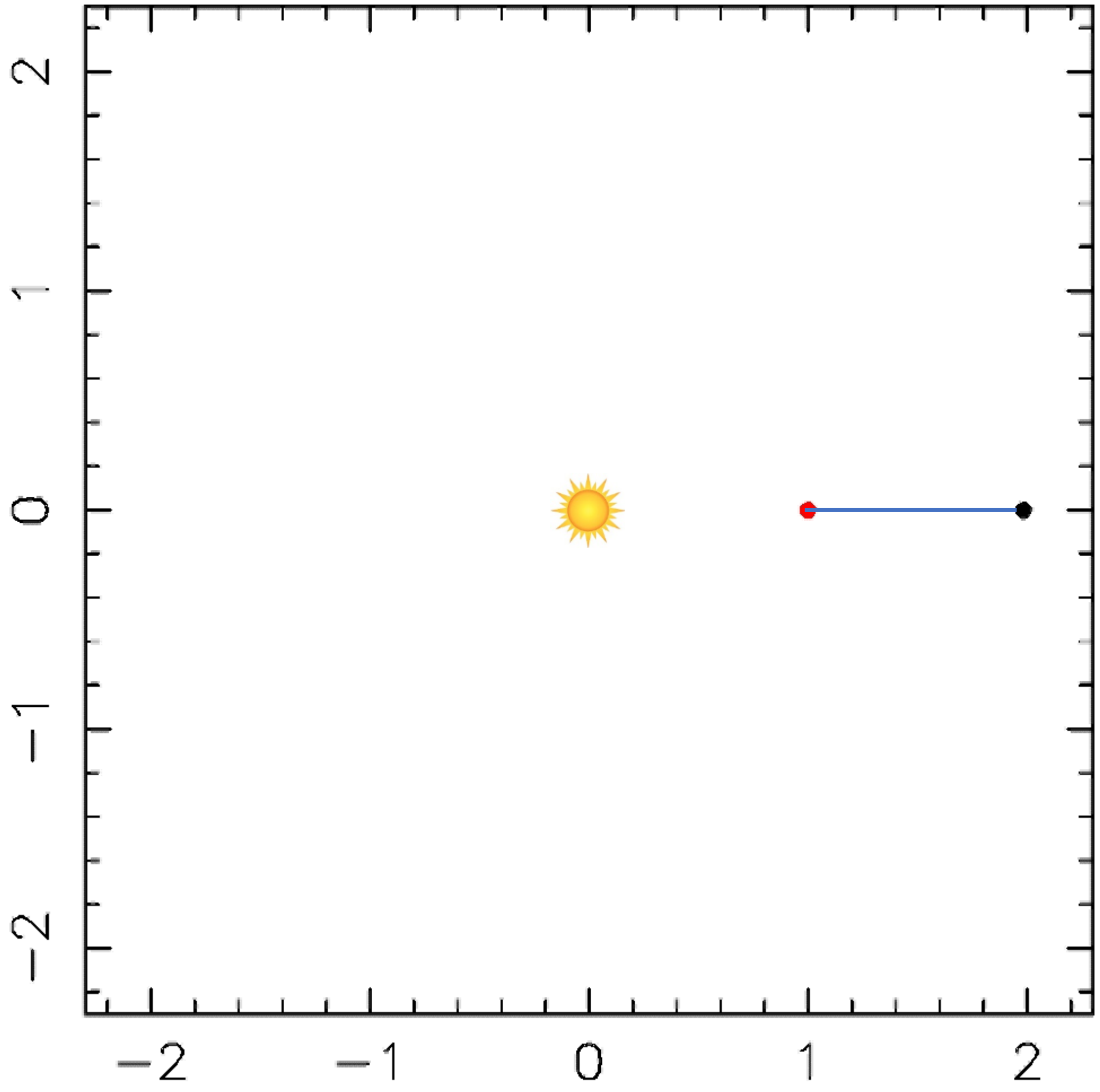


Animation de A. Izidoro (Rice U.)

Migration convergente de deux planètes



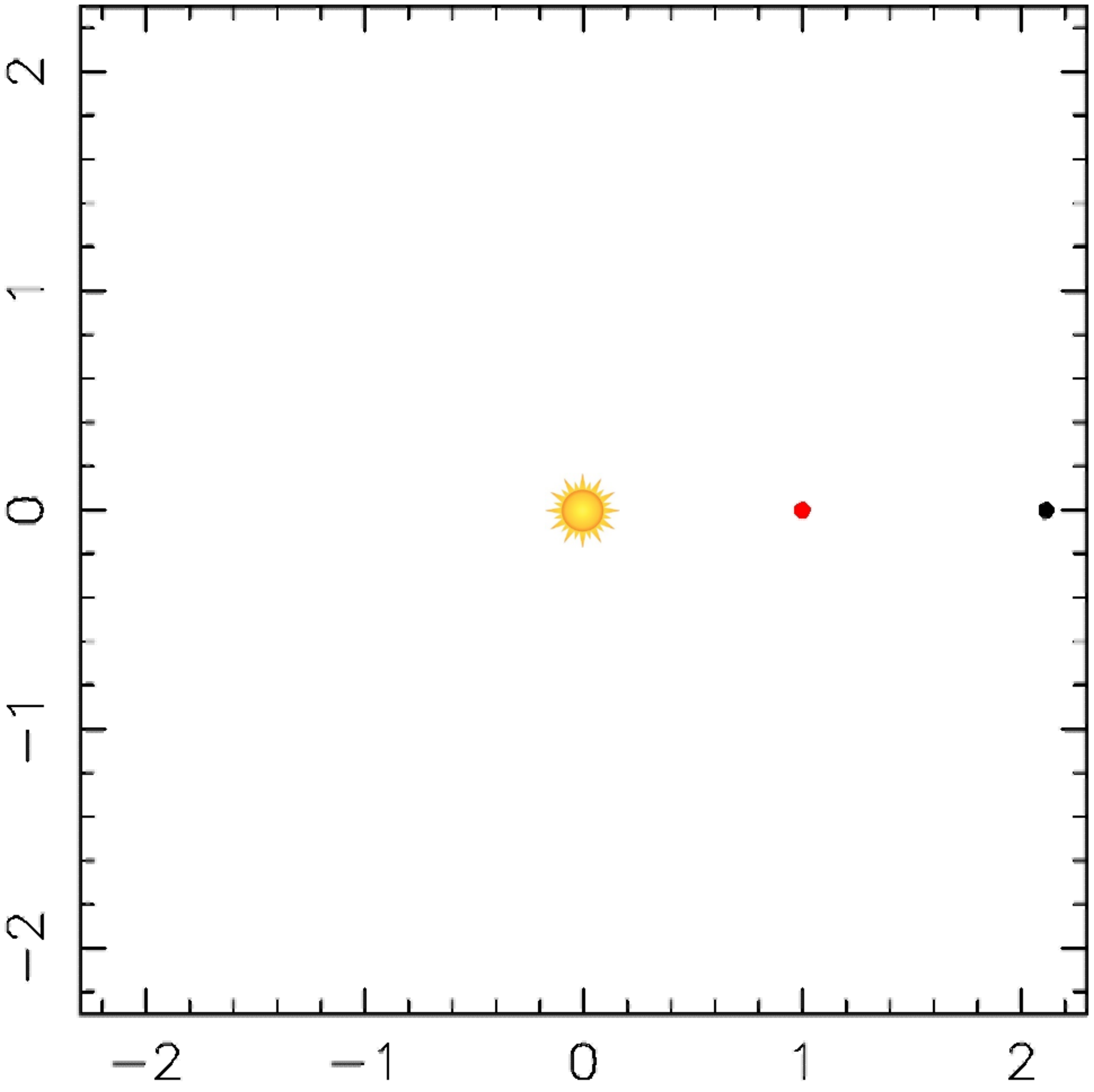
Exemple de résonance (2:1)



- Planète 1 (circulaire)
- Planète 2 (elliptique)

Conjonction = distance d’approche minimale

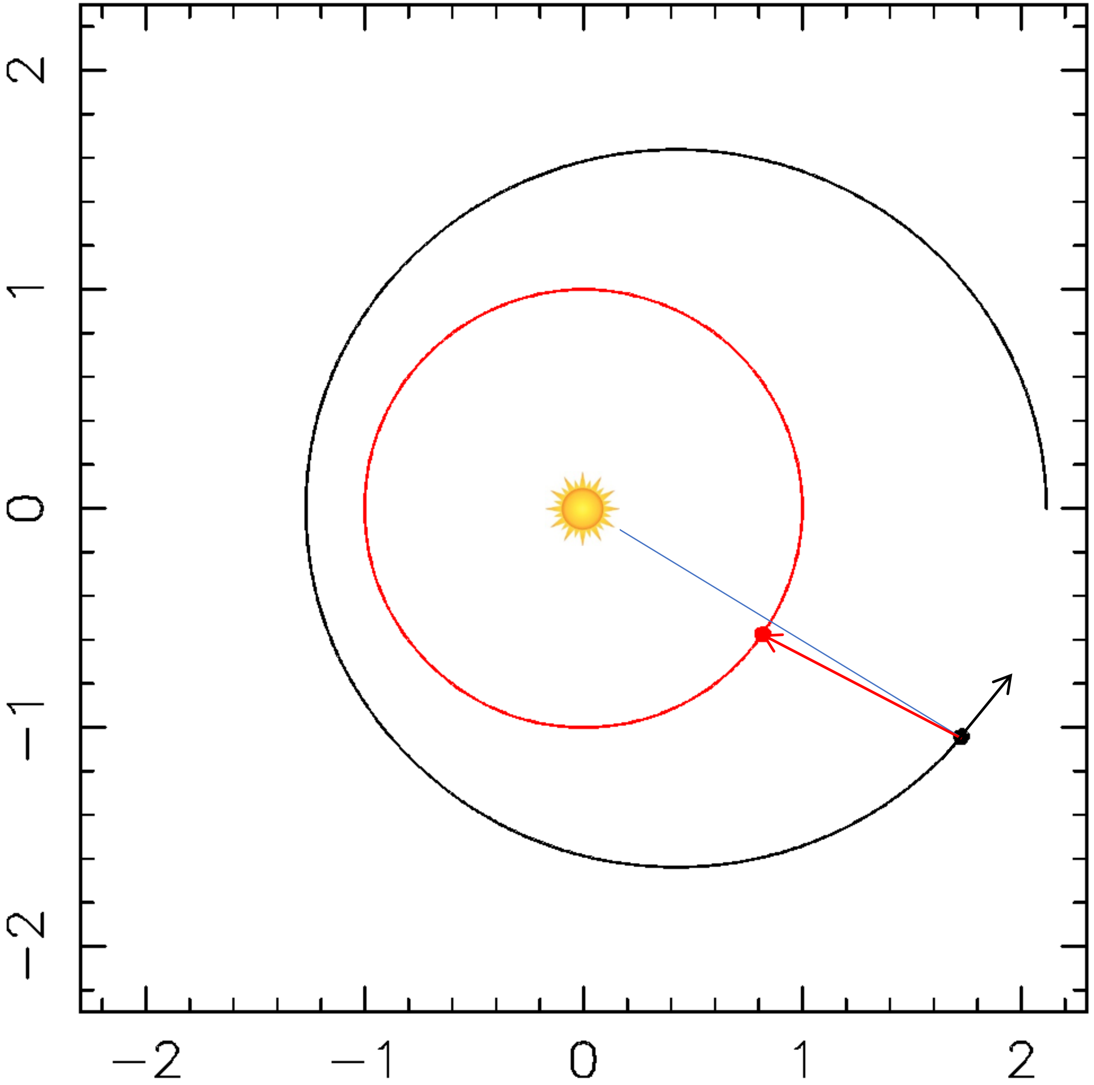
Cas légèrement extérieur à la résonance (2:1)



● Planète 1 (circulaire)

● Planète 2 (elliptique)

Configuration d'approche minimale

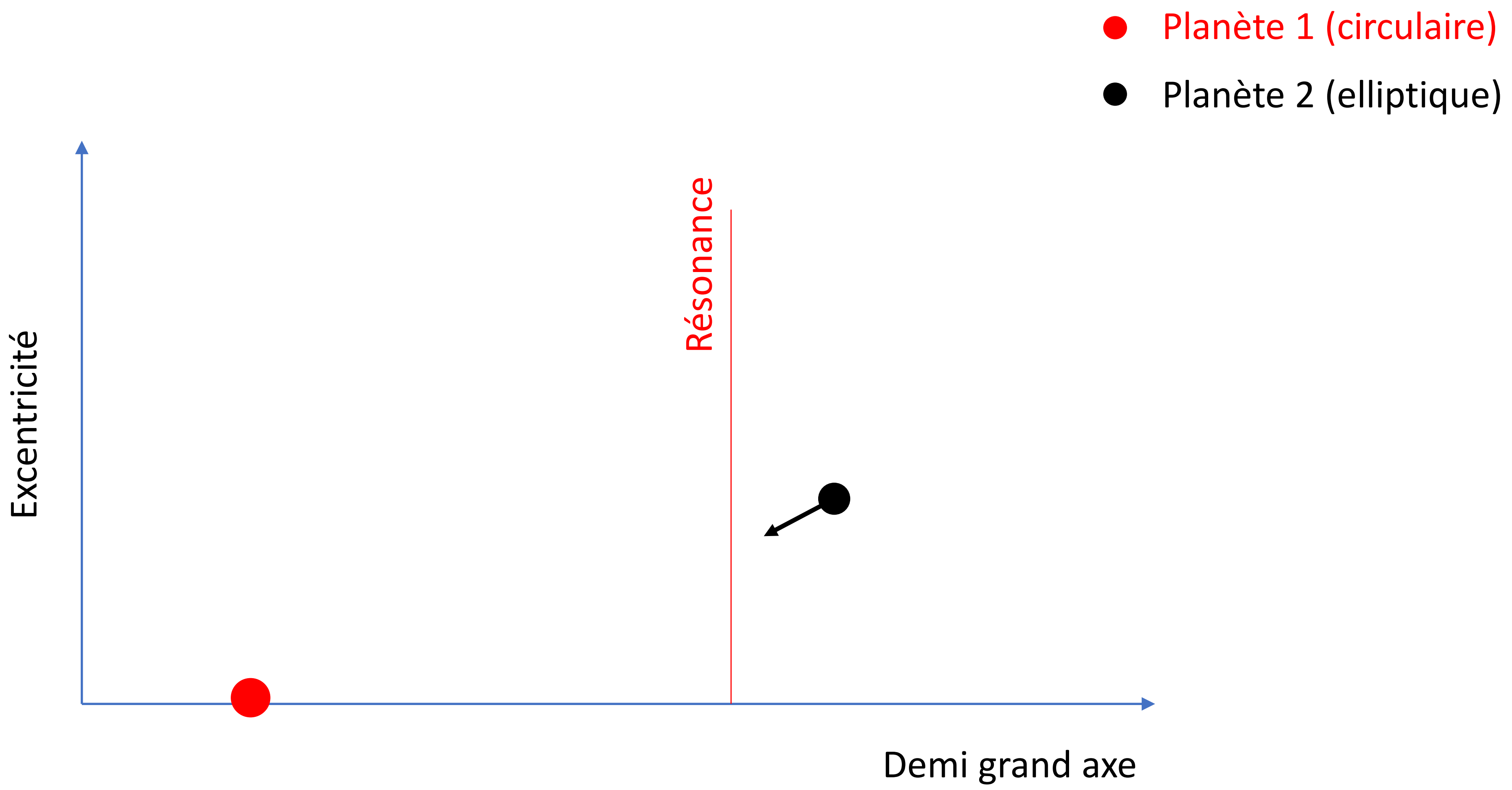


● Planète 1 (circulaire)

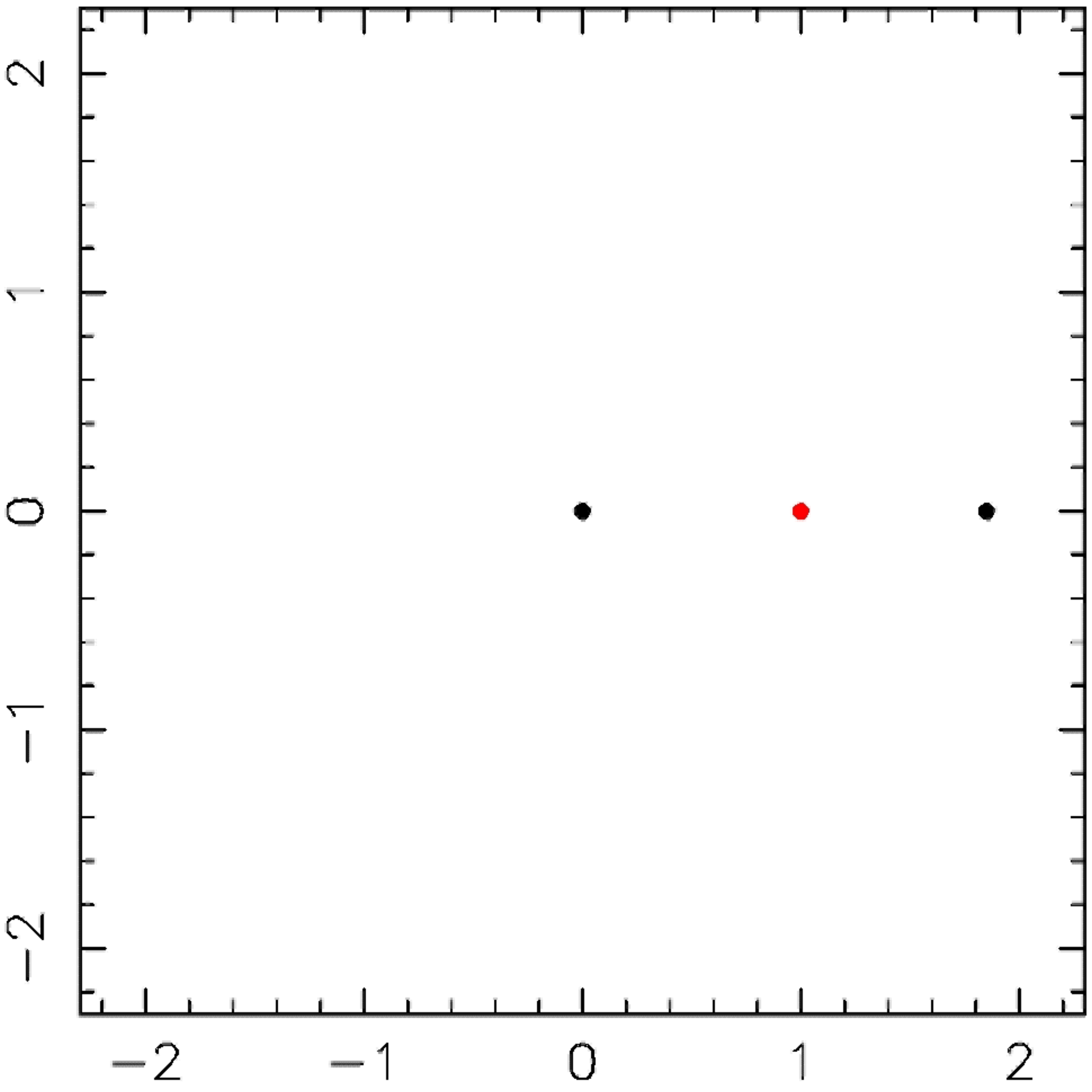
● Planète 2 (elliptique)

- Le mouvement radial positif de la planète est freiné (l'excentricité diminue)
- La vitesse azimutale est aussi freinée (le demi-grand axe diminue)

