



Leçon N. 4 - 26 février 2024

Alessandro  
**MORBIDELLI**

Chaire

**Formation planétaire: de la Terre aux exoplanètes**

*La formation planétaire*



# Un disque, ou un anneau, de planétésimaux



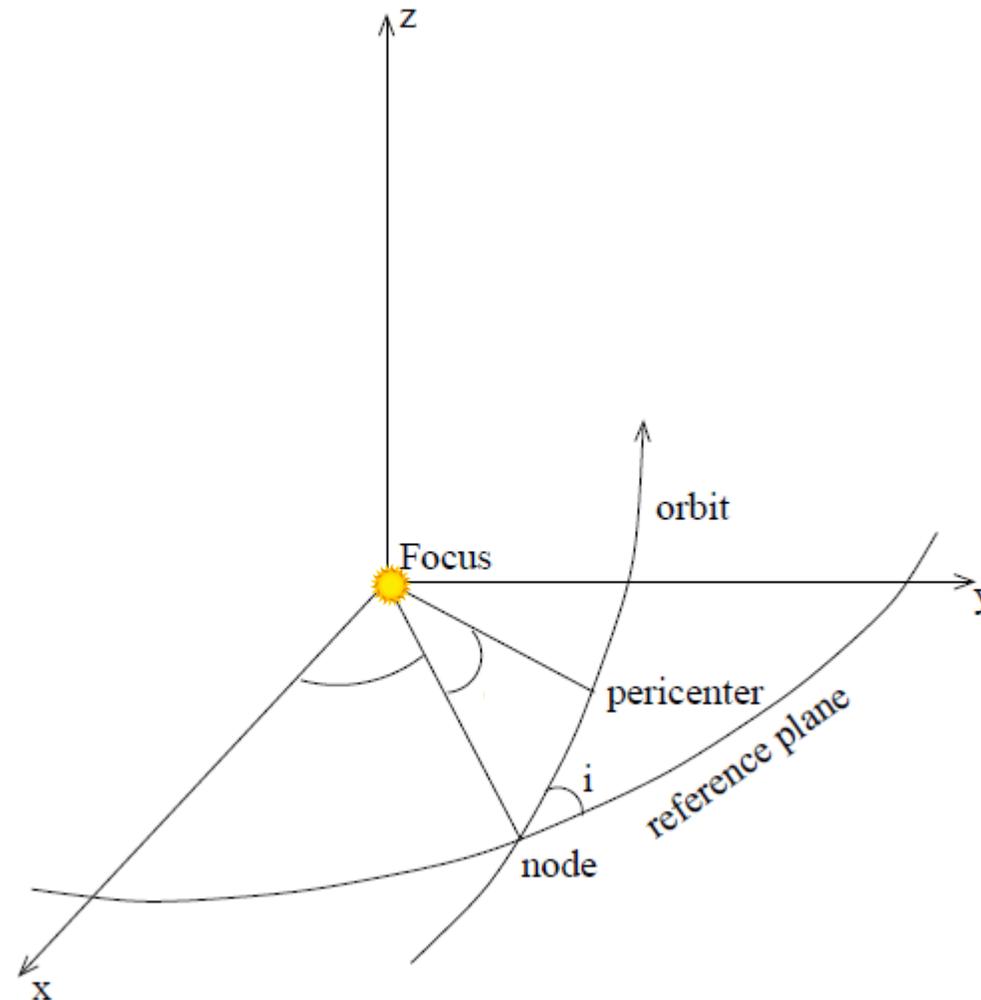
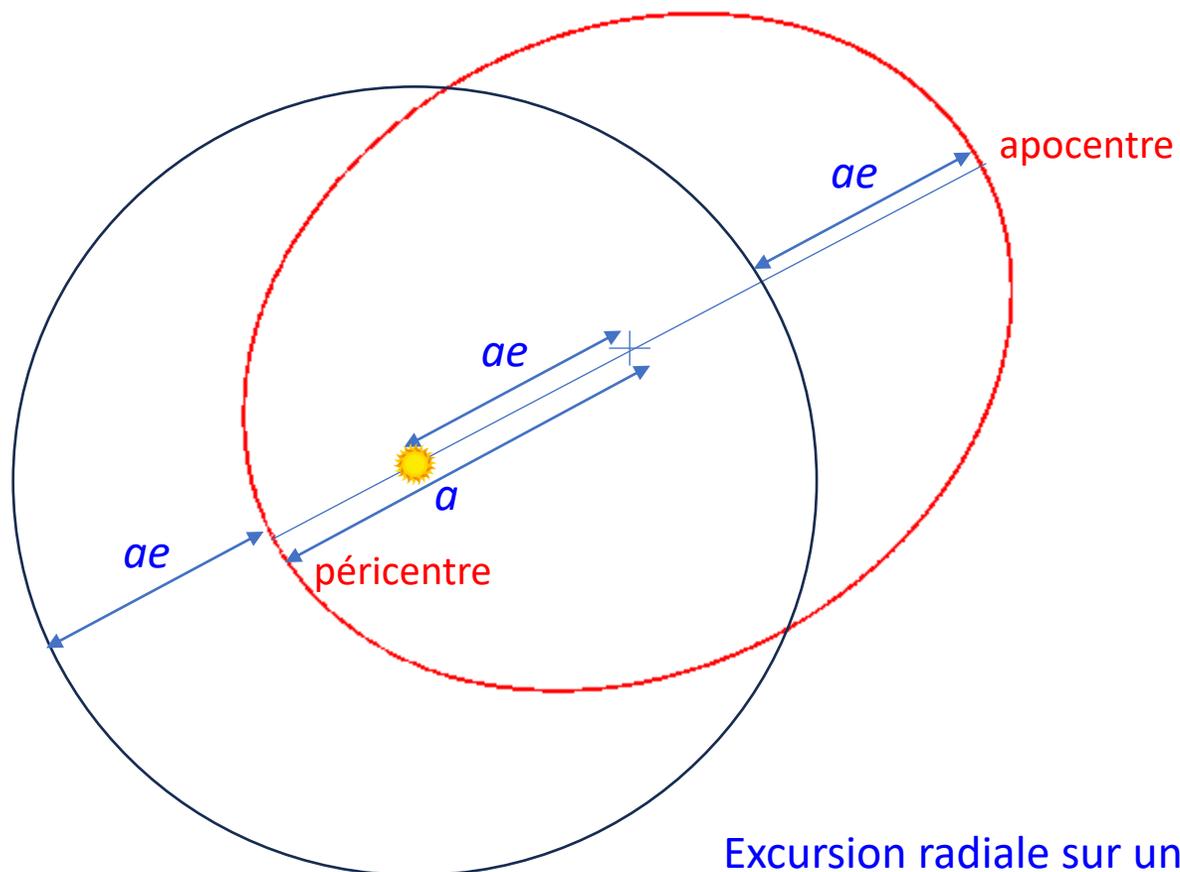