Changement par rapport à la résonance



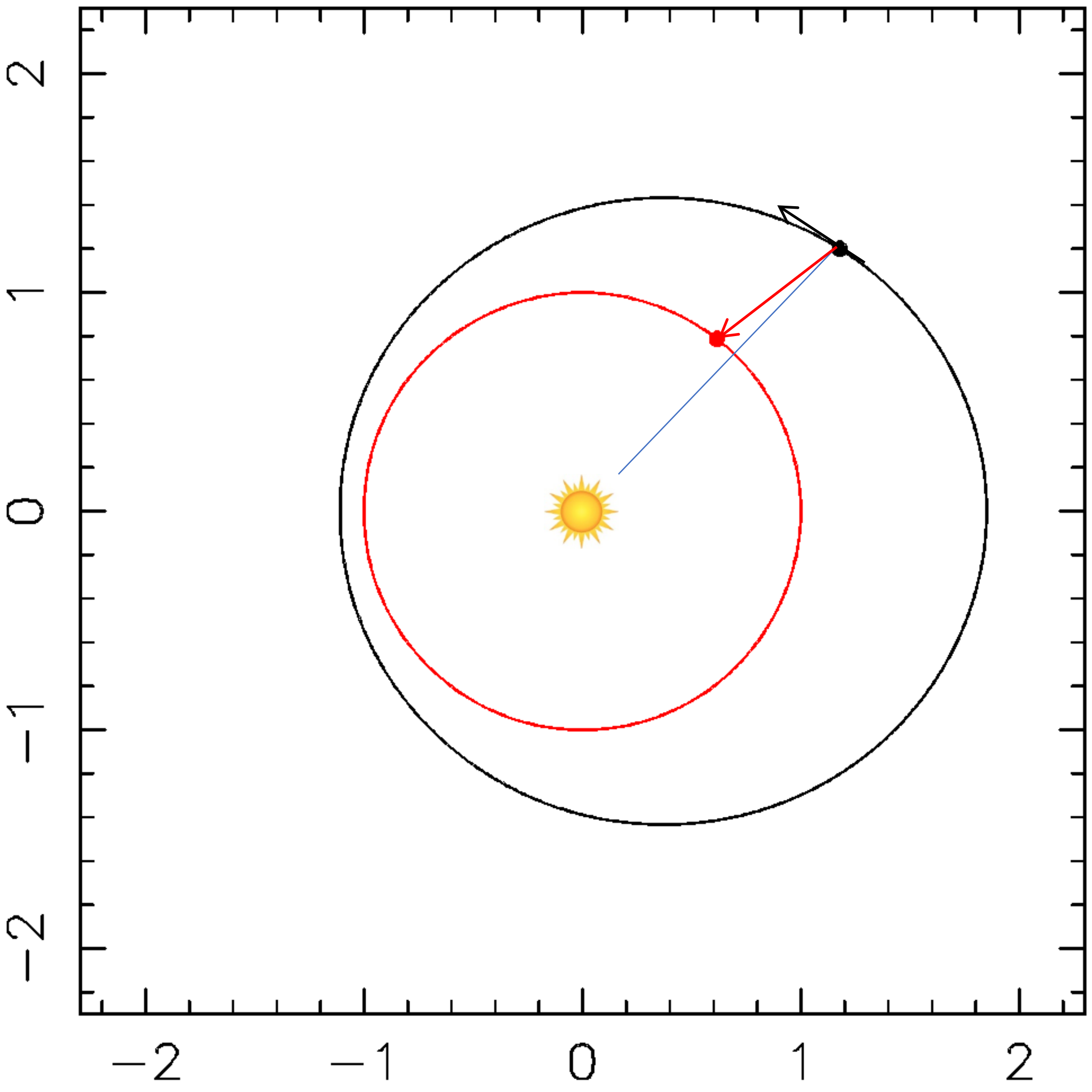
Cas légèrement intérieur à la résonance (2:1)



- Planète 1 (circulaire)
- Planète 2 (elliptique)

COLLÈGE DE FRANCE 1530

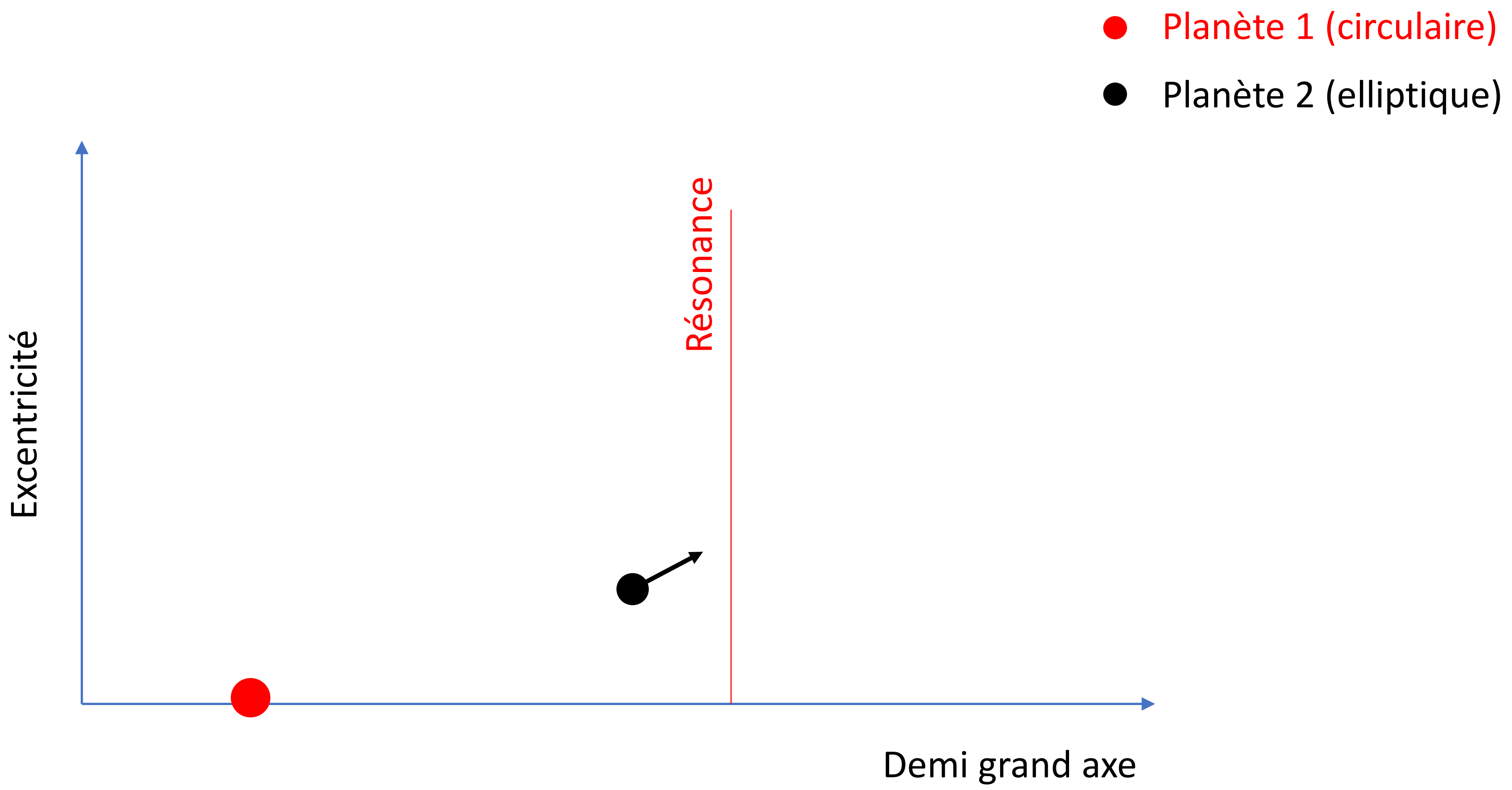
Configuration d'approche minimale



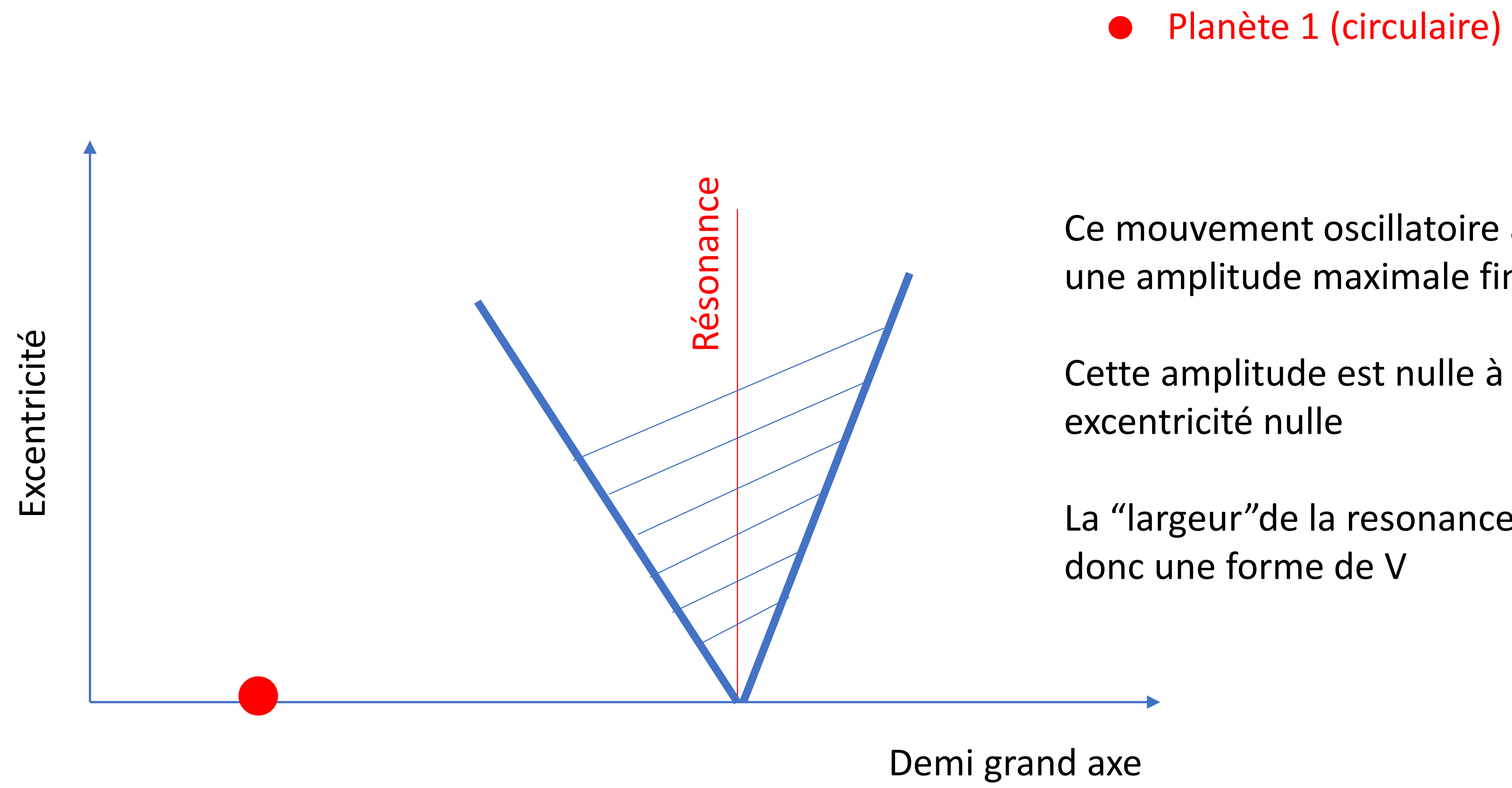
- Planète 1 (circulaire)
- Planète 2 (elliptique)

- Le mouvement radial négatif de la planète est accéléré (l'excentricité augmente)
- La vitesse azimutale est aussi accélérée (le demi-grand axe augmente)

Changement par rapport à la résonance



Mouvement oscillatoire autour de la résonance



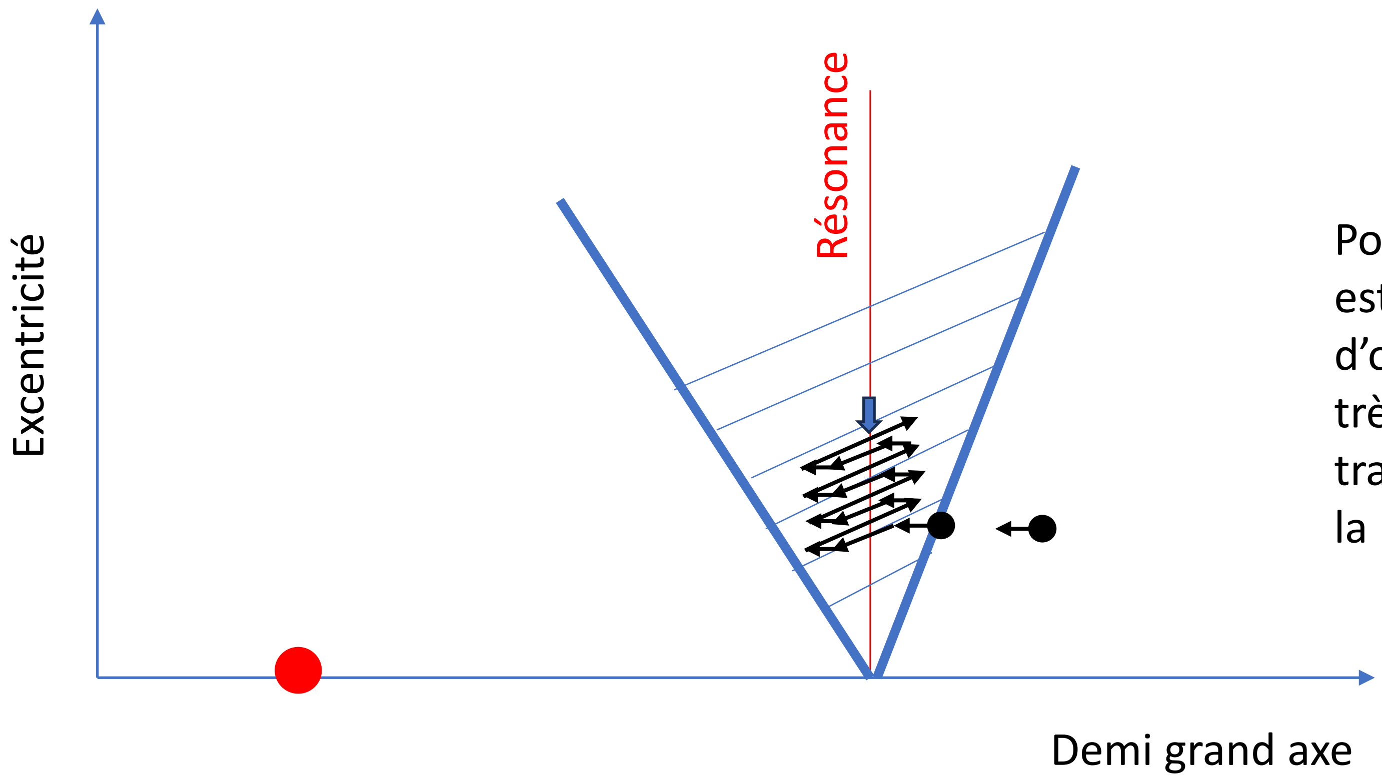
Ce mouvement oscillatoire a une amplitude maximale finie.

Cette amplitude est nulle à excentricité nulle

La “largeur”de la resonance a donc une forme de V

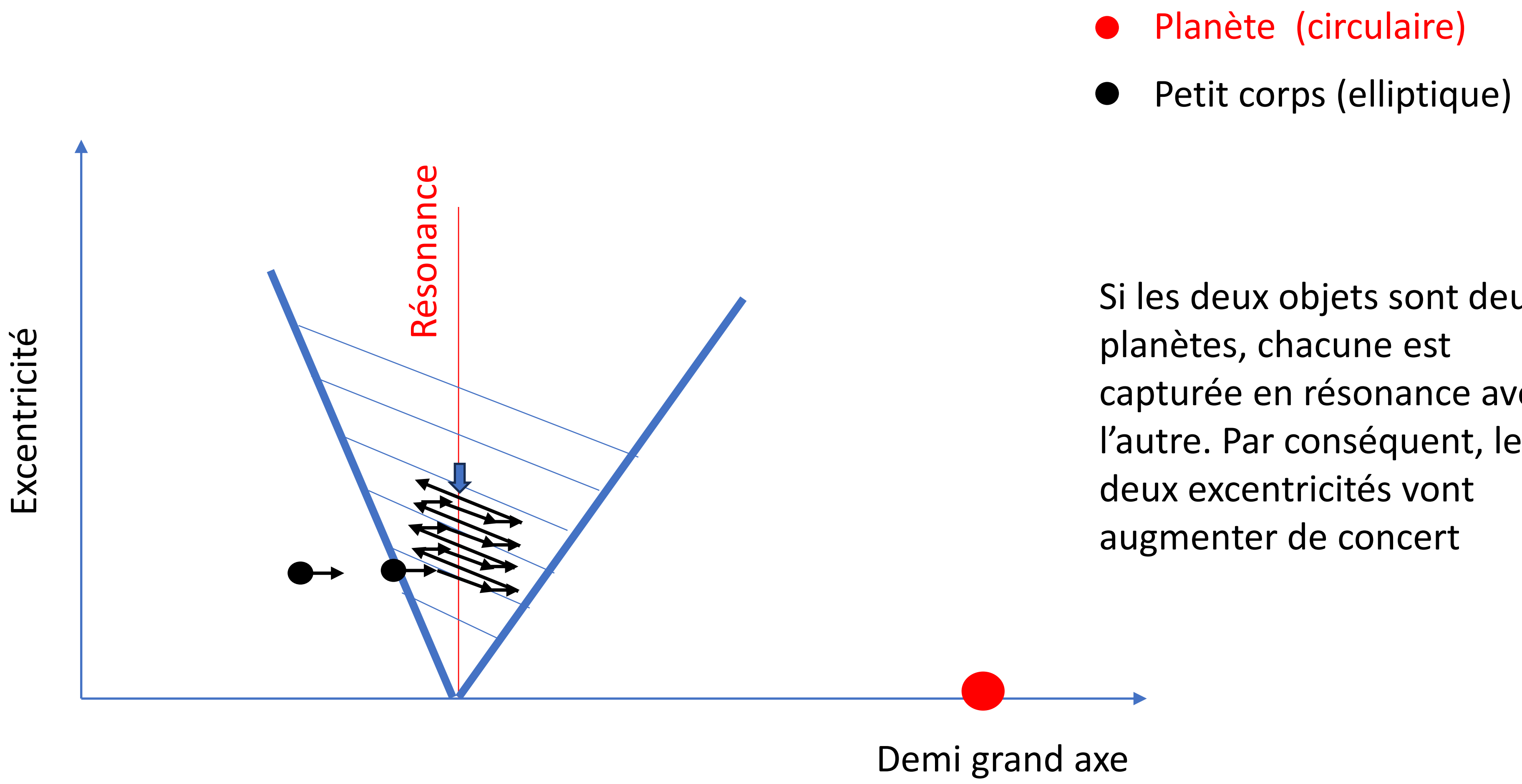
Migration convergente, capture en résonance et croissance de l'excentricité

- Planète (circulaire)
- Petit corps (elliptique)