# Les orbites elliptiques

$a$ : demi grand axe

$e$ : excentricité

$i$ : inclinaison



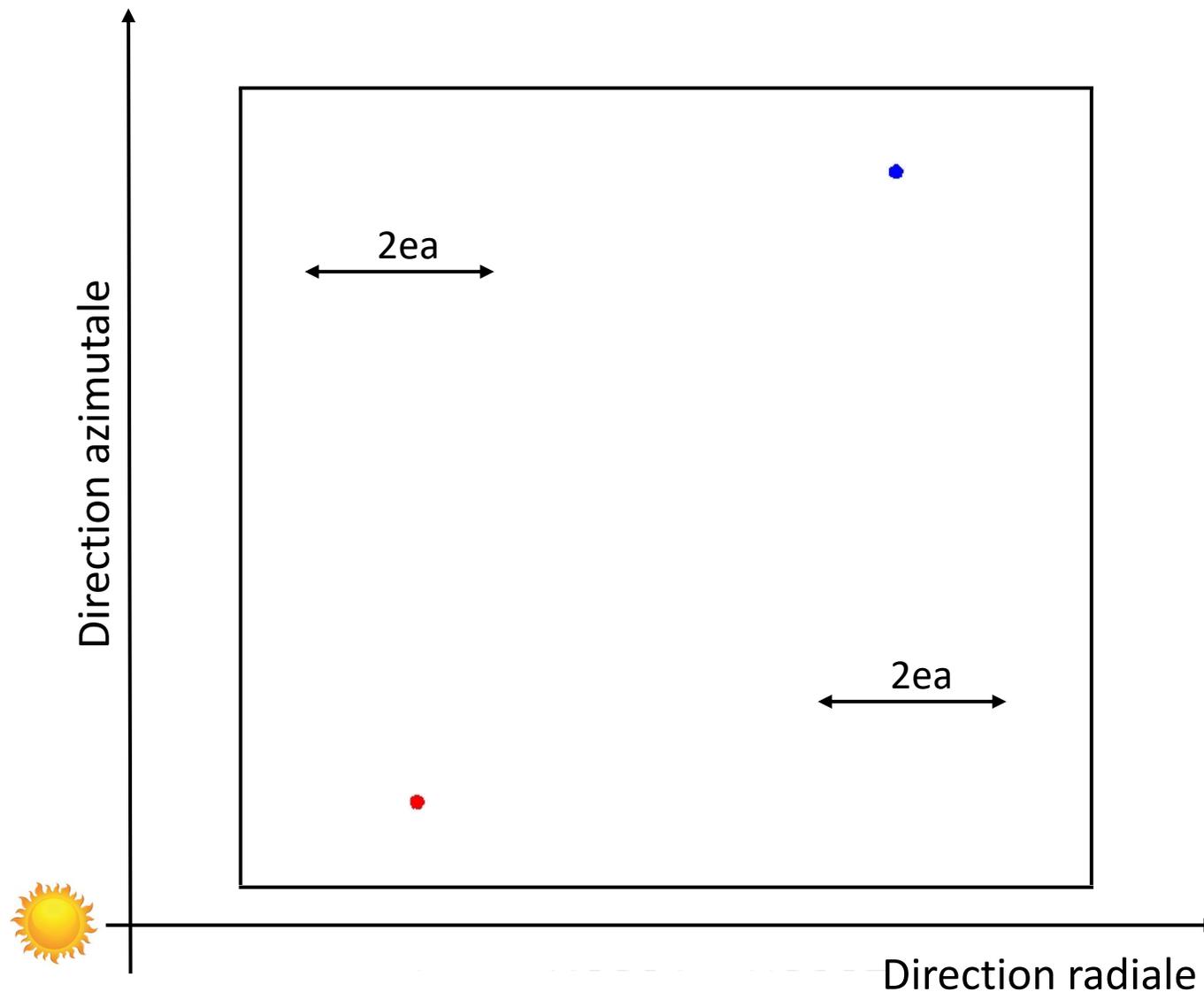
Excursion radiale sur une orbite:  $2ae$



# Excitation de l'excentricité des planétésimaux

Excitation de l'excentricité lors de la première rencontre

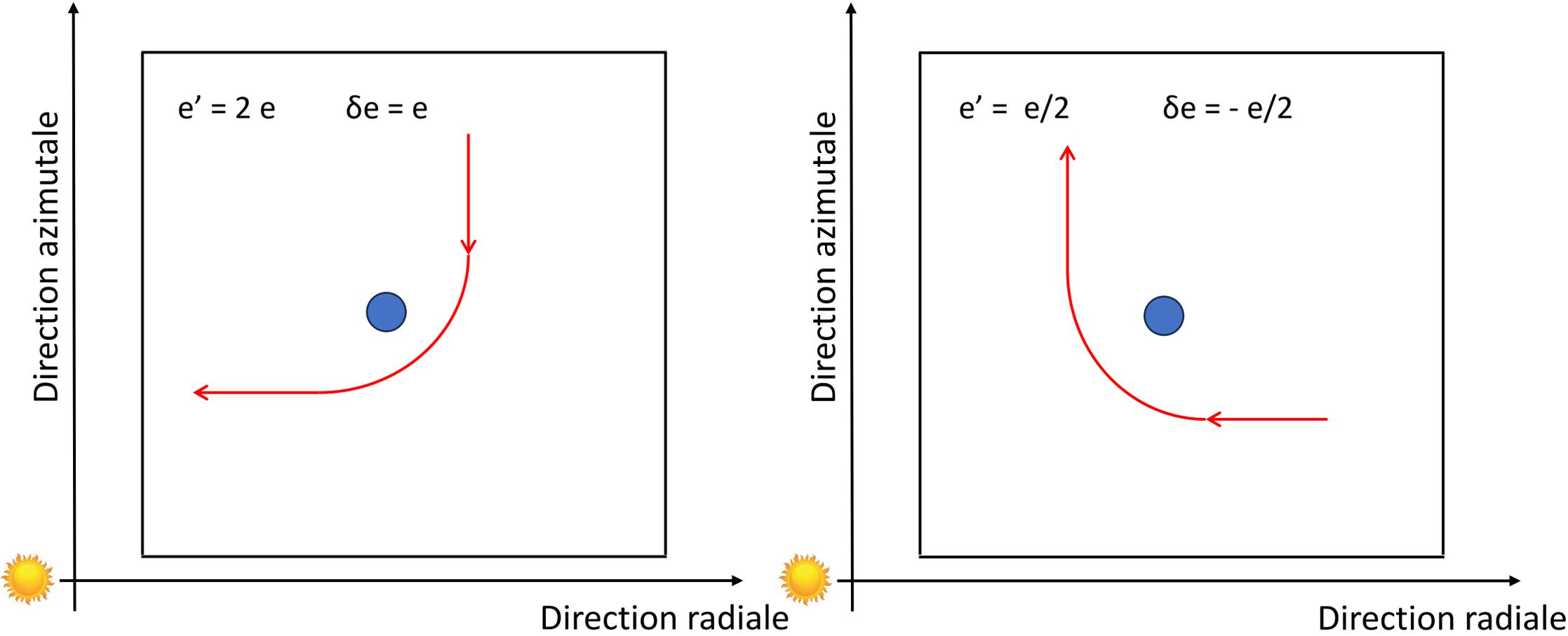
Animation de la rencontre proche entre deux planétésimaux de 100km, initialement sur orbites circulaires, dans un repère en corotation avec le barycentre des deux corps





# Excitation de l'excentricité des planétésimaux

Augmentation statistique de l'excentricité lors des rencontres successifs



$$\delta e = \frac{1}{2} (e - e/2) = e/4$$



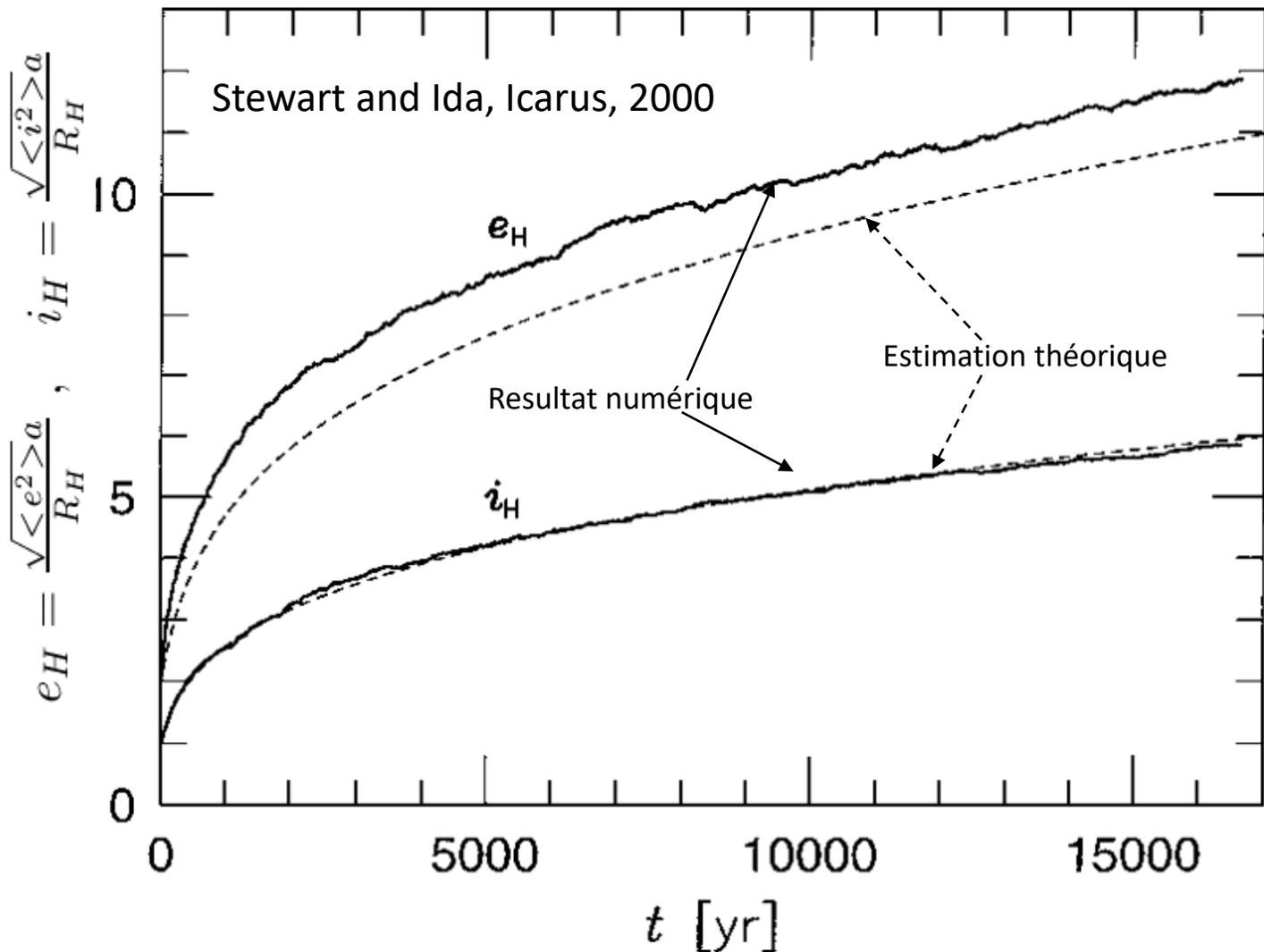
# Excitation de l'excentricité des planétésimaux

Excitation de l'excentricité et l'inclinaison moyennes d'un anneau de planétésimaux de  $10^{24}$ g, avec une densité de  $10\text{g/cm}^2$

A noter:  $e \sim 2i$

Taux de auto-excitation:

$$\frac{de}{dt} \propto \frac{\Sigma_p m_p \Omega}{e^3} \quad (\text{même pour } i)$$



Le forces d'amortissement, comme le frottement gazeux ( $de/dt \sim -e^2$ ), ou le collisions mutuelles ( $de/dt \sim -e$ ), finissent par saturer la croissance de l'excentricité et de l'inclinaison



## Collisions entre planétésimaux

Energie par unité de masse pour fragmentation catastrophique\* de la "cible", en fonction de la taille de celle-ci (Benz et Asphaug, Icarus, 1999)