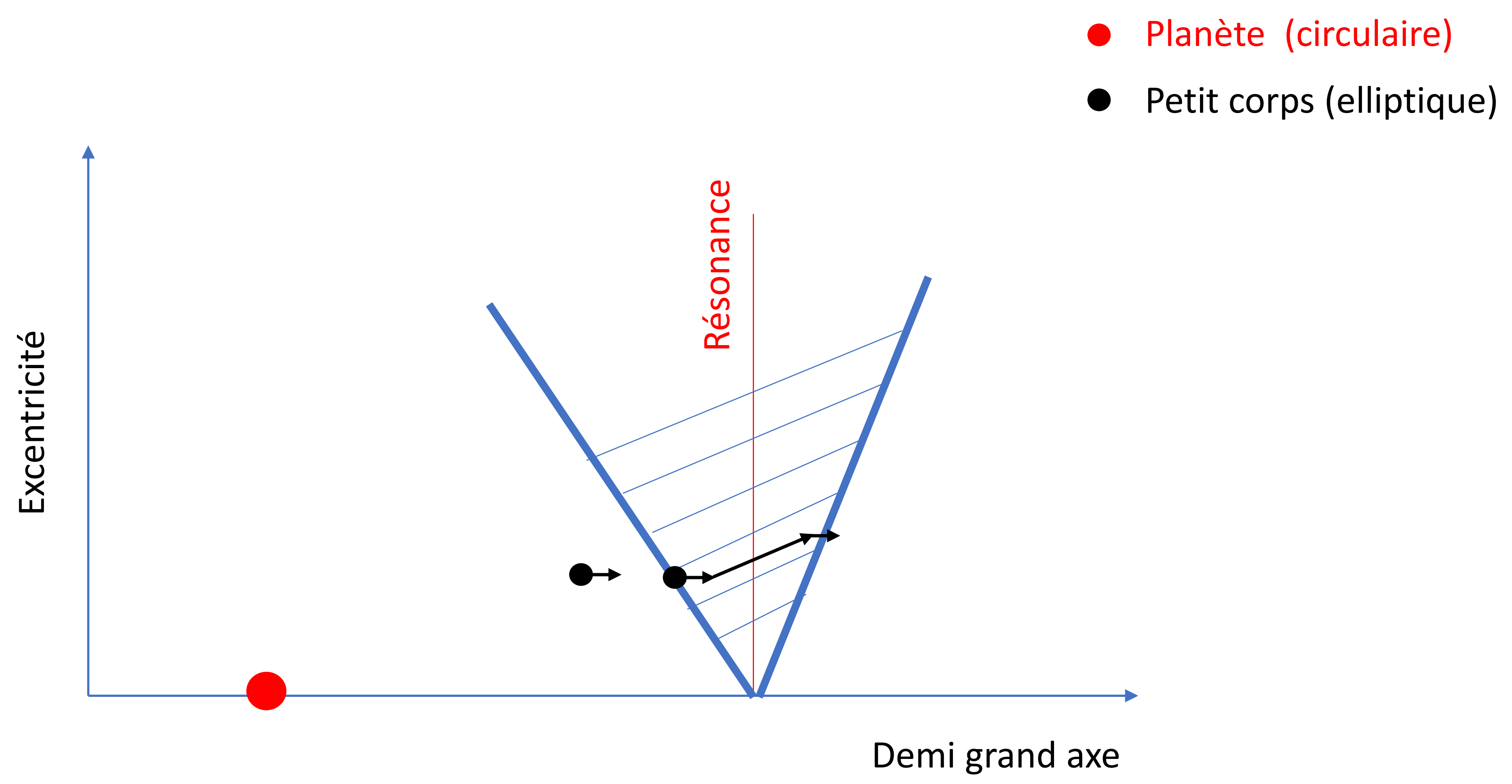
Pour la capture en résonance il est essentiel que la période d'oscillation résonnante soit très inférieur du temps de traversée de la résonance dû à la migration

Migration convergente, capture en résonance et croissance de l'excentricité

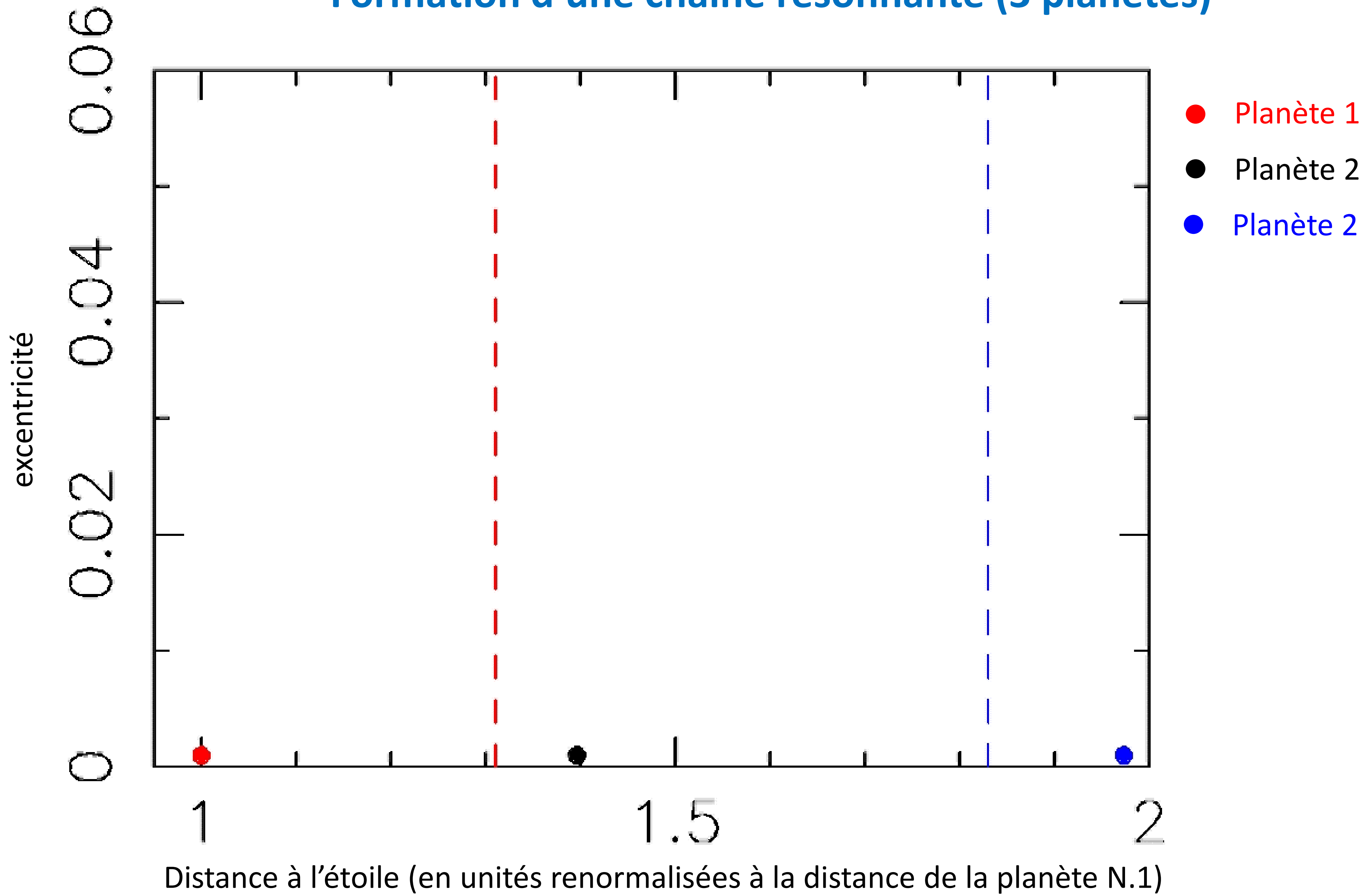


Si les deux objets sont deux planètes, chacune est capturée en résonance avec l'autre. Par conséquent, les deux excentricités vont augmenter de concert

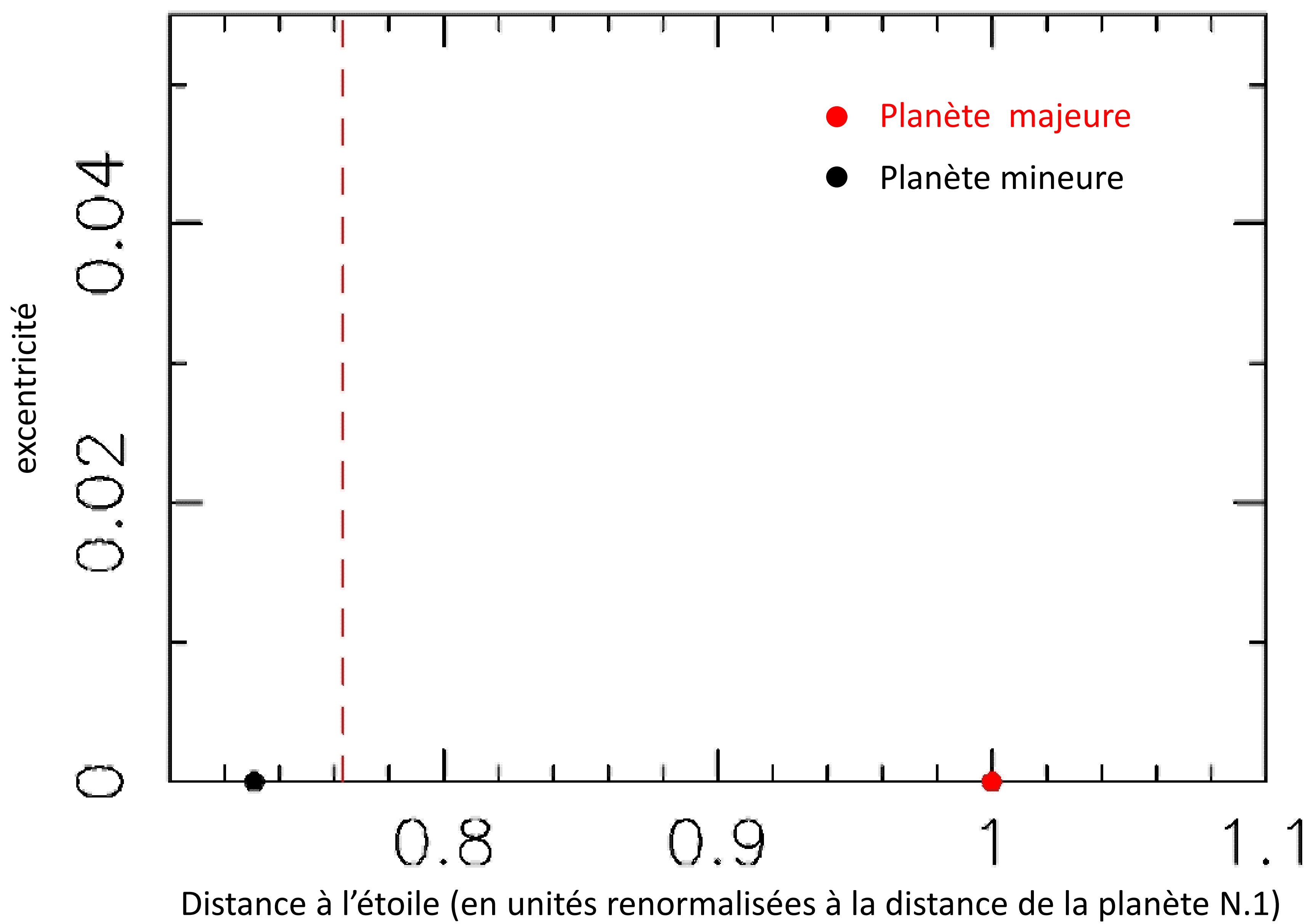
Migration divergente, pas de capture



Formation d'une chaîne résonnante (3 planètes)



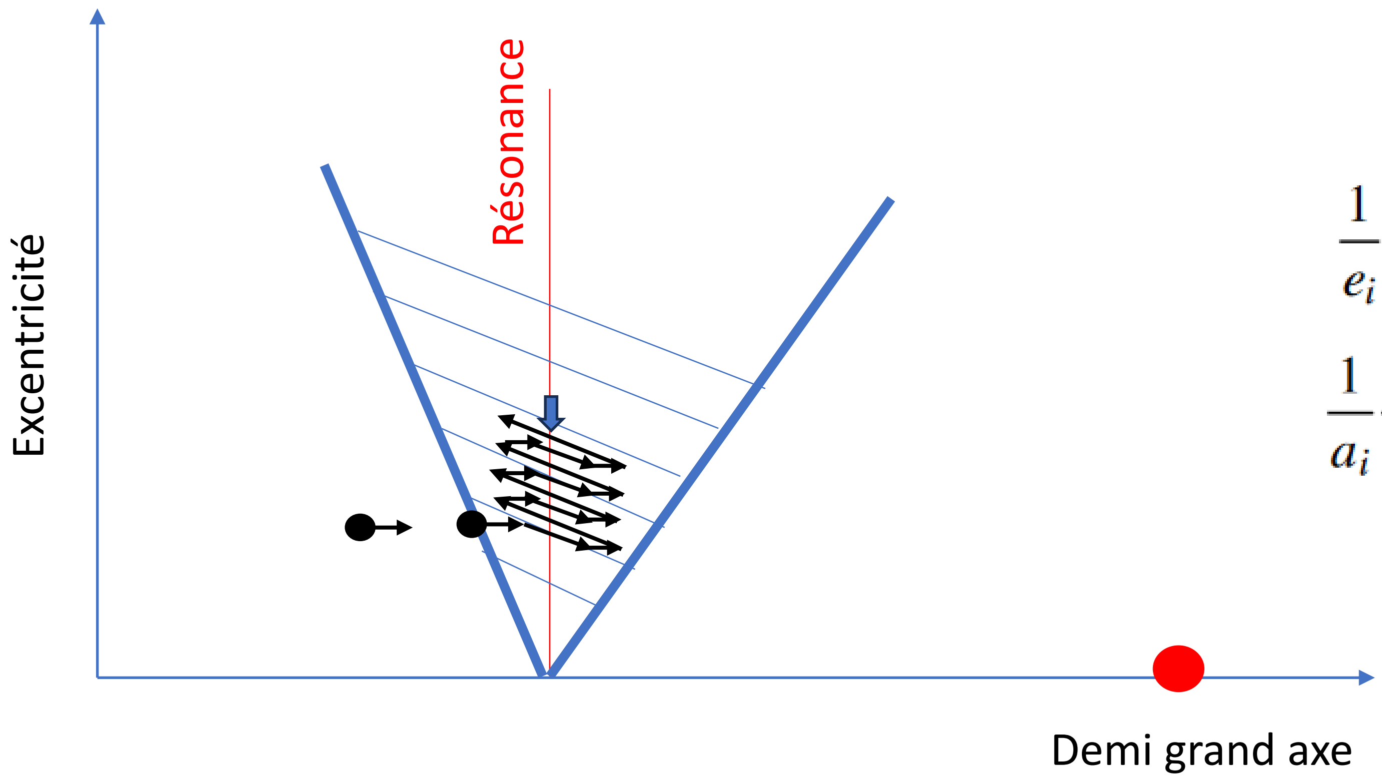
Instabilité après capture en résonance



Instabilité après capture en résonance

● Planète (circulaire)

● Petit corps (elliptique)

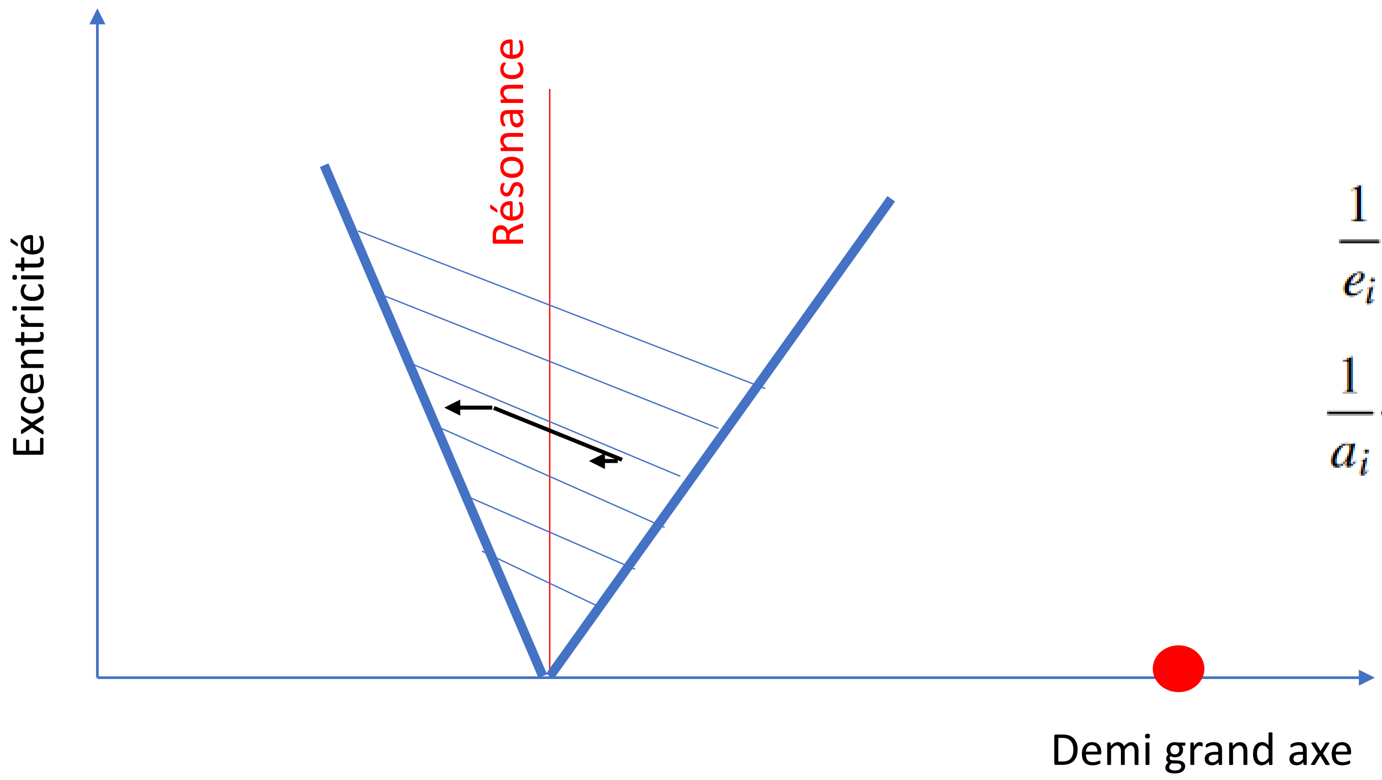


$$\frac{1}{e_i}\frac{de_i}{dt} = -\frac{1}{\tau_{e,i}}$$

$$\frac{1}{a_i}\frac{da_i}{dt} = \left(-\frac{2pe_i^2}{\tau_{e,i}} - \frac{1}{\tau_{a,i}}\right).$$

Instabilité après capture en résonance

- Planète (circulaire)
- Petit corps (elliptique)