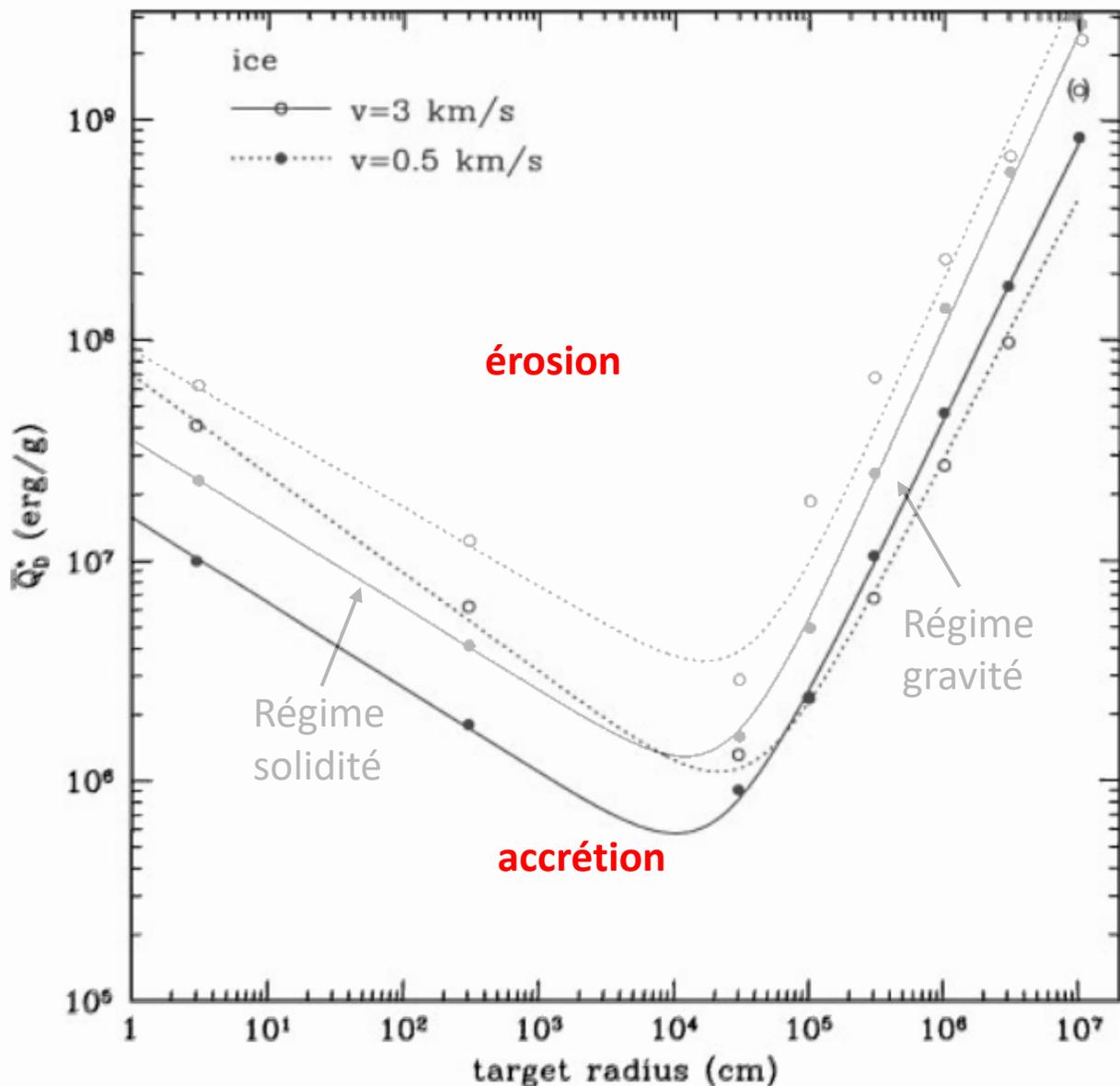
\*Le fragment majeur issu de la fragmentation a une masse inférieure à la moitié de la masse originelle de la cible

Pour collisions entre planétésimaux de tailles comparables on considère comme "cible" un objet fictif dont

$$m = m_1 + m_2$$

$$R = [R_1^3 + R_2^3]^{1/3}$$

Pour  $m_1 = m_2$  on a donc:





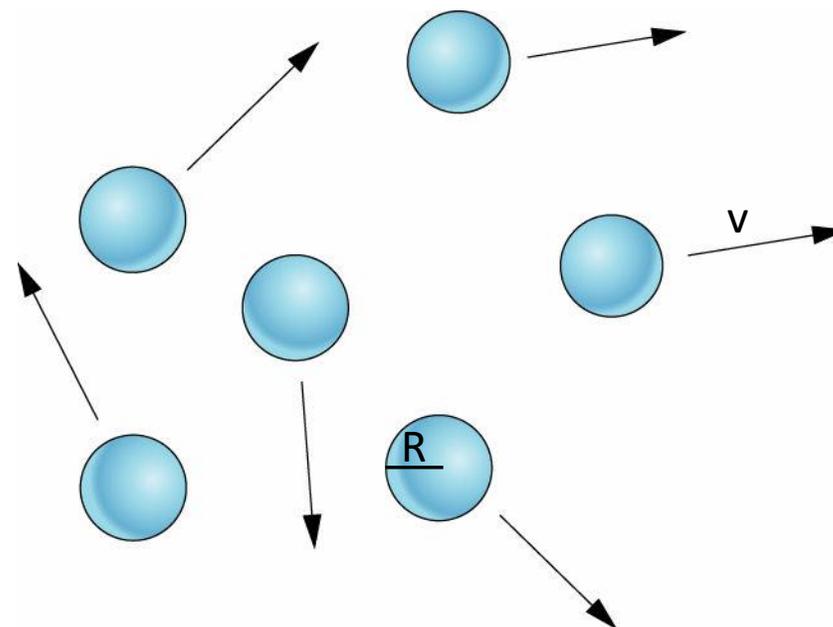
## Taux de collisions

Taux de collision:  $n \times \sigma \times v$  ( $t^{-1}$ )

$n$  : Nombre de particules par unité de volume ( $l^{-3}$ )

$v$  : vitesse relative moyenne :  $ev_K$  ( $l/t$ )

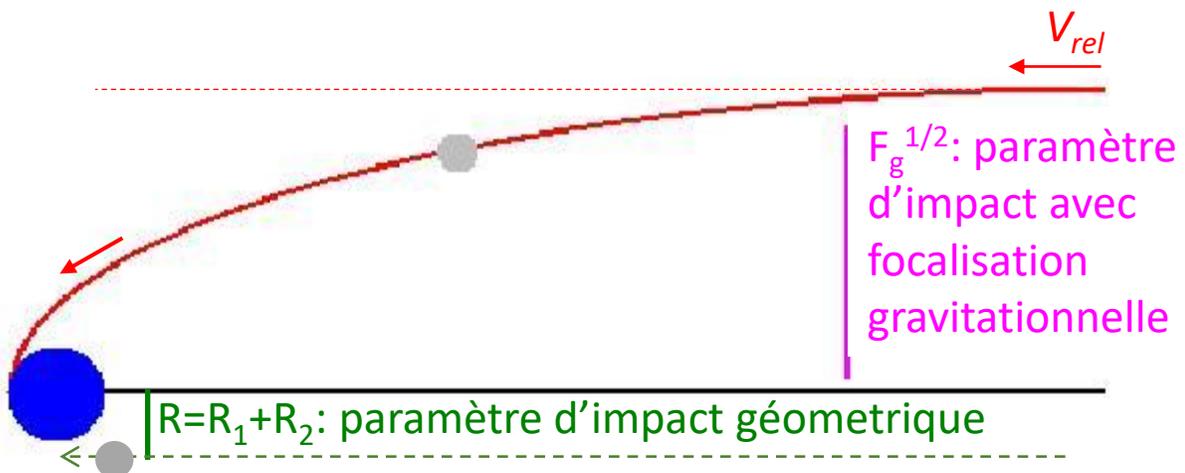
$\sigma$  : Section collisionnelle ( $l^2$ )





## Section collisionnelle en présence de gravité

Section collisionnelle =  $\pi$  (paramètre d'impact)<sup>2</sup>



$$F_g = 1 + V_{esc}^2 / V_{rel}^2 \quad \text{Facteur de focalisation gravitationnelle}$$

$$V_{esc} = \sqrt{2 \frac{GM}{R}} \propto M^{1/3}$$



# Croissance accélérée (Runaway growth)

Taux de croissance d'un objet:

$$\frac{dM}{dt} \propto R^2 F_g \propto M^{2/3} F_g$$

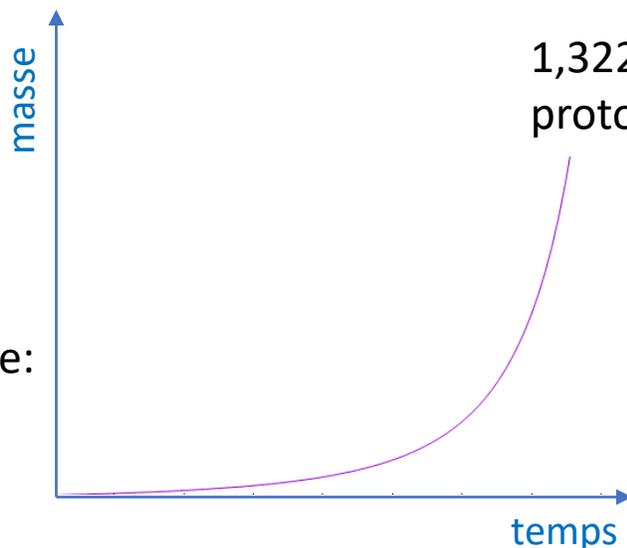
Si  $V_{esc} \gg V_{rel} \Rightarrow F_g \sim V_{esc}^2 / V_{rel}^2$   
 $V_{esc} = \sqrt{2 \frac{GM}{R}} \propto M^{1/3}$

Par substitution:

$$\frac{dM}{dt} \propto \frac{M^{4/3}}{V_{rel}^2}$$

(croissance accélérée)  
ou, de façon équivalente:

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \propto \frac{M^{1/3}}{V_{rel}^2}$$



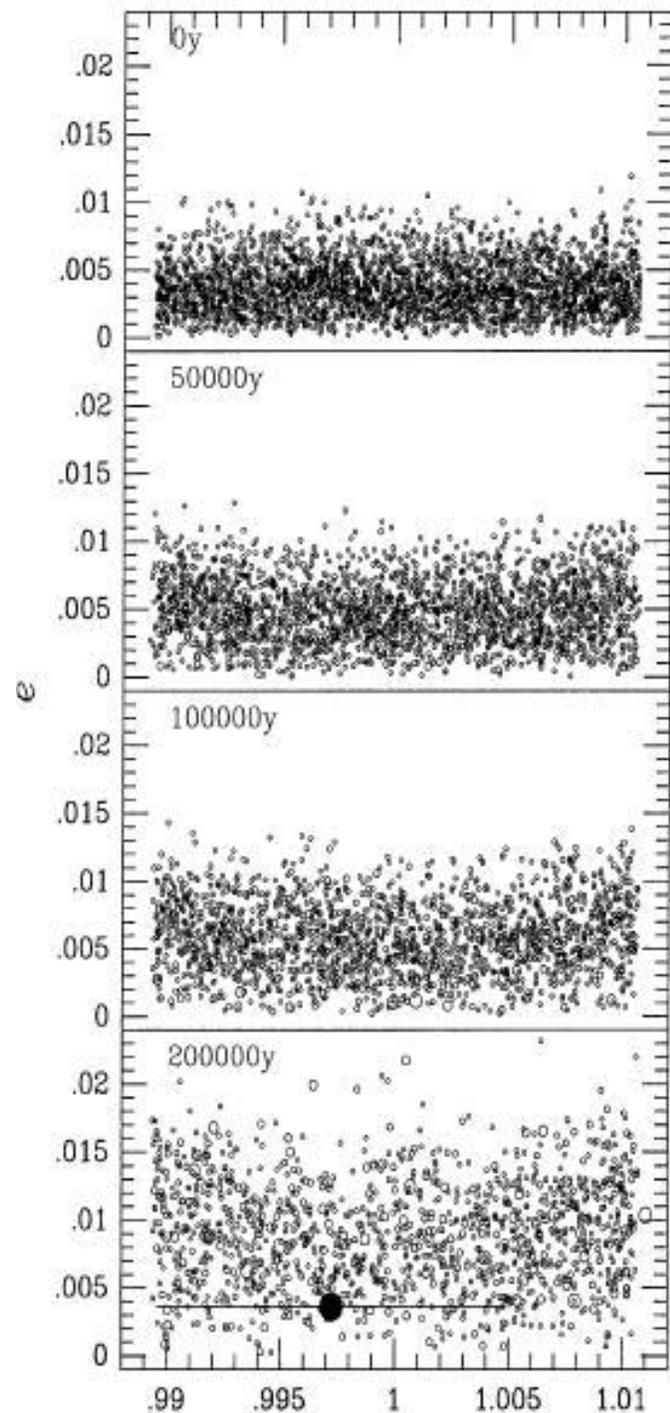
Kokubo and Ida, 2000:

Condition initiale:

3,000 planétésimaux de  $10^{23}g$  chacun

Resultat:

1,322 planétésimaux +  
protoplanète de  $2 \times 10^{25}g$



La croissance relative est fonction croissante de la masse

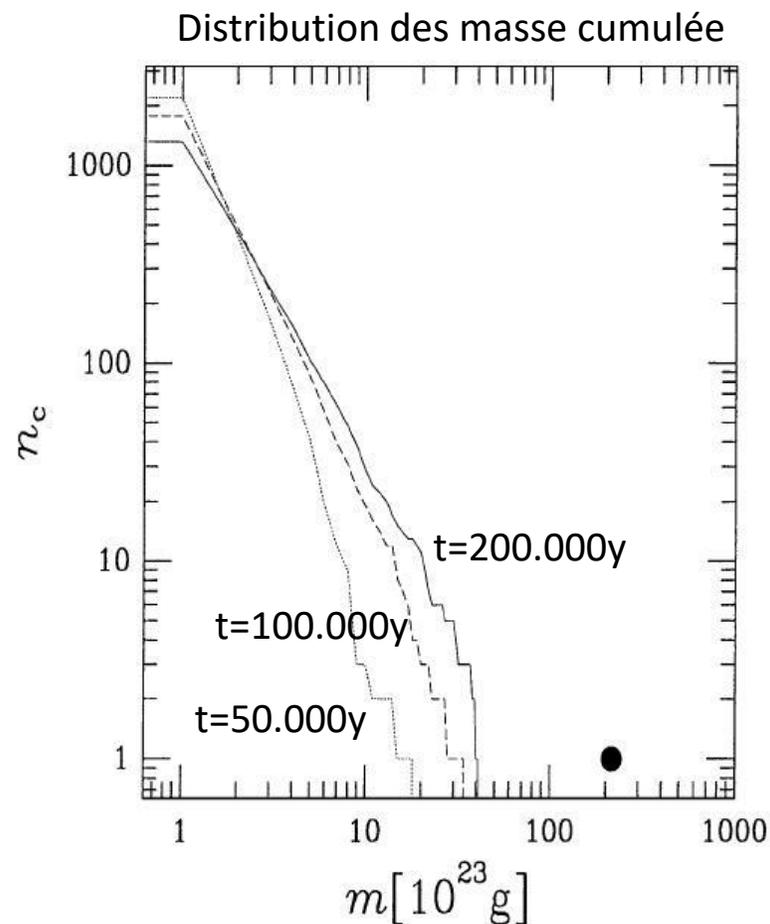
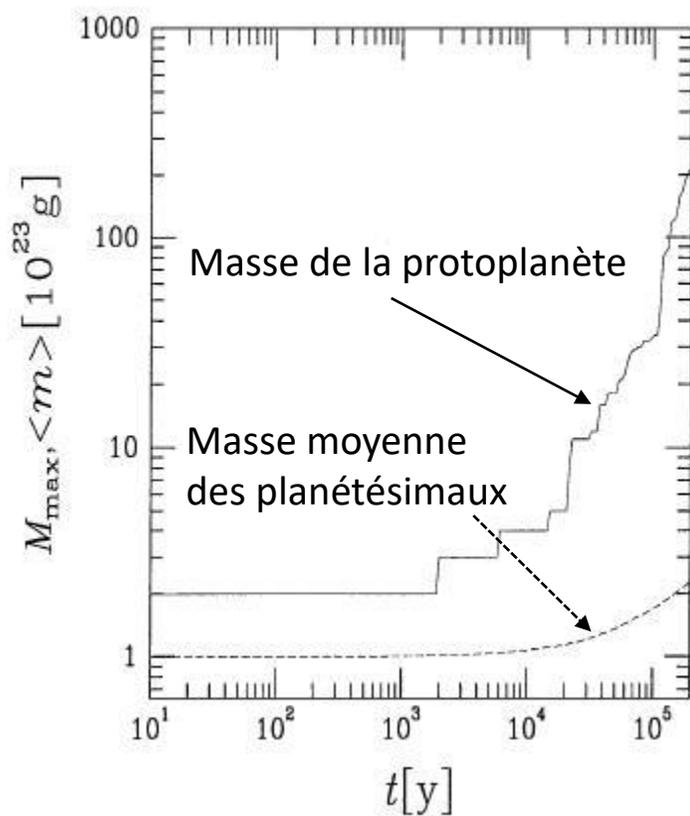