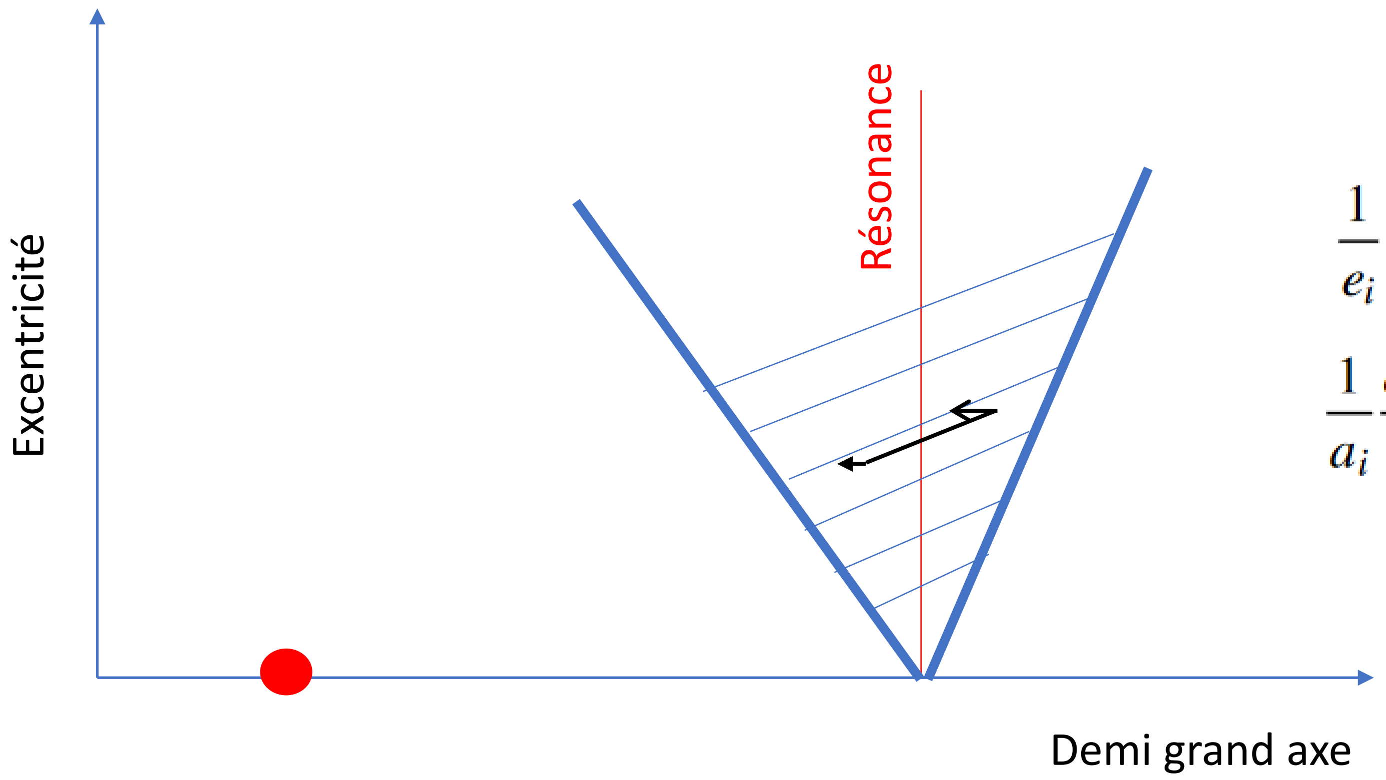
$$\frac{1}{e_i}\frac{de_i}{dt} = -\frac{1}{\tau_{e,i}}$$

$$\frac{1}{a_i}\frac{da_i}{dt} = \left(-\frac{2pe_i^2}{\tau_{e,i}} - \frac{1}{\tau_{a,i}}\right).$$

Instabilité après capture en résonance

● Planète (circulaire)

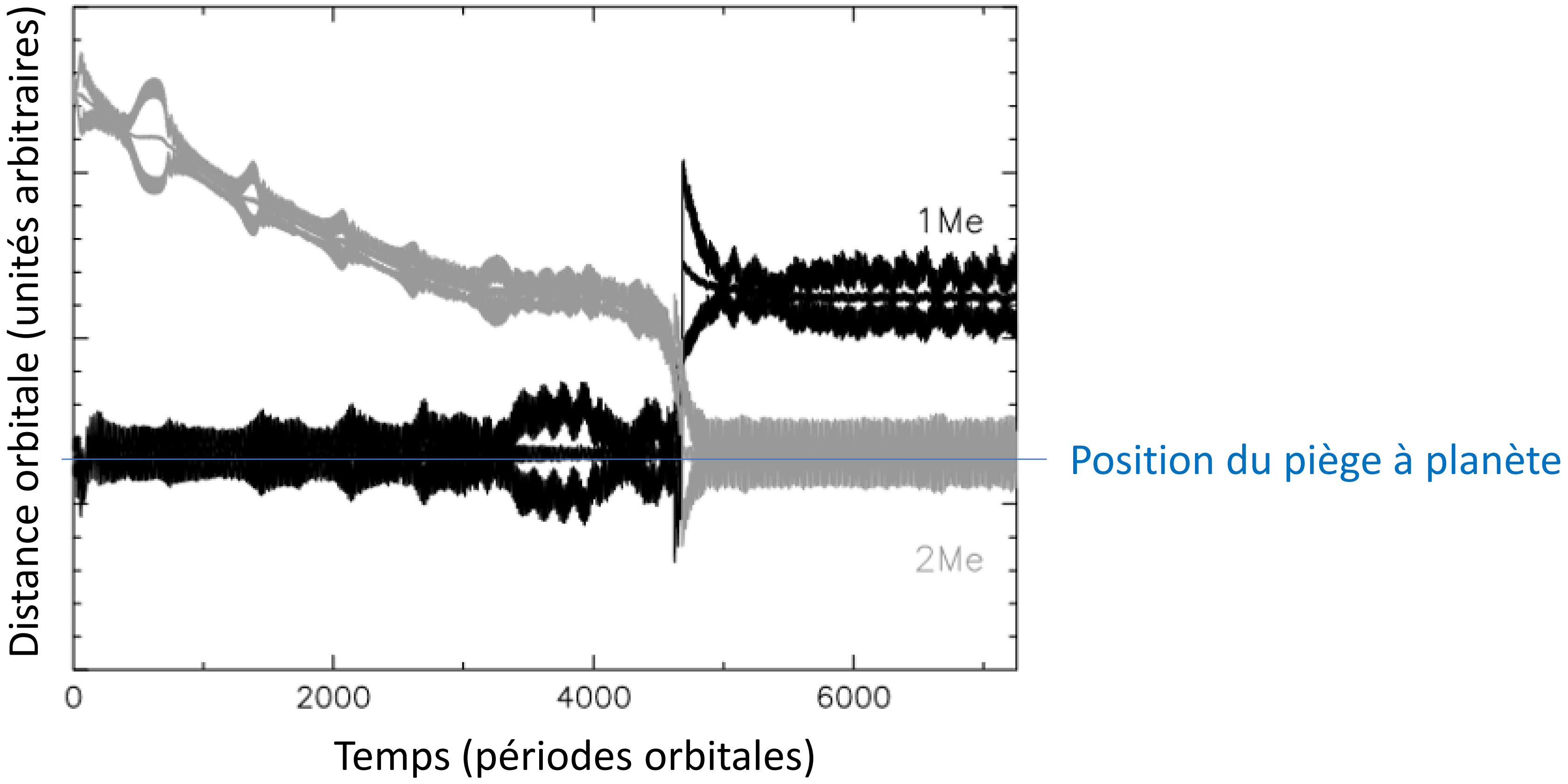
● Petit corps (elliptique)



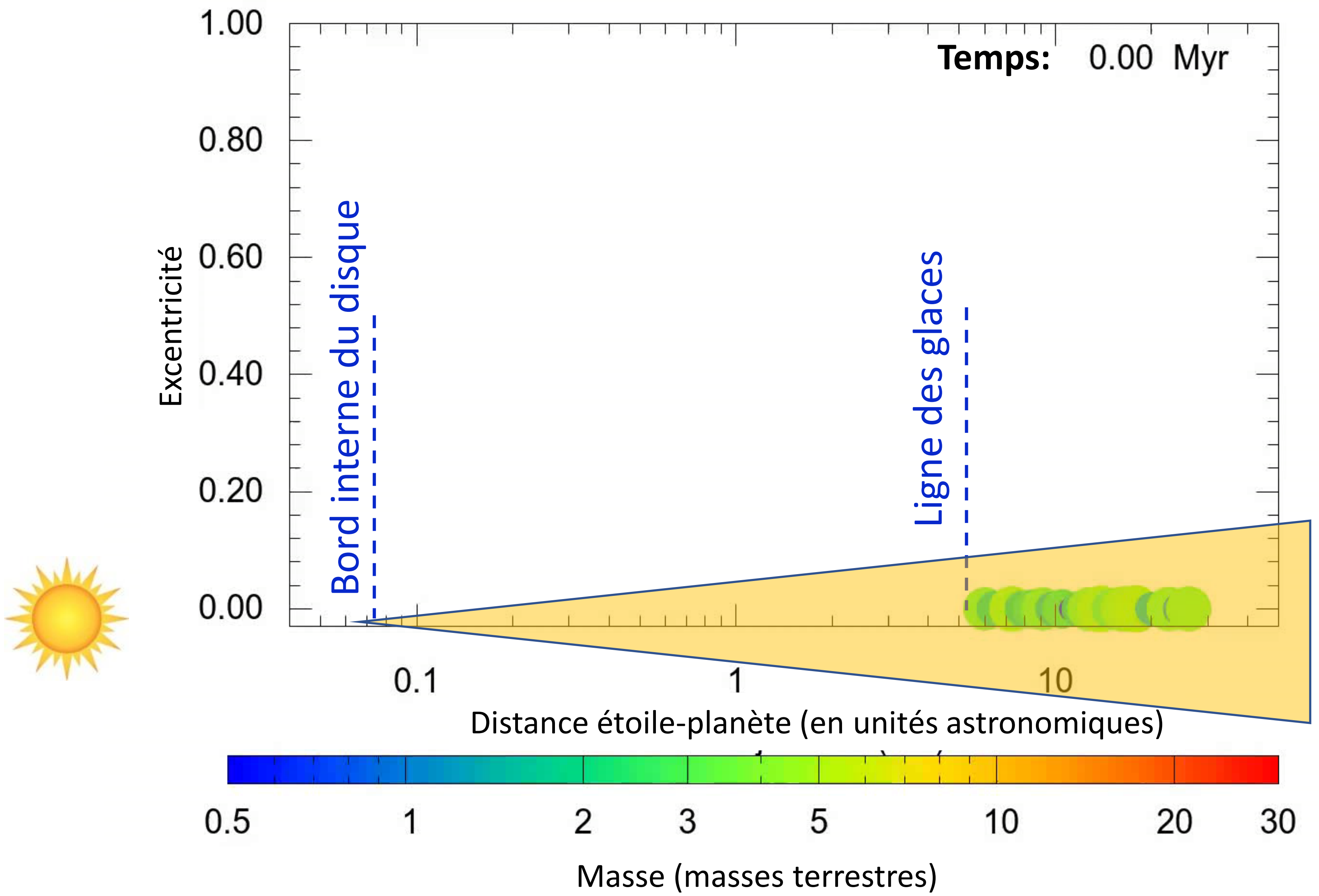
$$\frac{1}{e_i}\frac{de_i}{dt} = -\frac{1}{\tau_{e,i}}$$

$$\frac{1}{a_i}\frac{da_i}{dt} = \left(-\frac{2pe_i^2}{\tau_{e,i}} - \frac{1}{\tau_{a,i}}\right).$$

Echange de position sur un “piège à planètes”



Exemple de migration d'un système de Super-Terres

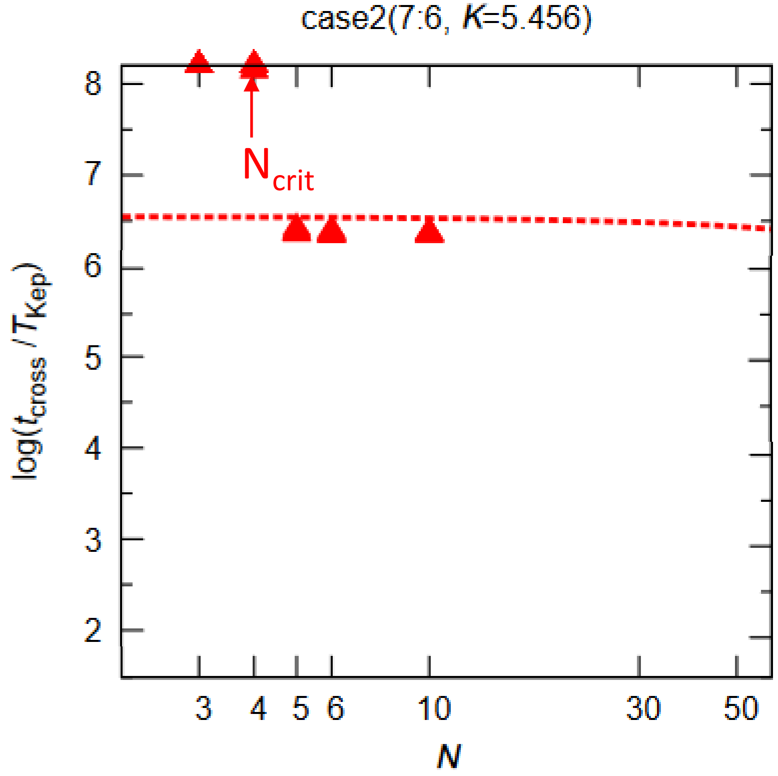


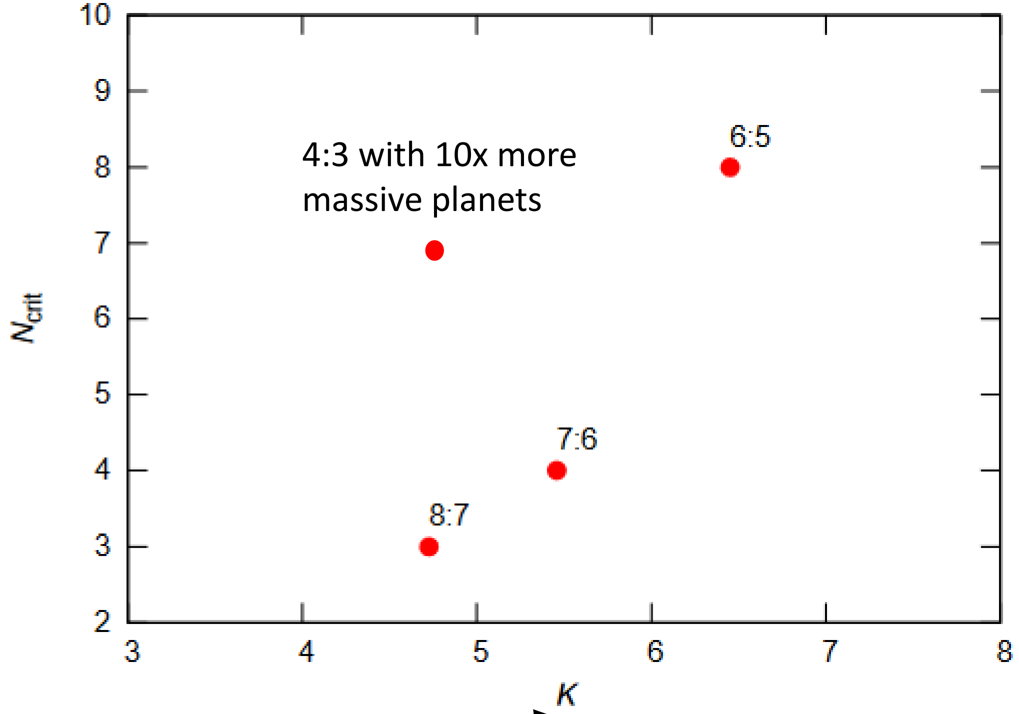
Animation de A. Izidoro (Rice U.)

Instabilité dynamique des chaînes de résonances des super-Terres

Après la disparition du gaz, les chaînes de résonances trop “complexes” deviennent instables