## Croissance accélérée (*Runaway growth*)

Kokubo and Ida, 2000:

Condition initiale: 3,000 planétésimaux de  $10^{23}$ g chacun

Resultat: 1,322 planétésimaux + protoplanète de  $2 \times 10^{25}$ g





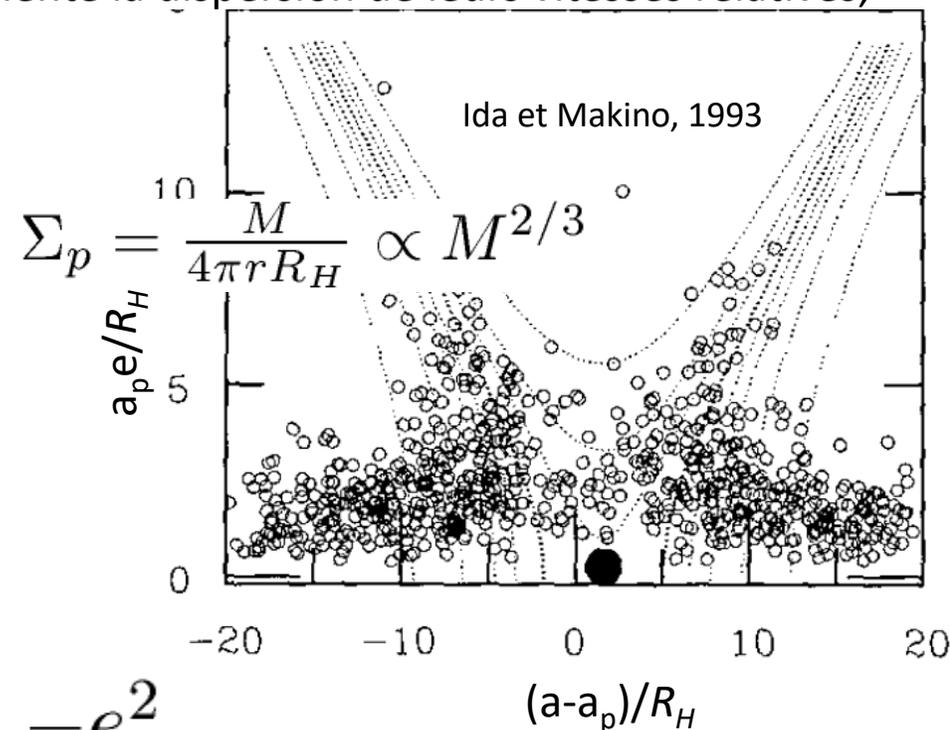
## Fin de la croissance accélérée

La protoplanète perturbe les orbites des planétésimaux et augmente la dispersion de leurs vitesses relatives, ce qui réduit le facteur de focalisation gravitationnel.

Excitation des excentricités:

$$\frac{de}{dt} \propto \frac{\Sigma_p m_p \Omega}{e^3} \propto \frac{M^{5/3}}{e^3}$$

← "Densité de masse" de la protoplanète  
← Masse de la protoplanète  $M$   
← Excentricité des planétésimaux



Amortissement des excentricités par friction gazeuse:  $\frac{de}{dt} \propto -e^2$

$$e_{equil} \propto M^{1/3}$$

$$V_{rel} \propto e_{equil} v_K \propto M^{1/3}$$

$$V_{esc} = \sqrt{2 \frac{GM}{R}} \propto M^{1/3}$$

$$F_g = O(1) \quad (\text{indépendant de } M)$$



## Croissance oligarchique

Taux de croissance:

$$\frac{dM}{dt} \propto R^2 F_g \propto M^{2/3} F_g$$

$$F_g = O(1)$$

$$\frac{dM}{dt} \propto M^{2/3}$$

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \propto M^{-1/3}$$

La croissance relative est fonction décroissante de la masse.

On pourrait imaginer que, grâce à la dépendance en  $M^{-1/3}$  du taux de croissance relative, les planétésimaux croissent très vite et attrapent en masse les protoplanètes.

Mais en réalité, à cause de l'excitation des excentricités, les vitesses d'impact deviennent disruptives pour les planétésimaux ( $Q > Q_D^*$ ). Seules les protoplanètes peuvent continuer à croître, au détriment des planétésimaux

Toutes les protoplanètes tendent à avoir une masse comparable. Comme des oligarques, elles détiennent la plupart de la masse collective.