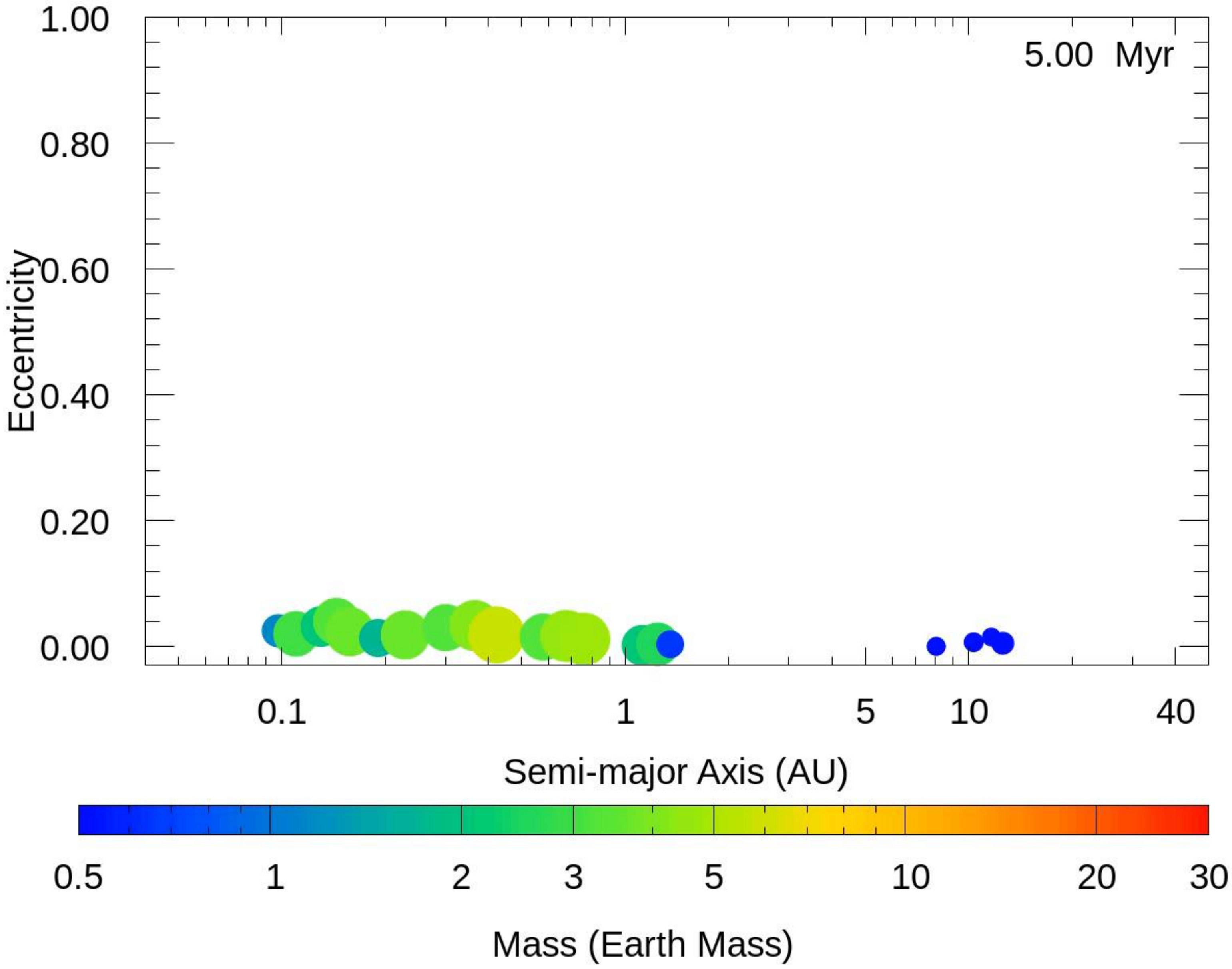
Matsumoto et al., 2012



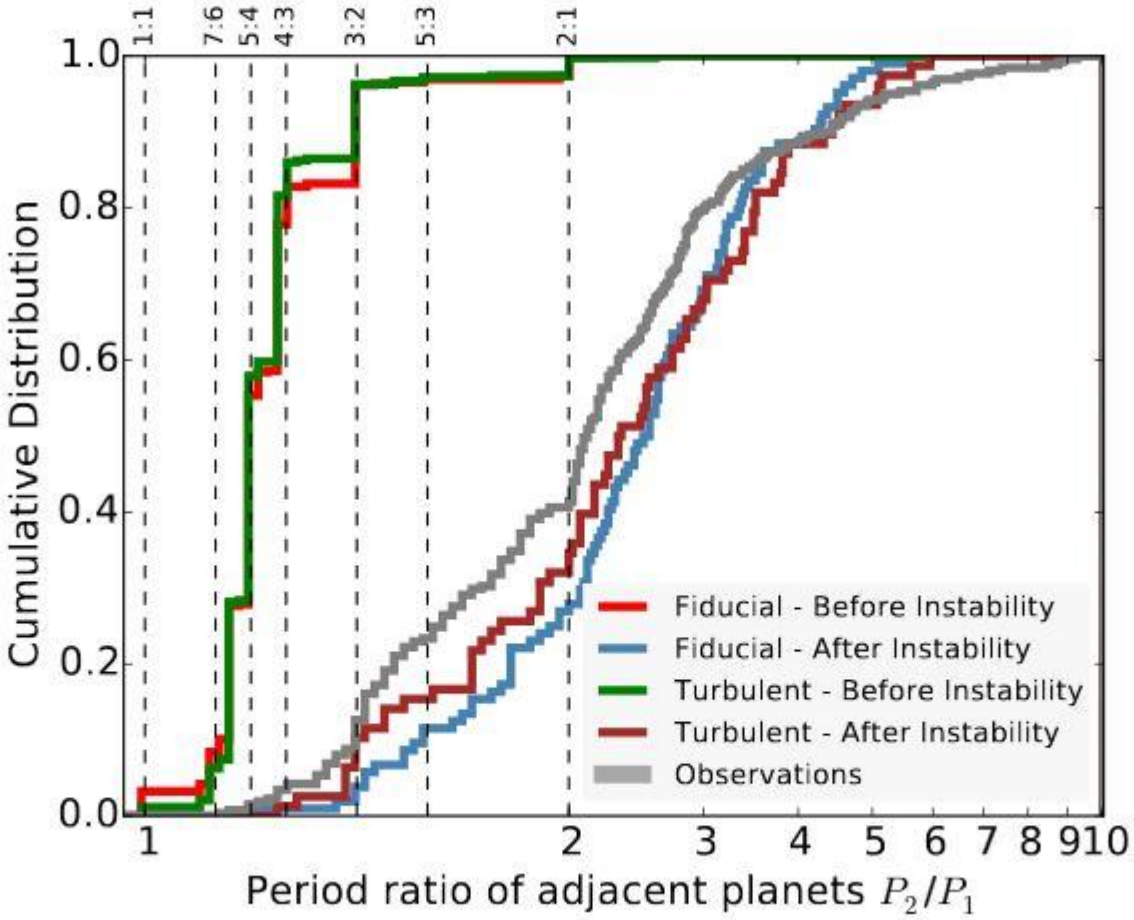


Separation en rayons de Hill

Exemple d'instabilité dynamique de super-Terres

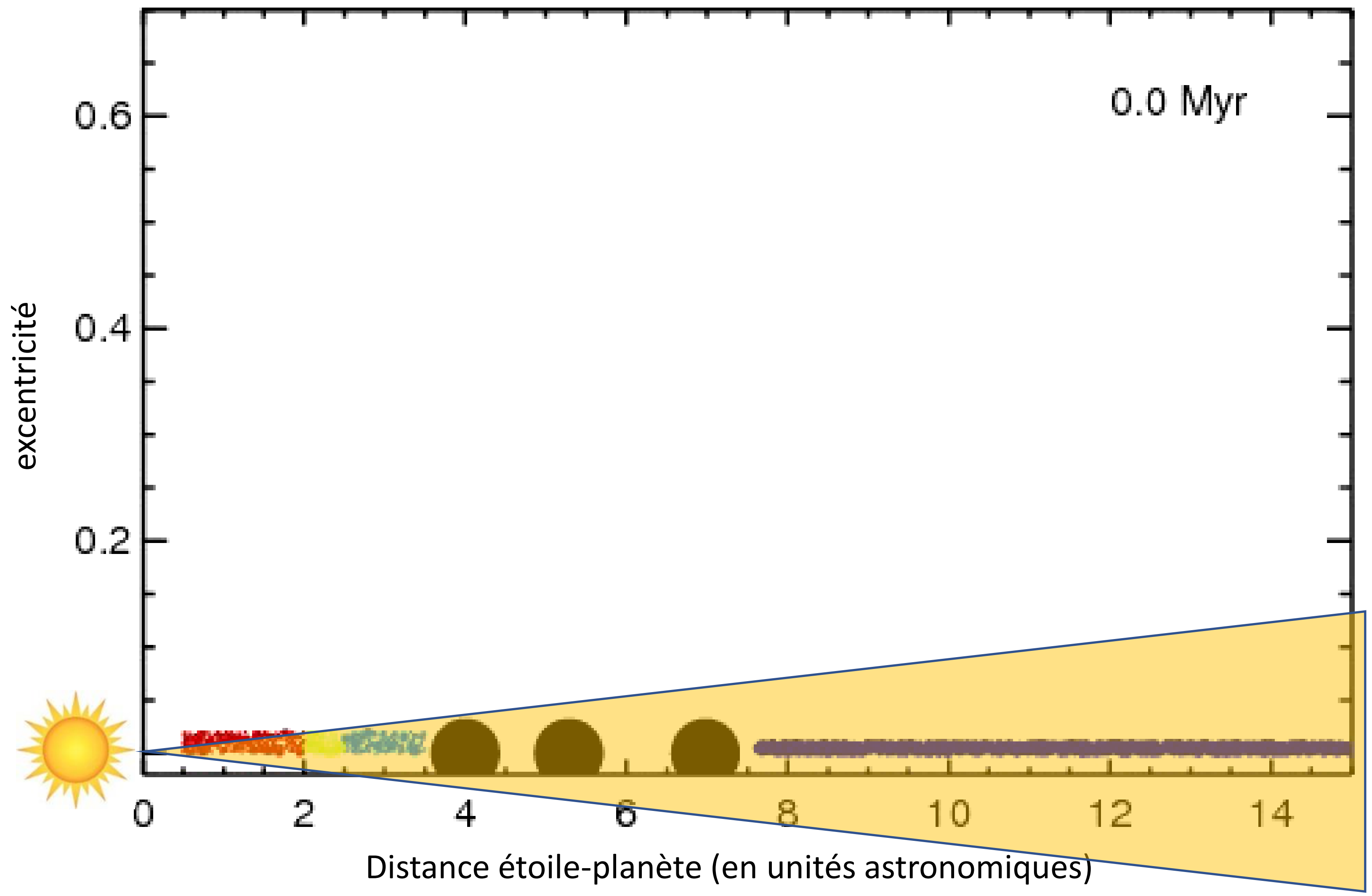


L’instabilité brise les relations résonnantes entre les périodes



Izidoro et al., 2017

Instabilité d'une chaînes résonnantes de planètes géantes



Description des résonances par une approche Hamiltonienne

A-B-C de mécanique Hamiltonienne

Un système dynamique est sous forme Hamiltonienne s'il existe une fonction $H(\mathbf{p},\mathbf{q})$ qui permet d'écrire les équations du mouvement comme:

$dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i$

$dq_i/dt = \partial H/\partial p_i$

Les q_i sont appelées *coordonnées* and les p_i *moments*

Si les q_i sont des *angles* (H périodique in q_i), les p_i sont appelés *actions*

La valeur de H est une invariante de la dynamique (constante de mouvement), car:

$dH/dt = \sum_i \partial H/\partial q_i * dq_i/dt + \partial H/\partial p_i * dp_i/dt = 0$

COLLÈGE DE FRANCE 1530

A-B-C de mécanique Hamiltonienne

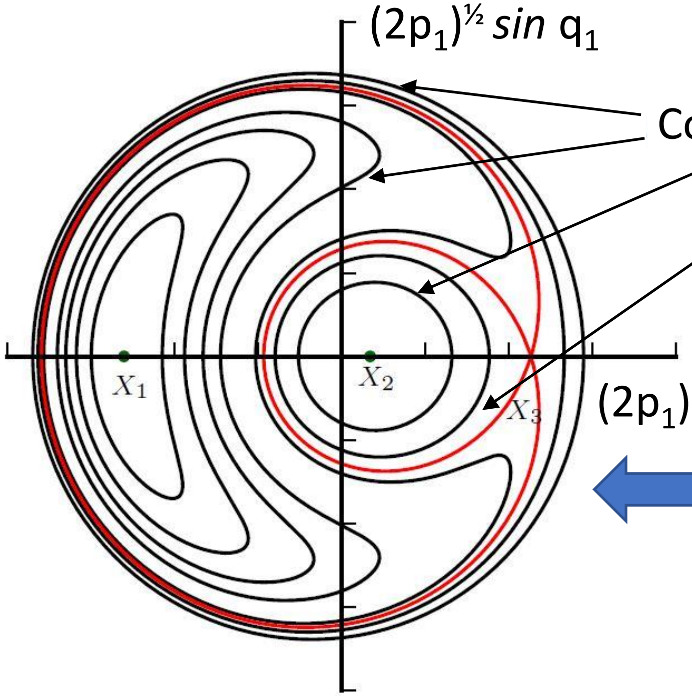
En général, un système dynamique avec un Hamiltonien générique $H(\mathbf{p,q})$ est non-intégrable

Mais un système qui a pour Hamiltonien une fonction $H(\mathbf{p,q})=\mathrm{H}(p_1,q_1,p_2,\ldots,p_n)$ est intégrable. En effet:

$dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i = 0$ i.e. p_i=constante pour i=2,…n

Le mouvement de p_1,q_1 est décrit par les courbes de niveau de $H(p_1,q_1,p_2,\ldots,p_n)$, car H est constante de mouvement

Example:



Le diagramme dépend des valeurs de $p_2,\ldots,p_n$

A-B-C de mécanique Hamiltonienne

Pour résoudre des systèmes Hamiltoniens on cherche une transformation (**p,q**)->(**p',q'**) par laquelle
$H(\mathbf{p}(\mathbf{p'},\mathbf{q'}),q(\mathbf{p'},\mathbf{q'})) = H\,(p'_1,q'_1,p'_2,\ldots.p'_n)$

Pas toutes les transformations sont admises! Seulement celles qui préservent les équations Hamiltoniennes
$dp'_i/dt = -\partial H/\partial q'_i$
$dq'_i/dt = \partial H/\partial p'_i$

Ces transformations sont appelées *canoniques*

Example de transformation canonique:
$\mathbf{q} = A\,\mathbf{q'}$ $\quad$ $\mathbf{p} = [A^{-1}]^T\,\mathbf{p'}$

Souvent, il n'est pas possible par une transformation canonique de transformer l'Hamiltonien en une fonction dépendante d'un seul angle; alors, on cherche à transformer l'Hamiltonien dans la forme:
$H(\mathbf{p}(\mathbf{p'},\mathbf{q'}),q(\mathbf{p'},\mathbf{q'})) = H_{app}\,(p'_1,q'_1,p'_2,\ldots.p'_n) + \varepsilon\,H_{rem}(\mathbf{p'},\mathbf{q'})$ où ε est un petit paramètre.

C'est l'approche de la *théorie des perturbations*

COLLÈGE DE FRANCE 1530

L'Hamiltonienne d'un système planetaire

En utilisant comme coordonnées les positions héliocentriques r_j et comme moments les quantités $v_j=m_j u_j$, où u_j sont les vitesses barycentriques, les équations du mouvement ont pour Hamiltonien:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \frac{\|\mathbf{v}_j\|^2}{2\mu_j} - \frac{\mathcal{G}(M_* + m_j)\mu_j}{\|\mathbf{r}_j\|}}_{\text{Somme d'Hamiltoniens de problèmes à deux-corps non couplés (intégrables)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j-1}\left\{\frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j}{M_*} - \mathcal{G}\frac{m_i m_j}{\|\mathbf{\Delta}_{i,j}\|}\right\}}_{\text{Partie non-intégrable (perturbation)}}$$

$\mu_j = m_j\, M_*/(m_j+M_*)$

On peut introduire des ellipse formelle, en partant les positions héliocentriques et vitesses barycentriques

COLLÈGE DE FRANCE 1530

Les variables canoniques de Delauney

Variables d'action-angle pour chaque planète

$$\Lambda = \mu\sqrt{\mathcal{G}(M_* + m)a} \qquad \lambda = l + \varpi$$

$$\Gamma = \Lambda\left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right) \simeq \Lambda e^2/2 \qquad \gamma = -\varpi$$

$$Z = \Lambda\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i) \simeq \Lambda i^2/2 \qquad \zeta = -\Omega$$

$$\mu = \frac{mM_*}{m+M_*}$$

Structure de la perturbation

L'interaction entre chaque couple de planètes peut être développée en série de puissance de *e* and *i* et en série de Fourier de λ, ϖ, Ω:

$$\mathcal{H}_{1,2} = c(a_2/a_1) e_1^{k_1} e_2^{k_2} i_1^{l_1} i_2^{l_2} \cos(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + m_1\varpi_1 + m_2\varpi_2 + j_1\Omega_1 + j_2\Omega_2)$$

Les règles de D'Alembert

1	$n_1 + n_2 + m_1 + m_2 + j_1 + j_2 = 0$		Invariance par rotation
2	$l_1 + l_2$	doit être un nombre paire	Invariance par $i \to -i$
3	$k_{1,2} - \|m_{1,2}\|$	doit être nul ou un nombre paire positif	Pas de singlularité à $e = \sqrt{2\Gamma/\Lambda} = 0$ *
4	$l_{1,2} - \|j_{1,2}\|$	doit êre nul ou un nombre paire positif	Pas de singlularité à $i = \sqrt{2Z/\Lambda} = 0$ *

* En les variables canoniques $p = \sqrt{2\Gamma}\cos\varpi, q = \sqrt{2\Gamma}\sin\varpi, x = \sqrt{2Z}\cos\Omega, y = \sqrt{2Z}\sin\Omega$
$\mathcal{H}_{1,2}$ doit avoir une expression polynomiale

Structure de la perturbation

Simplifications:

$$\mathcal{H}_{1,2} = c(a_2/a_1) e_1^{k_1} e_2^{k_2} \cancel{i_1^{l_1}} \cancel{i_2^{l_2}} \cos(n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + m_1\varpi_1 + m_2\varpi_2 + \cancel{j_1\Omega_1} + \cancel{j_2\Omega_2})$$

Problème plan: $i_1 = i_2 = 0$

Proximité à la resonance $k : k-1$

$$\mathcal{H}_{1,2} = c(a_2/a_1) e_1^{k_1} e_2^{k_2} \cos(n(\cancel{\lambda_1 -} \lambda_2) + m(k\lambda_2 - (k-1)\lambda_1) + m_1\varpi_1 + m_2\varpi_2)$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\lambda_2 - (k-1)\lambda_1) \sim 0$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda_1 - \lambda_2) = 2\pi \left(\frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2}\right)$ est un angle rapide

Par moyennisation

Pour la 1ère règle de D'Alembert: $m + m_1 + m_2 = 0$

$$\mathcal{H}_{1,2} = c(a_2/a_1) e_1^{k_1} e_2^{k_2} \cos[m(k\lambda_2 - (k-1)\lambda_1 - \varpi_1) + n(\varpi_1 - \varpi_2)]$$

Structure de la perturbation au voisinage d'une résonance

$$\mathcal{H}_{1,2} = c(a_2/a_1) e_1^{k_1} e_2^{k_2} \cos[m(\qquad \psi_1 \qquad) + n(\; \delta\gamma_{1,2} \;)]$$

Transformation canonique pour mettre en évidence l'angle résonnant

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_{1,2} &= k\Lambda_1 + (k-1)\Lambda_2, & \delta\lambda_{1,2} &= \lambda_1 - \lambda_2, & \Delta\lambda_{1,2} & & \delta\lambda_{1,2} & \\
\Theta &= \Lambda_1 + \Lambda_2, & \theta &= k\lambda_2 - (k-1)\lambda_1 & \Psi_1 &= \Theta, & \psi_1 &= \theta + \gamma_1, \\
\Gamma_1 & & \gamma_1 &= -\varpi_1 & \Psi_2 &= -\Theta + \Gamma_1, & \delta\gamma_{1,2} &= \gamma_1 - \gamma_2, \\
\Gamma_2 & & \gamma_2 &= -\varpi_2 & \mathcal{L} &= \Theta - (\Gamma_1 + \Gamma_2), & \gamma_2' &= -\gamma_2, \\
& & & & &= (\Lambda_1 - \Gamma_1) + (\Lambda_2 - \Gamma_2) & &
\end{aligned}$$

(moment cinétique du système)

Constantes du mouvement

2 degrés de liberté

Harmoniques permises par les règles de D’Alembert

A l’ordre 1 en excentricité:

$$e_1 \cos(\psi_1)\ , \quad e_2 \cos(\cancel{\psi_1} - \delta\gamma_{1,2}) \longrightarrow \cos(\psi_1')$$

Sessin et Ferraz-Mello, 1984
Henrard et al., 1986
Wisdom, 1986
Batygin et Morbidelli, 2013

A l’ordre 2 en excentricité:

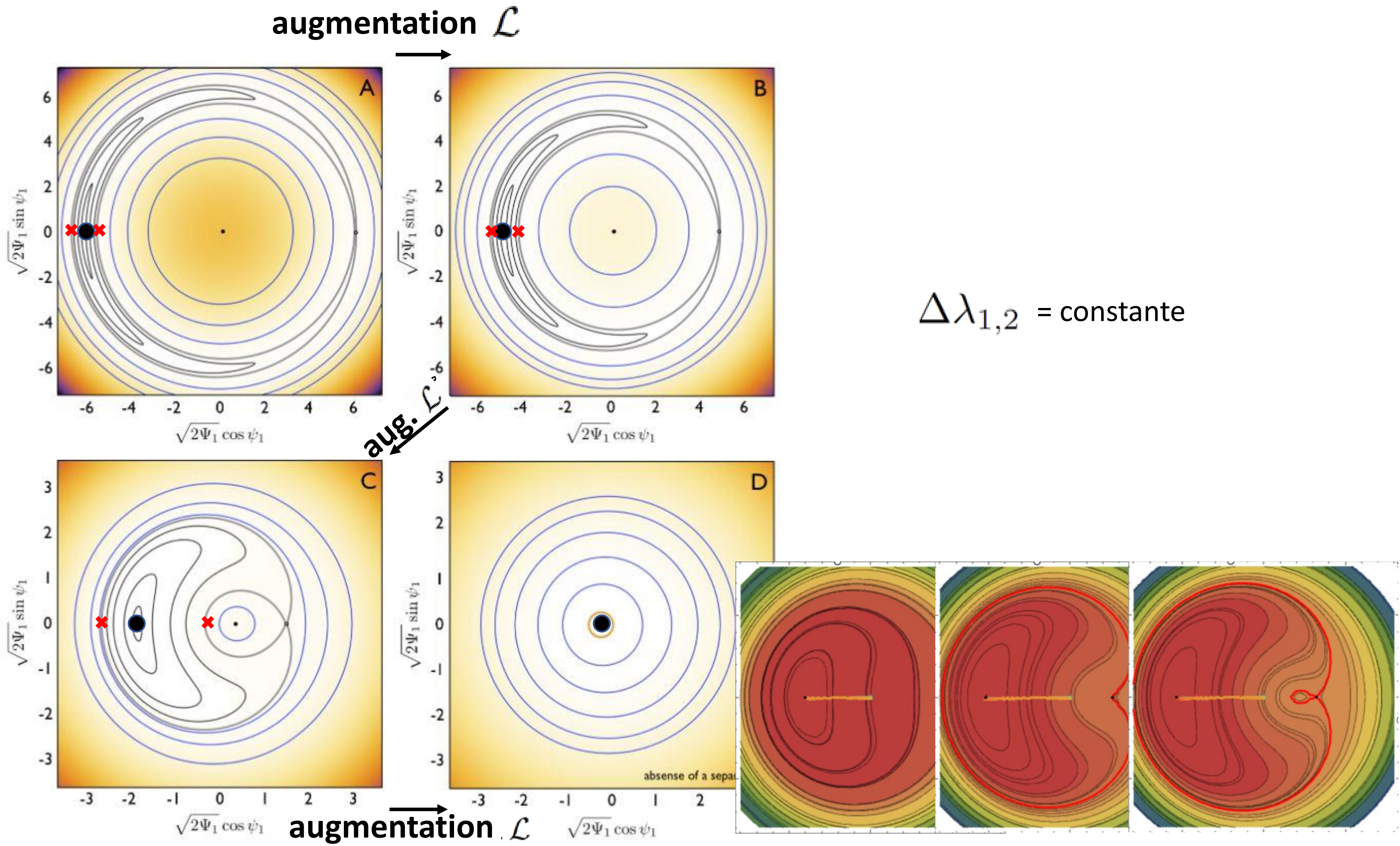
$$e_1^2 \cos(2\psi_1)\ , \quad e_1 e_2 \cos(\cancel{2\psi_1} - \delta\gamma_{1,2})\ , \quad e_1 e_2 \cancel{\cos(2}\gamma_{1,2})\ , \quad e_2^2 \cos[2(\cancel{\psi_1 -} \delta\gamma_{1,2})]$$

Etcétéra....

2 possibles approximations intégrables:

- on ne garde que l’ordre en excentricité (approximation des petites excentricités)
- on suppose $m_2 >> m_1$ et $e_2=0$

Diagrammes de phase de $H_{1,2}$ d'un résonance k:k-1 (approx. intégrable)

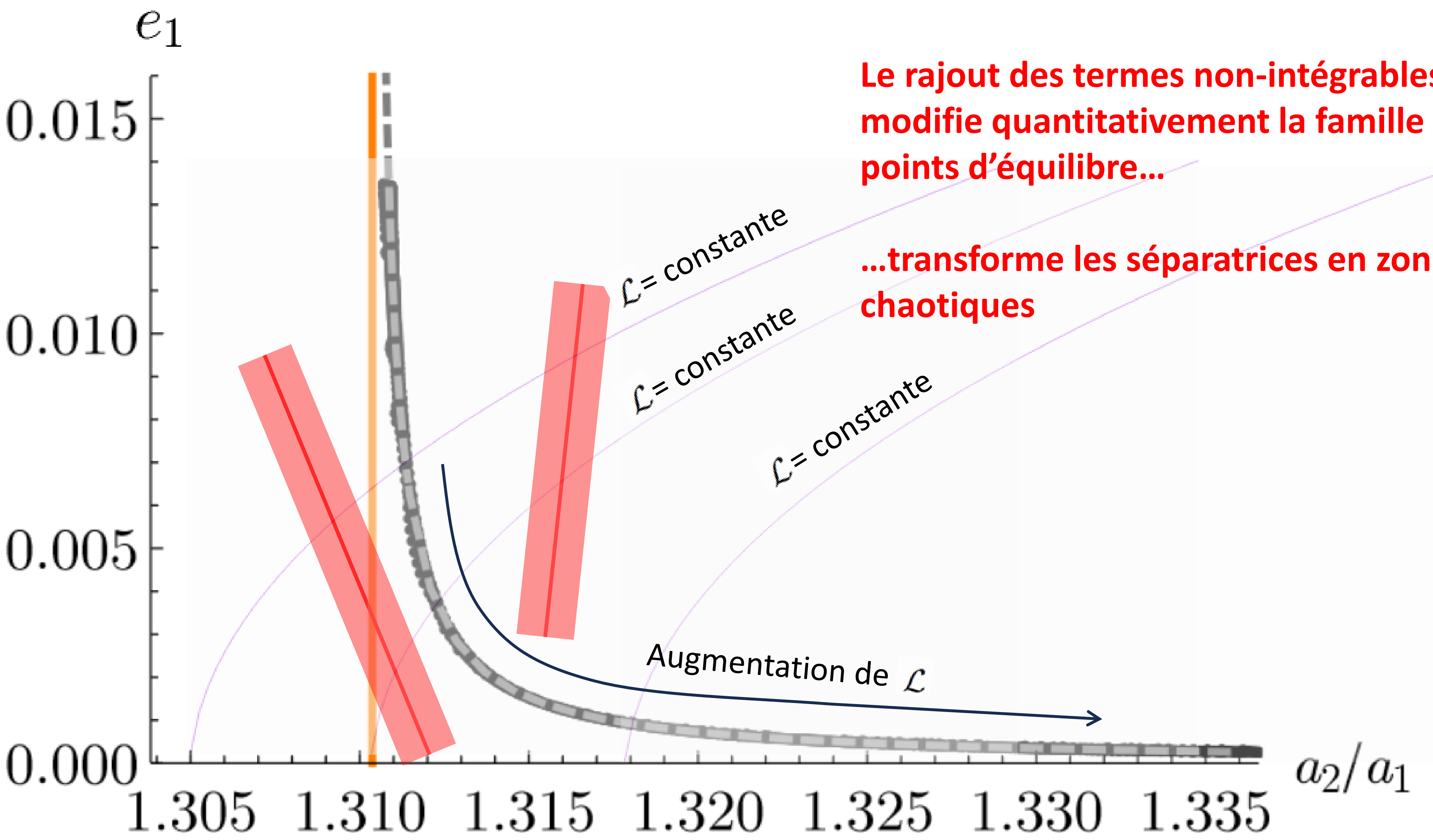


$\Delta\lambda_{1,2}$ = constante

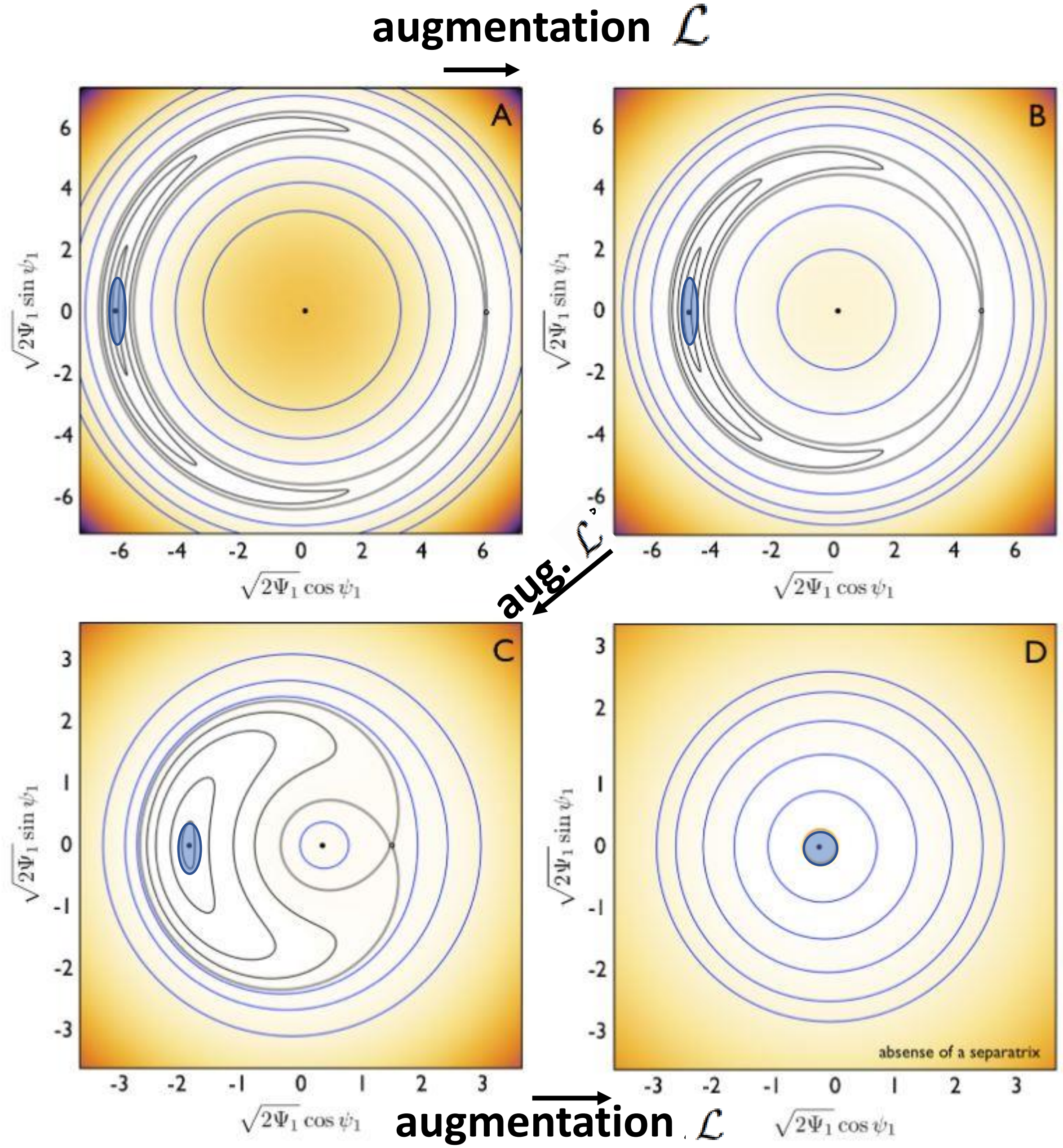
Conversion des points d'équilibre et des sections de séparatrice en diagramme (a,e)

Le rajout des termes non-intégrables modifie quantitativement la famille de points d'équilibre…

…transforme les séparatrices en zones chaotiques



Migration et capture en résonance k:k-1



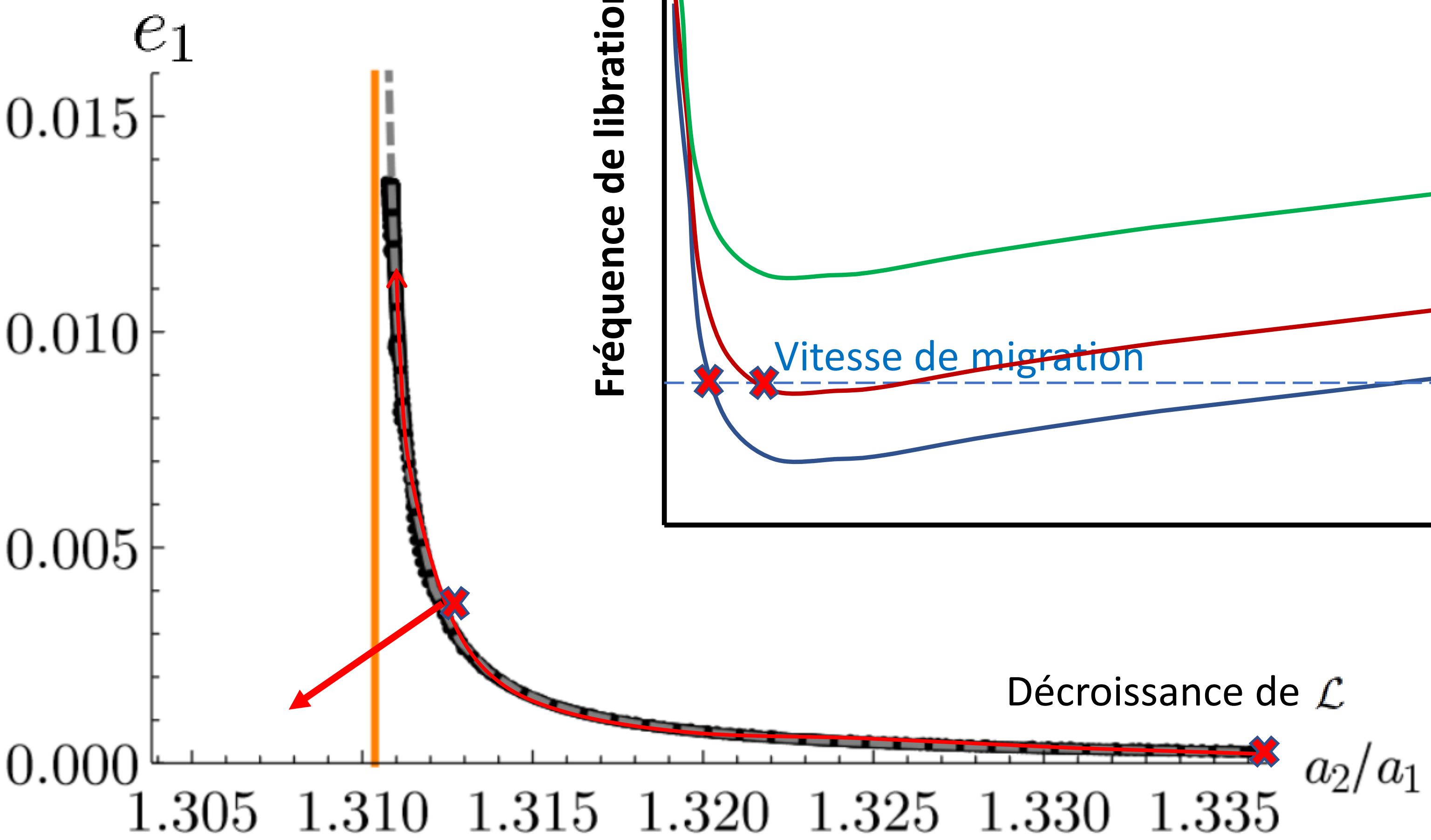
En absence de migration, $\mathcal{L}$ est une constante
La migration change $\mathcal{L}$
Migration convergente = décroissance de $\mathcal{L}$

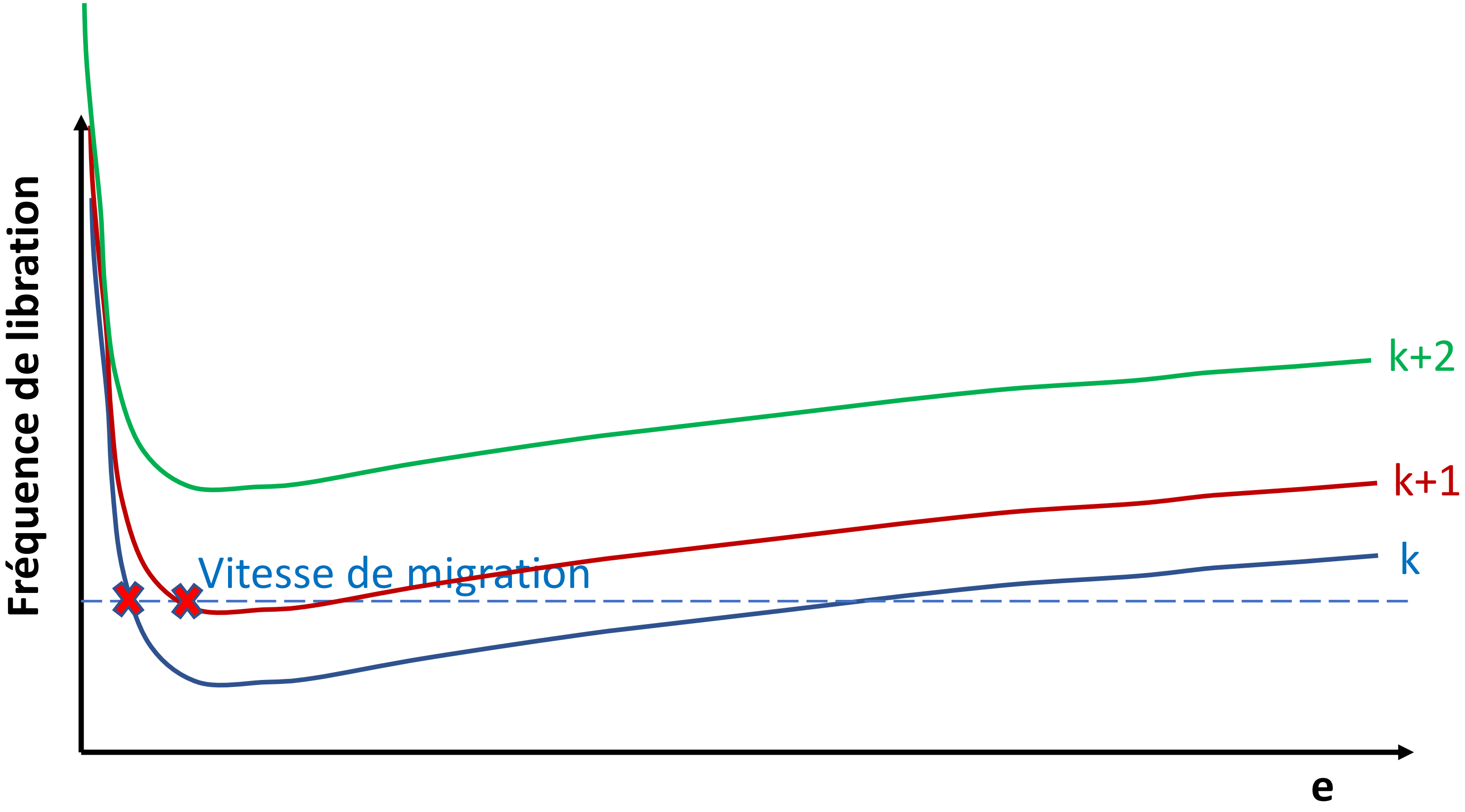
Principe adiabatique:

Si un paramètre (ex. $\mathcal{L}$) change lentement par rapport à l'échelle de temps caractéristique de la dynamique (ex. période de libration), l'évolution suit la trajectoire que, pour chaque valeur du paramètre, confine la même aire.