## Croissance oligarchique

Encore depuis Kokubo and Ida, 2000

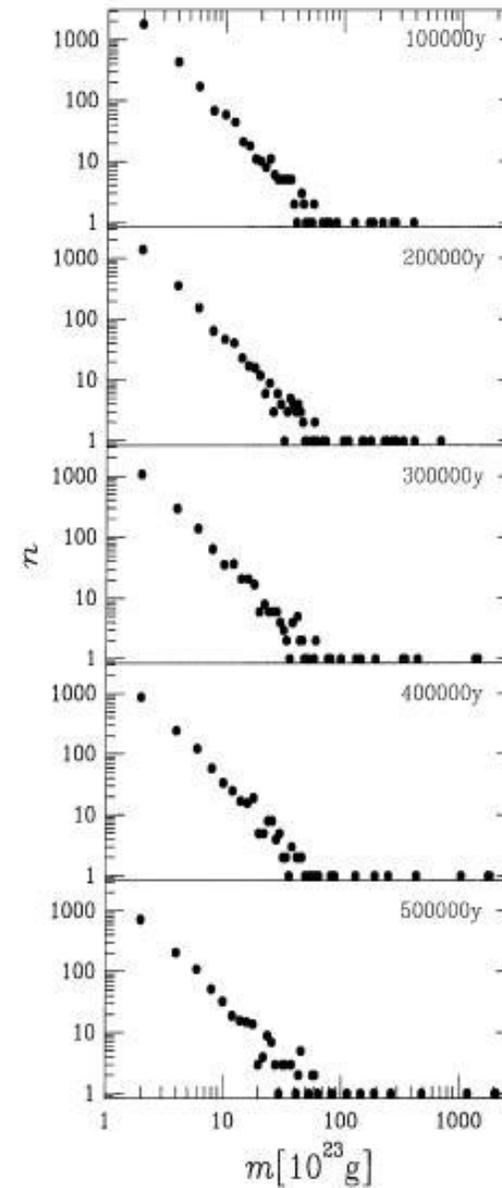
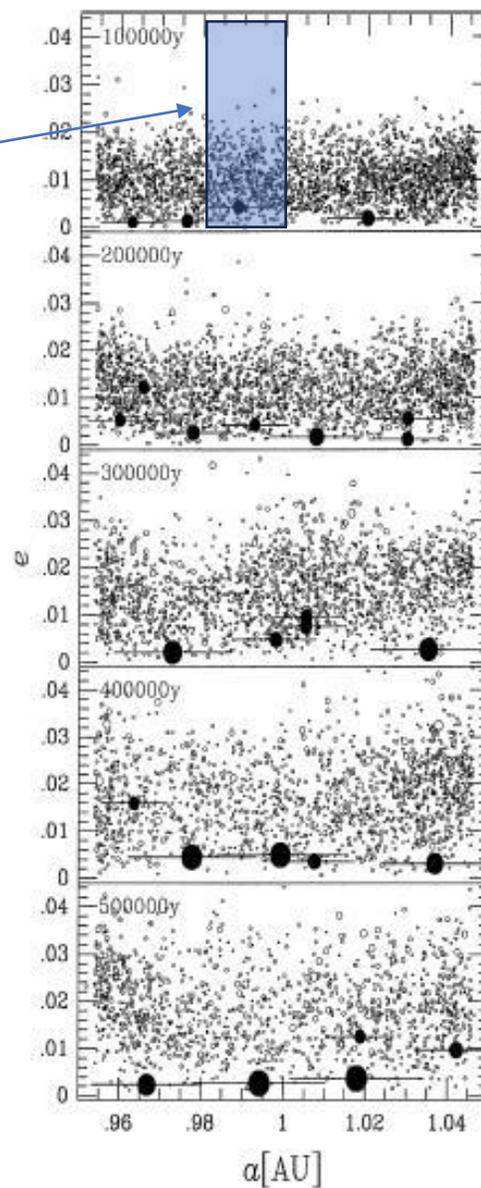
Taille de la zone étudiée auparavant

Points noirs: masse  $> 2 \times 10^{25} \text{g}$

Lignes horizontales:  $5 R_H$

Pour être stables, les protoplanètes doivent être séparées de  $\sim 5 R_H$

Puisque  $R_H$  augmente avec la masse, cette distance ne peut pas être maintenue. Certaines protoplanètes doivent fusionner par un impact géant et ainsi réduire leur nombre total.





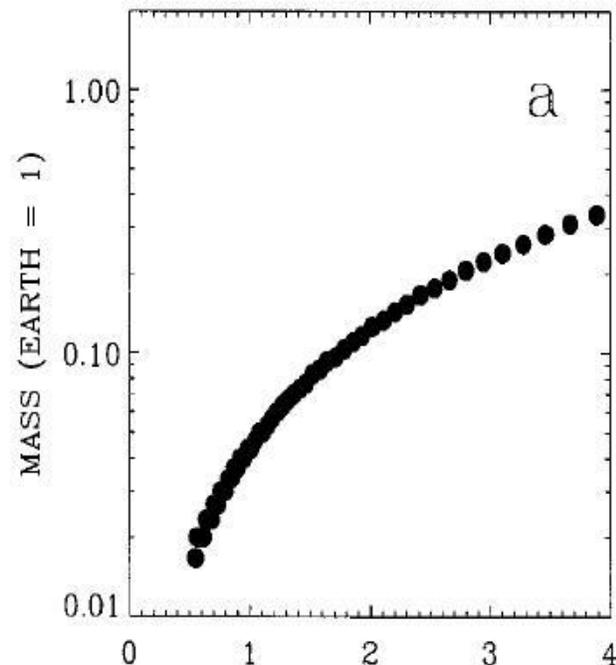
## Fin de la croissance oligarchique

La croissance oligarchique s'arrête quand chaque oligarque a accreté tous les objets qui croisent son anneau d'influence, de largeur  $\sim 5 R_H$ .

$$M \sim 2\pi r 10 R_H \Sigma_p \text{ with } R_H = r (M/3M_*)^{1/3}$$

$$M \sim [60 r^2 \Sigma_p / (3M_*)^{1/3}]^{3/2}$$

Pour  $\Sigma_p \sim 6\text{g/cm}^2/r$   
(Chambers et Wetherill,  
Icarus, 1998)