Migration et capture en résonance

Mais le principe adiabatique est valide seulement si la migration est lente par rapport à la libration



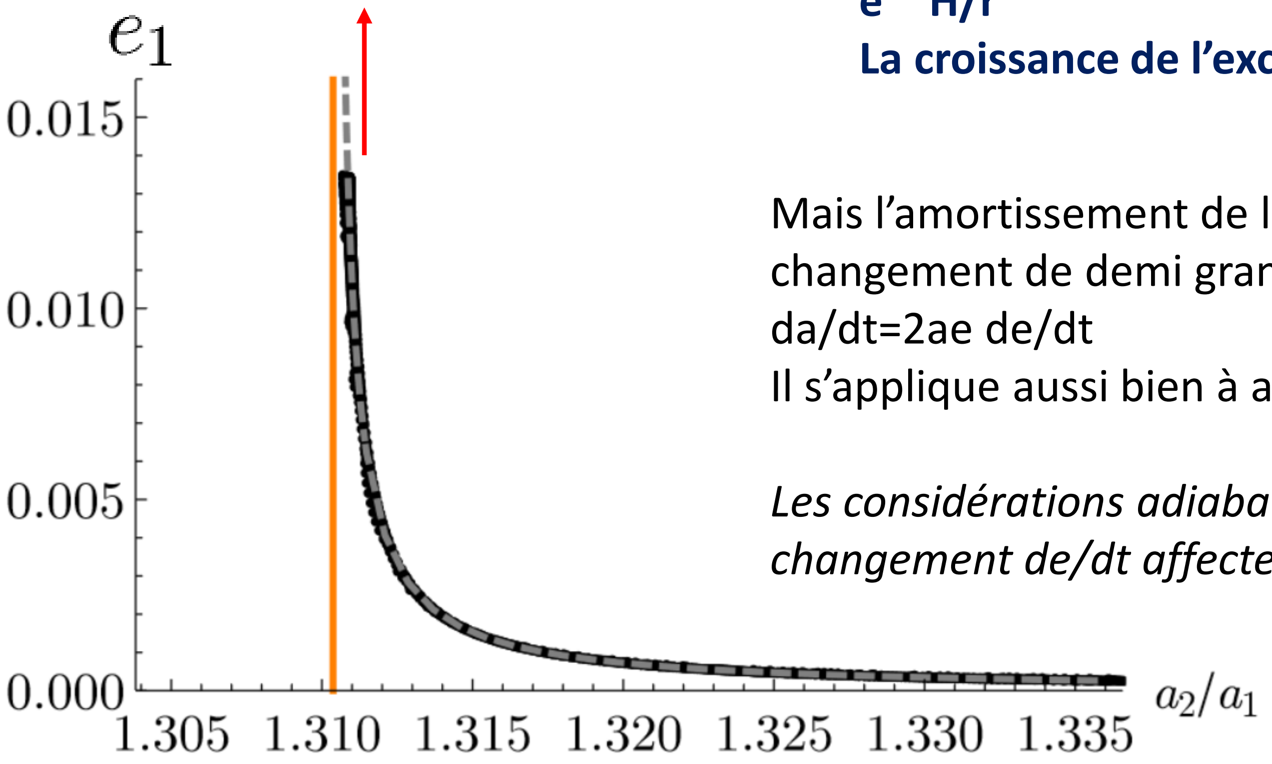


Amortissement de l'excentricité et effets sur la résonance

En plus de forcer la migration de la planète, le disque exerce aussi un amortissement de l'excentricité:
$de/dt \sim e\, d\mathcal{L}/dt\ (H/r)^{-2}$

Dans la limite *a*=const.
$de/dt = -d\mathcal{L}/dt\ (a^{1/2}e)^{-1}$

Les deux effets s'annulent pour:
$e \sim H/r$
La croissance de l'excentricité s'arrête. Un équilibre est atteint

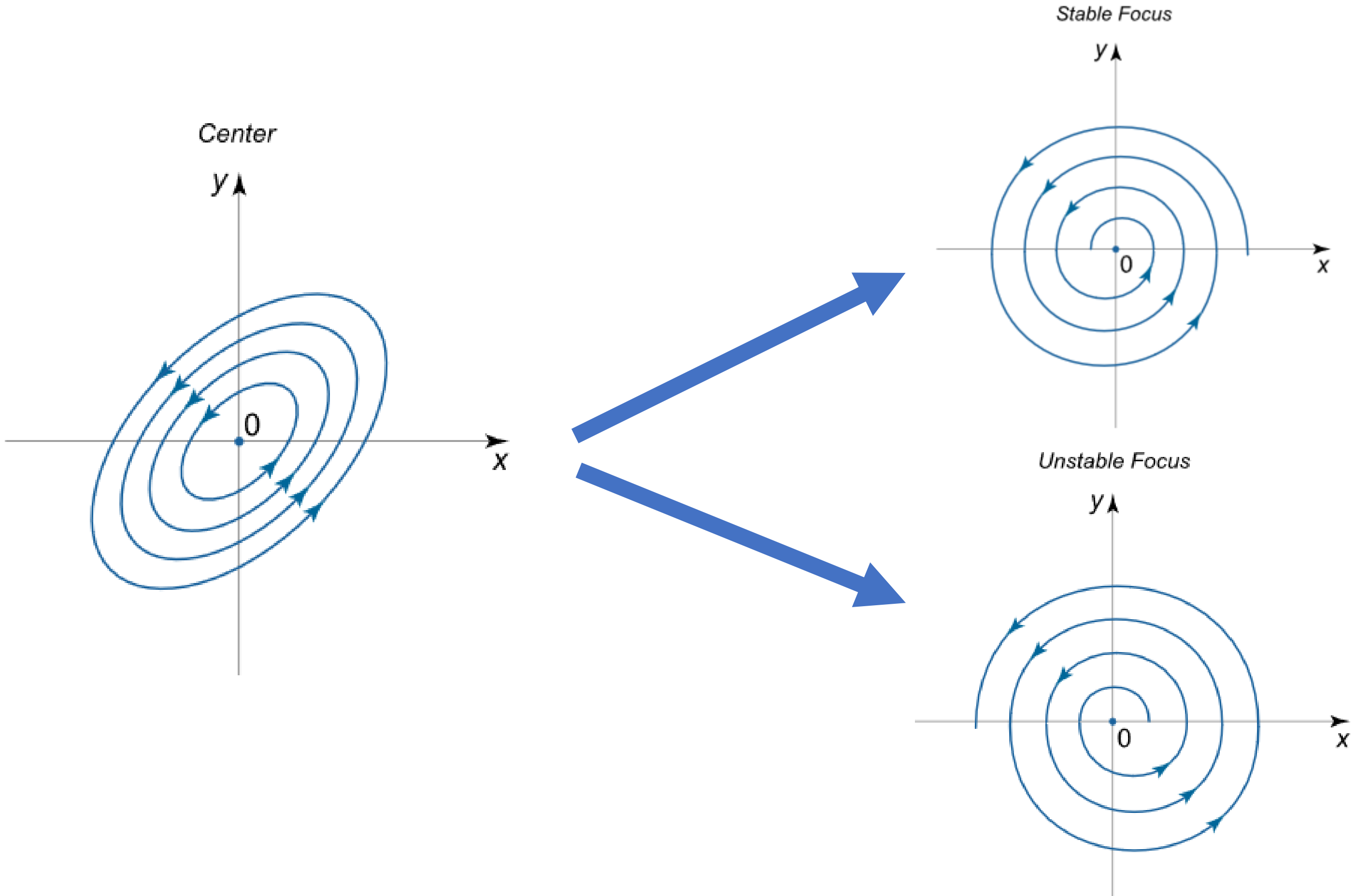


Mais l'amortissement de l'excentricité pour $\mathcal{L}$ = const. induit un changement de demi grand axe égal à:
$da/dt = 2ae\, de/dt$
Il s'applique aussi bien à a_2 que à a_1

Les considérations adiabatiques ne s'appliquent pas car le changement de/dt affecte une coordonnée, pas un paramètre.

Amortissement de l’excentricité et effets sur la résonance

Sous l’effet de l’amortissement de l’excentricité le point d’équilibre résonnant n’est plus un *centre*. Il devient soit un *foyer* stable ou instable :

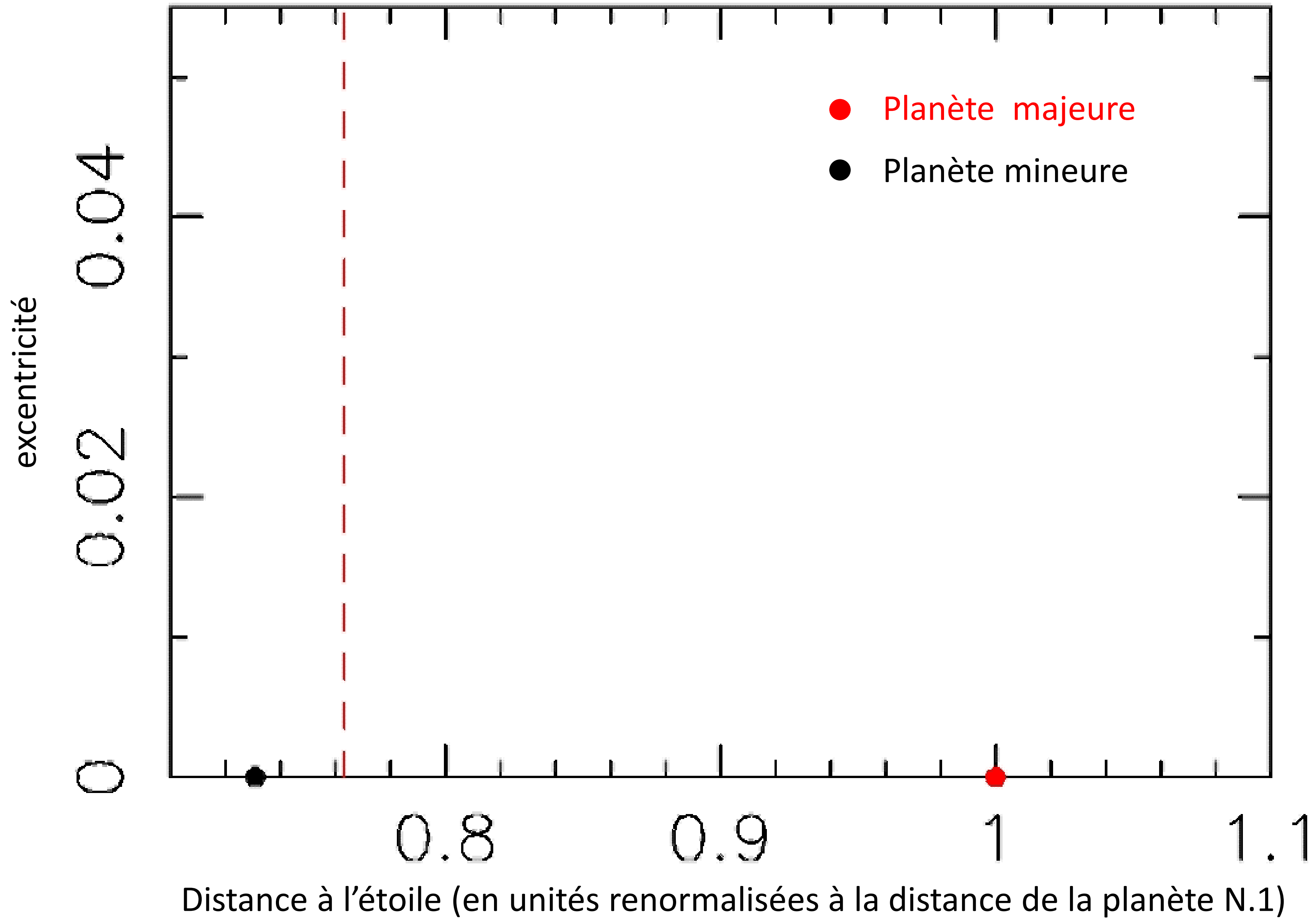


L’amplitude de libration diminue

L’amplitude de libration augmente: cycle limite ou échappement de la résonance

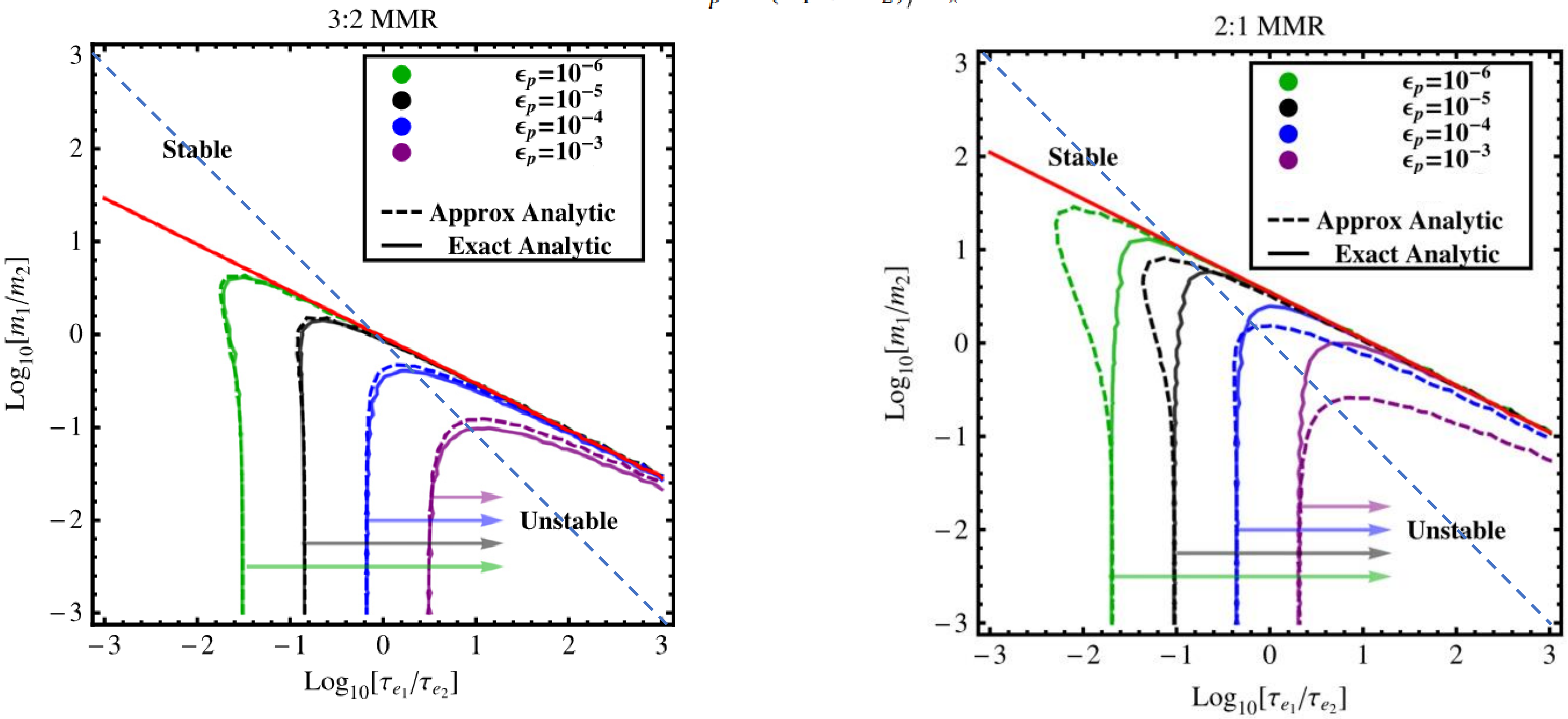
Resonance Overstability (Goldreich and Schlichting, 2014)

Instabilité après capture en résonance



Amortissement de l'excentricité et effets sur la résonance

$\epsilon_p = (m_1 + m_2)/M_\star$

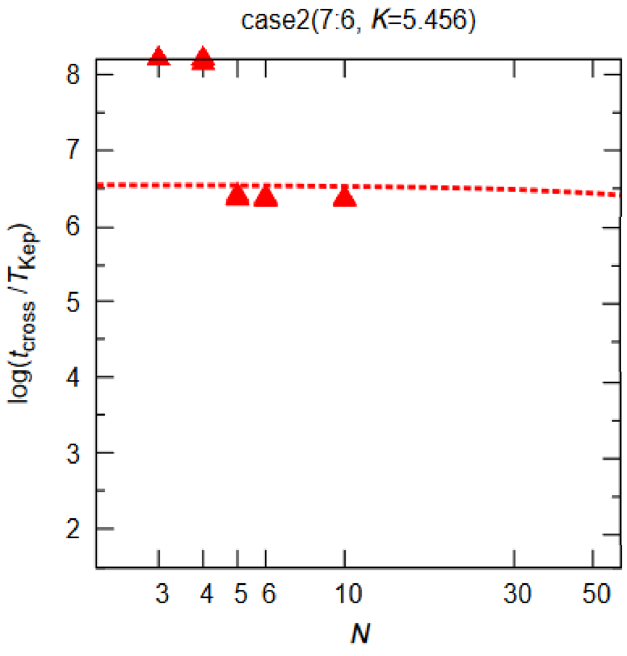


$[-1/e\ de/dt]^{-1} \equiv \tau_e \sim \dfrac{M_*}{m} \dfrac{M_*}{\Sigma a^2} \dfrac{h^4}{\sqrt{\mathcal{G} M_*/a^3}}$

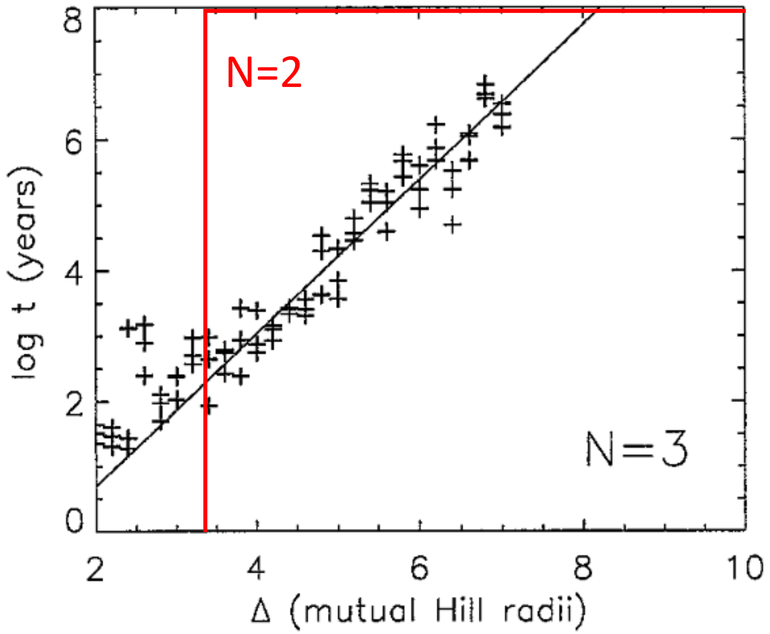
Deck and Batygin, 2015, ApJ, 810, 119

Interactions à trois planètes

Matsumoto et al., 2012



Chambers et al., 1996



Nous avons vu que les chaînes résonnantes deviennent instables si on rajoute trop (>>2) de planètes.
Aussi, s'il y a 3 (ou plus) planètes non-résonnantes, le temps d'instabilité croit progressivement avec leur distance mutuelle alors que pour un système à deux planètes le système est stable pour toute distance $\Delta > 2\sqrt{3}$

Clairement, il y a des effets multi-planètes qu'on ne peut pas comprendre par des interactions entre couples de planètes voisines

Interactions à trois planètes

Mais l'Hamiltonien du problème s'écrit comme somme d'interactions à 2 planètes:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left\|\mathbf{v}_j\right\|^2}{2\mu_j} - \frac{\mathcal{G}(M_* + m_j)\mu_j}{\left\|\mathbf{r}_j\right\|} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{j-1} \left\{ \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j}{M_*} - \mathcal{G}\frac{m_i m_j}{\left\|\mathbf{\Delta}_{i,j}\right\|} \right\}$$

Comment est-ce que les interactions multi-planète émergent?

L'opération de moyennisation sur les angles non-résonnantes est la clef et elle doit être faite de façon rigoureuse, c'est à dire par changement canonique des variables.

Moyennisation par transformation canonique

L'Hamiltonien de l'interaction entre deux planètes (sur le même plan) s'écrit:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mathcal{G}^2 M_*^2 m_1^3}{2\Lambda_1^2} - \frac{\mathcal{G}^2 M_*^2 m_2^3}{2\Lambda_2^2} + \sum_{k_1+k_2-j_1-j_2=0} c_{k_1,k_2,j_1,j_2}(\Lambda_1,\Lambda_2,\Gamma_1,\Gamma_2)\cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + j_1\gamma_1 + j_2\gamma_2)$$

$O(m)$ $O(m^2)$

Variables d'action-angle

$$\Lambda = \mu\sqrt{\mathcal{G}(M_* + m)a} \qquad \lambda = l + \varpi$$

$$\Gamma = \Lambda\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) \simeq \Lambda e^2/2 \qquad \gamma = -\varpi$$

$$\mu = \frac{mM_*}{m+M_*}$$

$O(m)$

Pour simplifier, expansion en $\delta\Lambda = \Lambda - [\Lambda] = O(m^2)$

$O(m^2)$ $O(m^4)$

$$\mathcal{H} = \Omega_1\delta\Lambda_1 + \Omega_2\delta\Lambda_2 + O(\delta\Lambda^2)$$

$O(m^2)$ $O(m^4)$

$$+\sum_{k_1+k_2-j_1-j_2=0} c_{k_1,k_2,j_1,j_2}([\Lambda_1],[\Lambda_2],[\Gamma_1],[\Gamma_2])\cos(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+j_1\gamma_1+j_2\gamma_2) + O(m^2\delta\Lambda)$$

Moyennisation par transformation canonique

$$\mathcal{H} = \Omega_1 \delta\Lambda_1' + \Omega_2 \delta\Lambda_2' + O(\delta\Lambda^2)$$

$$+ \sum_{k_1+k_2-j_1-j_2=0} \cancel{c_{k_1,k_2,j_1,j_2}([\Lambda_1],[\Lambda_2],[\Gamma_1],[\Gamma_2]) \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + j_1\gamma_1 + j_2\gamma_2)} + O(m^2\delta\Lambda)$$

On cherche une transformation canonique pour moyenner (i.e. éliminer) les termes non-résonnant:

$$k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 \neq 0$$

$$\delta\Lambda_1 = \delta\Lambda_1' - \sum_{k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 \neq 0} \frac{k_1 c_{k_1,k_2,j_1,j_2}([\Lambda_1],[\Lambda_2],[\Gamma_1],[\Gamma_2])}{k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2} \cos(k_1\lambda_1' + k_2\lambda_2' + j_1\gamma_1' + j_2\gamma_2') \qquad \lambda_1 = \lambda_1'$$

$$\delta\Lambda_2 = \delta\Lambda_2' - \sum_{k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 \neq 0} \frac{k_2 c_{k_1,k_2,j_1,j_2}([\Lambda_1],[\Lambda_2],[\Gamma_1],[\Gamma_2])}{k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2} \cos(k_1\lambda_1' + k_2\lambda_2' + j_1\gamma_1' + j_2\gamma_2') \qquad \lambda_2 = \lambda_2'$$

$$\delta\Gamma_1 = \delta\Gamma_1' - \sum_{k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 \neq 0} \frac{j_1 c_{k_1,k_2,j_1,j_2}([\Lambda_1],[\Lambda_2],[\Gamma_1],[\Gamma_2])}{k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2} \cos(k_1\lambda_1' + k_2\lambda_2' + j_1\gamma_1' + j_2\gamma_2') \qquad \gamma_1 = \gamma_1'$$

$$\delta\Gamma_2 = \delta\Gamma_2' - \sum_{k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 \neq 0} \frac{j_2 c_{k_1,k_2,j_1,j_2}([\Lambda_1],[\Lambda_2],[\Gamma_1],[\Gamma_2])}{k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2} \cos(k_1\lambda_1' + k_2\lambda_2' + j_1\gamma_1' + j_2\gamma_2') \qquad \gamma_2 = \gamma_2'$$

Origine des termes couplant trois planètes

L'insertion de cette transformation dans le terme de l'hamiltonien couplant les planètes 2 et 3:

$$\sum_{k_2+k_3-j_2-j_3=0} c_{k_2,k_3,j_2,j_3}(\Lambda_2, \Lambda_3, \Gamma_2, \Gamma_2) \cos(k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 + j_2\gamma_2 + j_3\gamma_3)$$

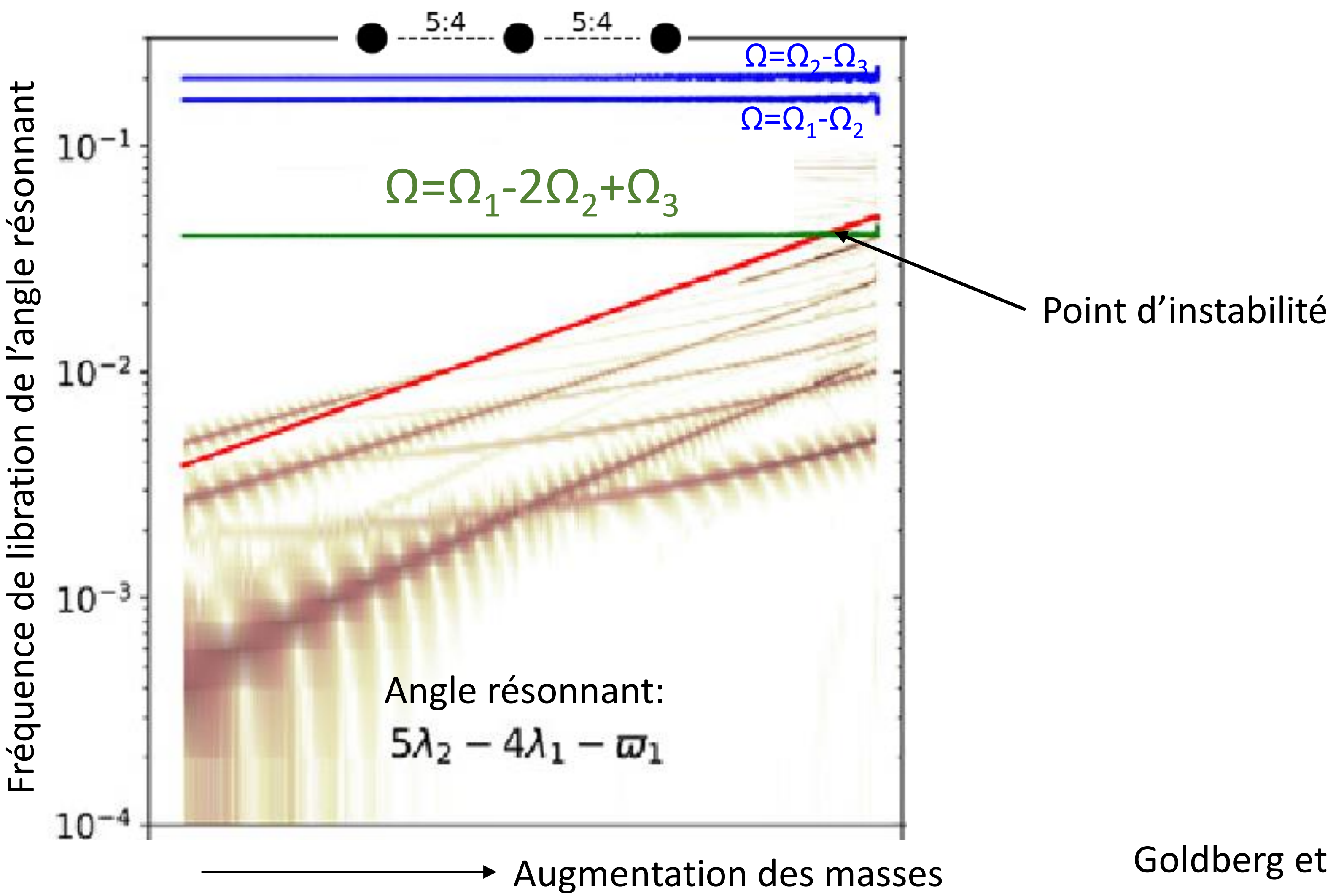
génère des termes $O(m^4)$ avec des harmoniques couplant les trois planètes:

$$\sum_{k_1+k_2+k_3-j_1-j_2-j_3=0} c_{k_1,k_2,k_3,j_1,j_2,j_3} \cos(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 + j_1\gamma_1 + j_2\gamma_2 + j_3\gamma_3)$$

COLLÈGE DE FRANCE 1530

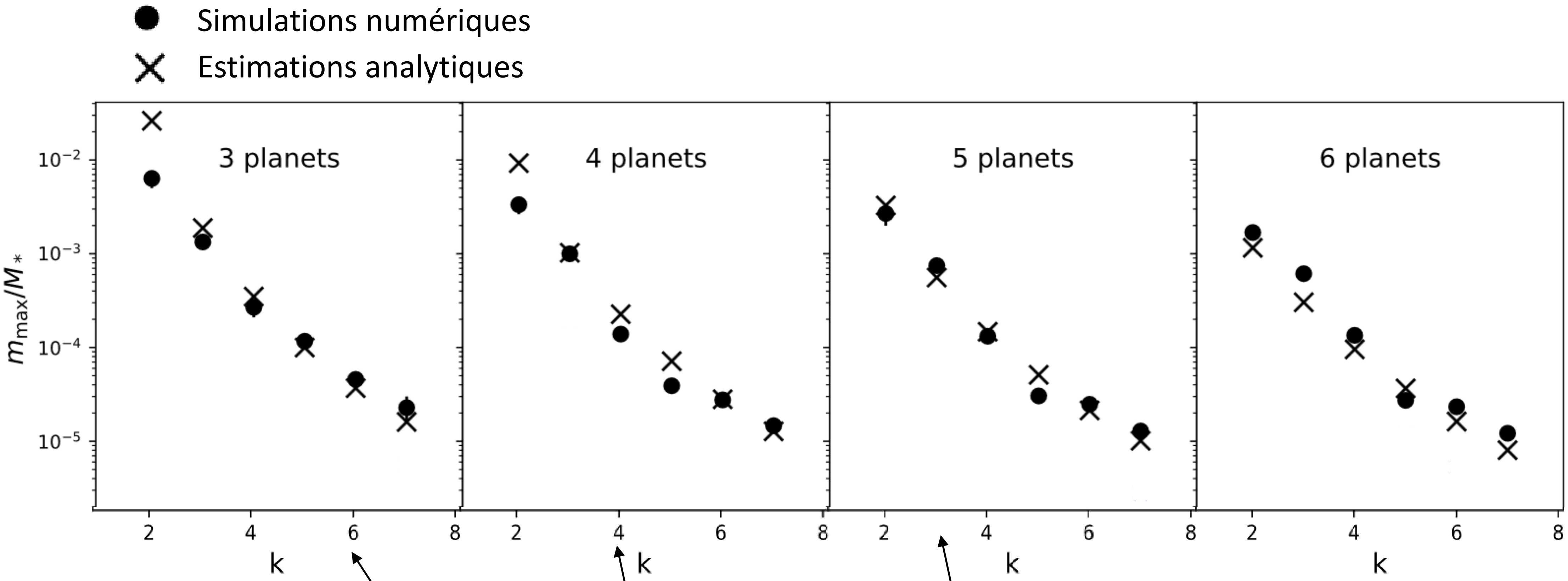
Instabilité des chaînes résonnantes

Elle est due à une résonance secondaire, entre la fréquence de libration des deux premières planètes et la différence des fréquences synodiques $\Omega=\Omega_1-2\Omega_2+\Omega_3$ (Pichierri et Morbidelli, 2020; Goldberg et al., 2022)



Goldberg et al., 2022

Instabilité des chaînes résonnantes



k: index de la chaîne résonnante. examples:

6:5 – 6:5

4:3 – 4:3 – 4:3

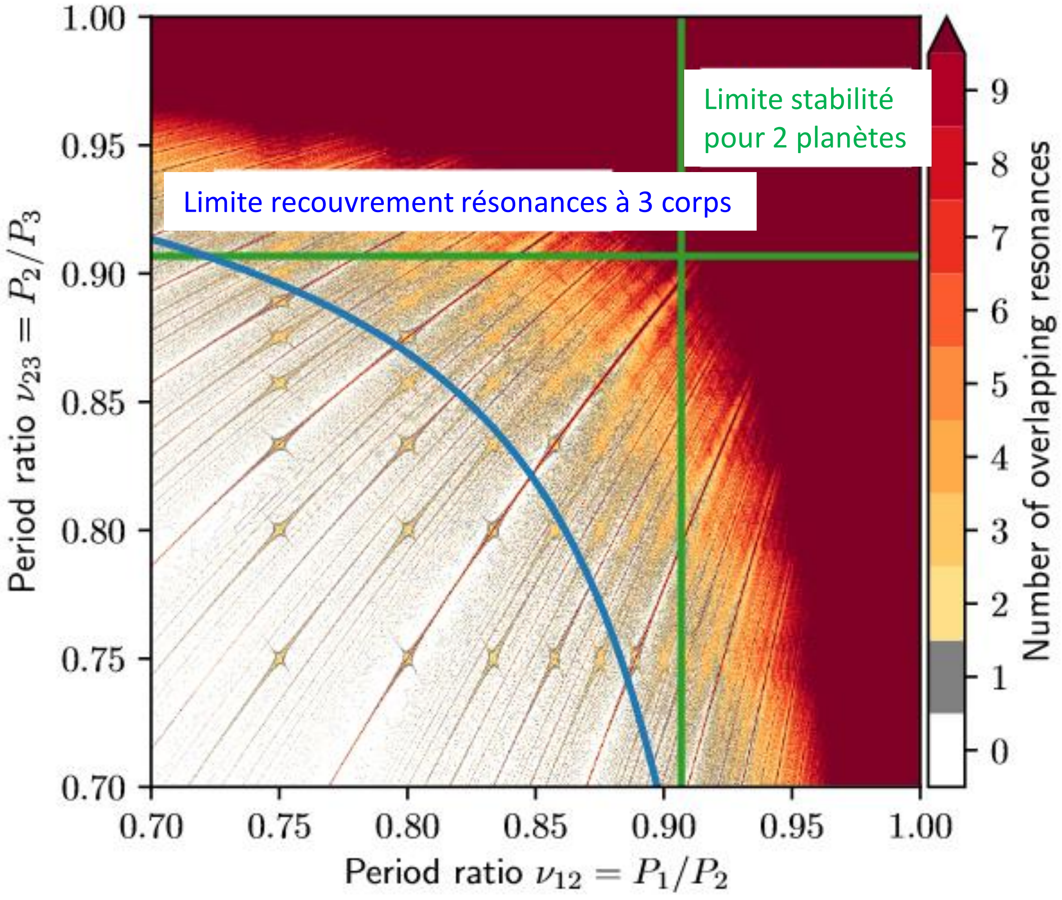
3:2 – 3:2 – 3:2 – 3:2

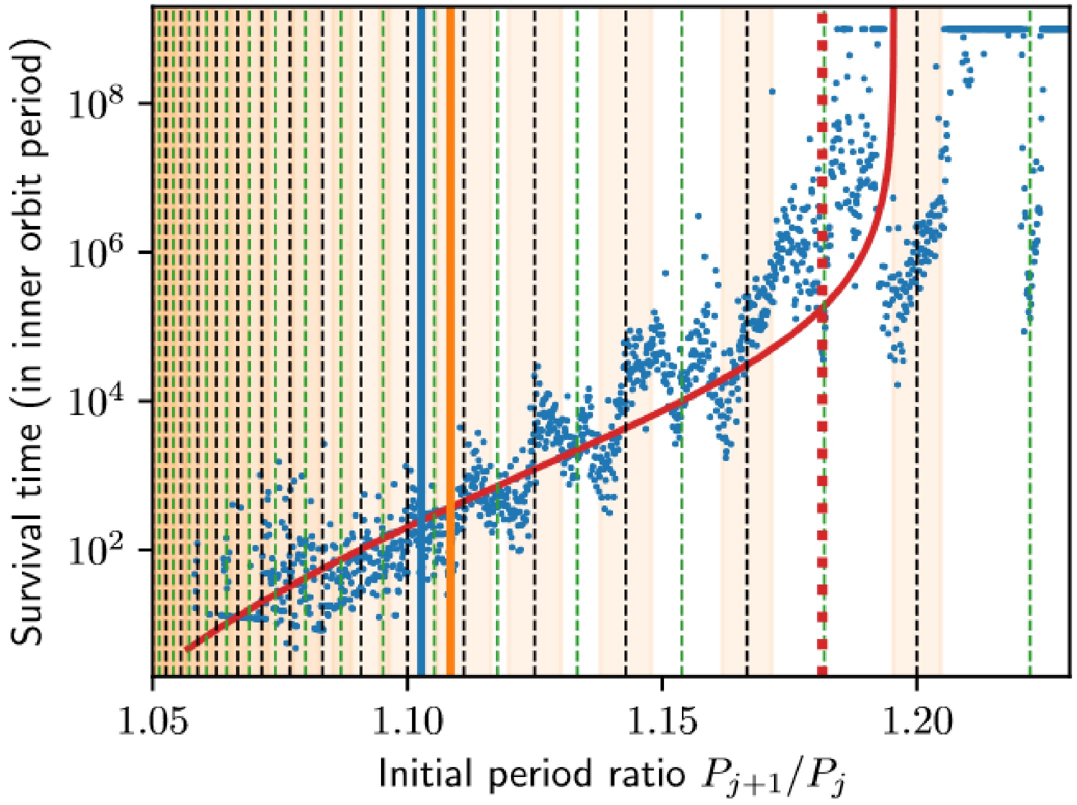
Goldberg et al., 2022

Instabilité de trois planètes non-résonnantes

Résonances à trois corps: $k_1\Omega_1+k_2\Omega_2+k_3\Omega_3=0$ sans que $j_1\Omega_1+j_2\Omega_2=0$ et $j_2\Omega_2+j_3\Omega_3=0$ pour tout entier j_1, j_2, j_3

Ici $m/M_*=10^{-5}$





Petit et al. (2020)

A retenir

- Les résonances se comportent comme des pendules: les planètes oscillent autour d'un point d'équilibre
- La migration convergente amène les planètes en résonance
- Ainsi se construisent les chaînes résonnantes, où chaque planète est en résonance à 2 corps avec ses voisines
- La chaîne résonnante est la seule configuration où les distances relatives des planètes (et donc le rapport de leur périodes orbitales) ne change plus, même si la migration continue.
- Si la planète interne est moins massive que celle externe, la résonance en présence du gaz peut être instable. Ainsi les chaînes résonnantes tendent à arranger les planètes en ordre de masses décroissant
- Chaînes résonnantes avec un nombre trop grand de planètes (selon leurs masses) sont instables
- L'instabilité détruit la chaîne résonnante initiale. Ainsi la plupart des systèmes planétaires ne sont pas en résonance aujourd'hui.
- Le formalisme Hamiltonien est l'approche plus adapté pour étudier mathématiquement les résonances
- Les interactions entre trois planètes apparaissent à l'ordre (relatif) m^2 dans les masses lors de la moyennisation rigoureuse des interactions à deux planètes non-résonnantes via une transformation canonique des variables.
- Les chaînes résonnantes sont déstabilisées par des résonances secondaires entre les fréquences de libration et les fréquences synodiques
- Les résonances à trois corps sont très nombreuses. Leur recouvrement donne la limite de stabilité des systèmes à trois planètes qui ne sont pas dans une chaîne de résonances à 2 corps.

Colloque

Formation du disque protosolaire et de ses premiers planétésimaux

26 & 27 Juin

COLLÈGE DE FRANCE
1530