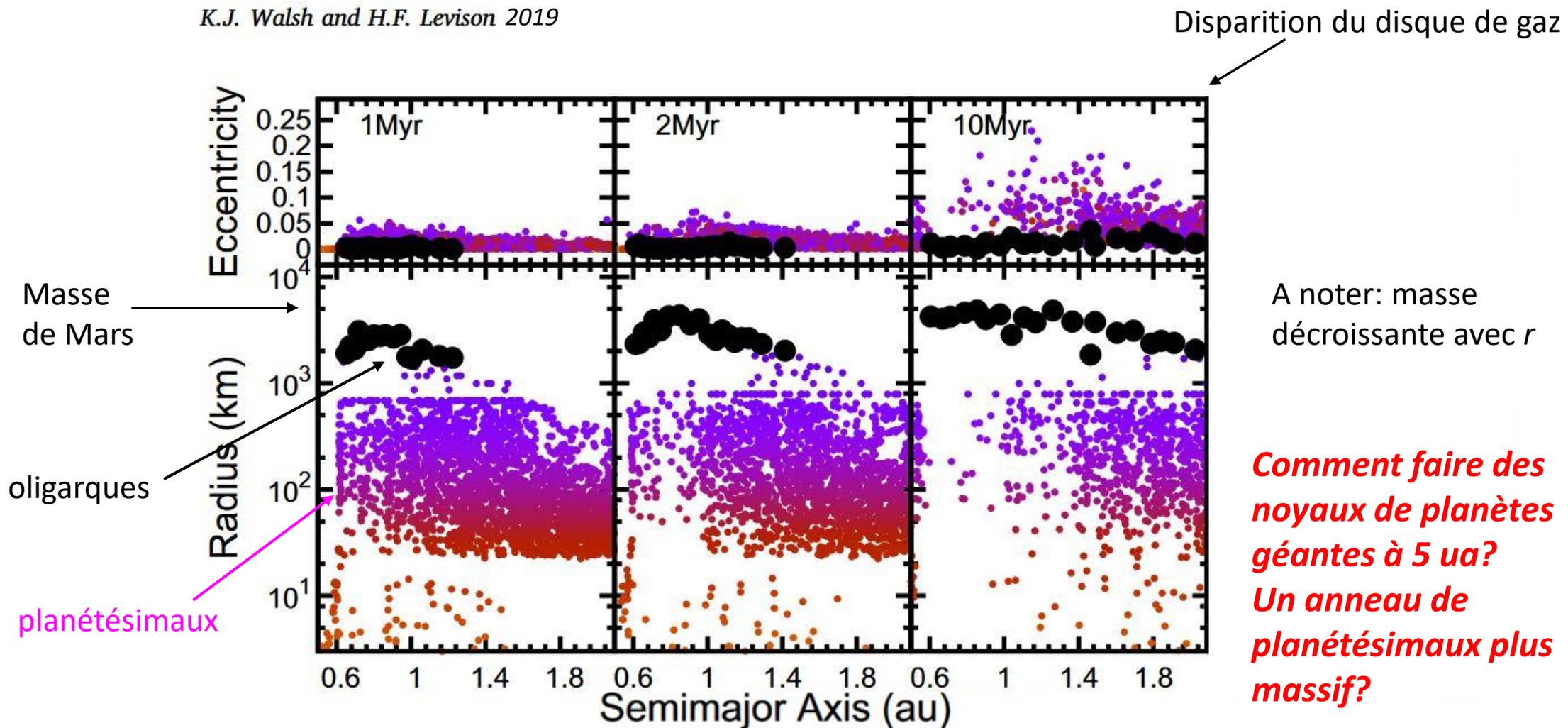


La réalité est beaucoup plus complexe.  
Ça prend du temps pour croître les oligarques  
et ce temps augmente avec la distance



# Fin de la croissance oligarchique

K.J. Walsh and H.F. Levison 2019





## Accrétion vs. éjection

L'excitation par période orbitale de l'excentricité des planétésimaux qui rencontrent une protoplanète dépend de la masse de celle-ci mais pas de sa distance à l'étoile:

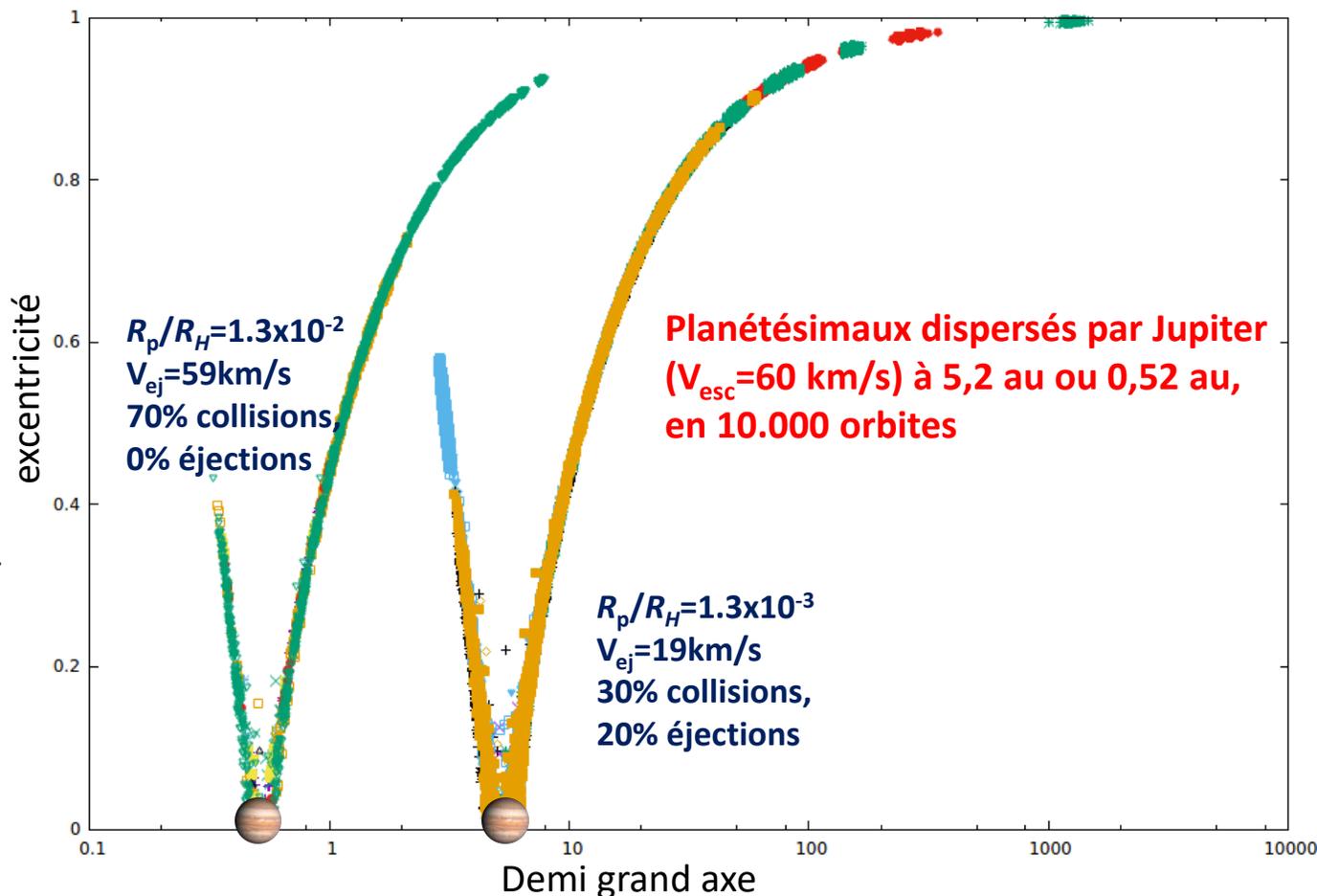
$$\frac{1}{\Omega} \frac{de}{dt} \propto \frac{M_p^{5/3}}{e^3}$$

Ça se comprend facilement en renormalisant la distance étoile - protoplanète

Cependant, la taille physique d'une planète ne se renormalise pas. Une planète loin de l'étoile est beaucoup plus petite par rapport à son rayon de Hill que la même planète plus proche.

Par conséquent:

- 1) Les collisions se font moins fréquentes
- 2) Les déflexions lors des rencontres non-collisionnelles les plus proches, de l'ordre de  $GM_p/[R_p (e v_K)^2]$ , deviennent plus fortes, en facilitant les éjections





## Nombre de Safronov

Défini comme:

$$\Theta = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p} \frac{r}{GM_*}}$$

Traduit la capacité de la planète à pousser vers l'éjection les orbites déjà fortement excentriques

Pas de valeur de seuil. Cependant pour  $\Theta > 1$  l'éjection est favorisée; pour  $\Theta < 1$  l'accrétion est favorisée.

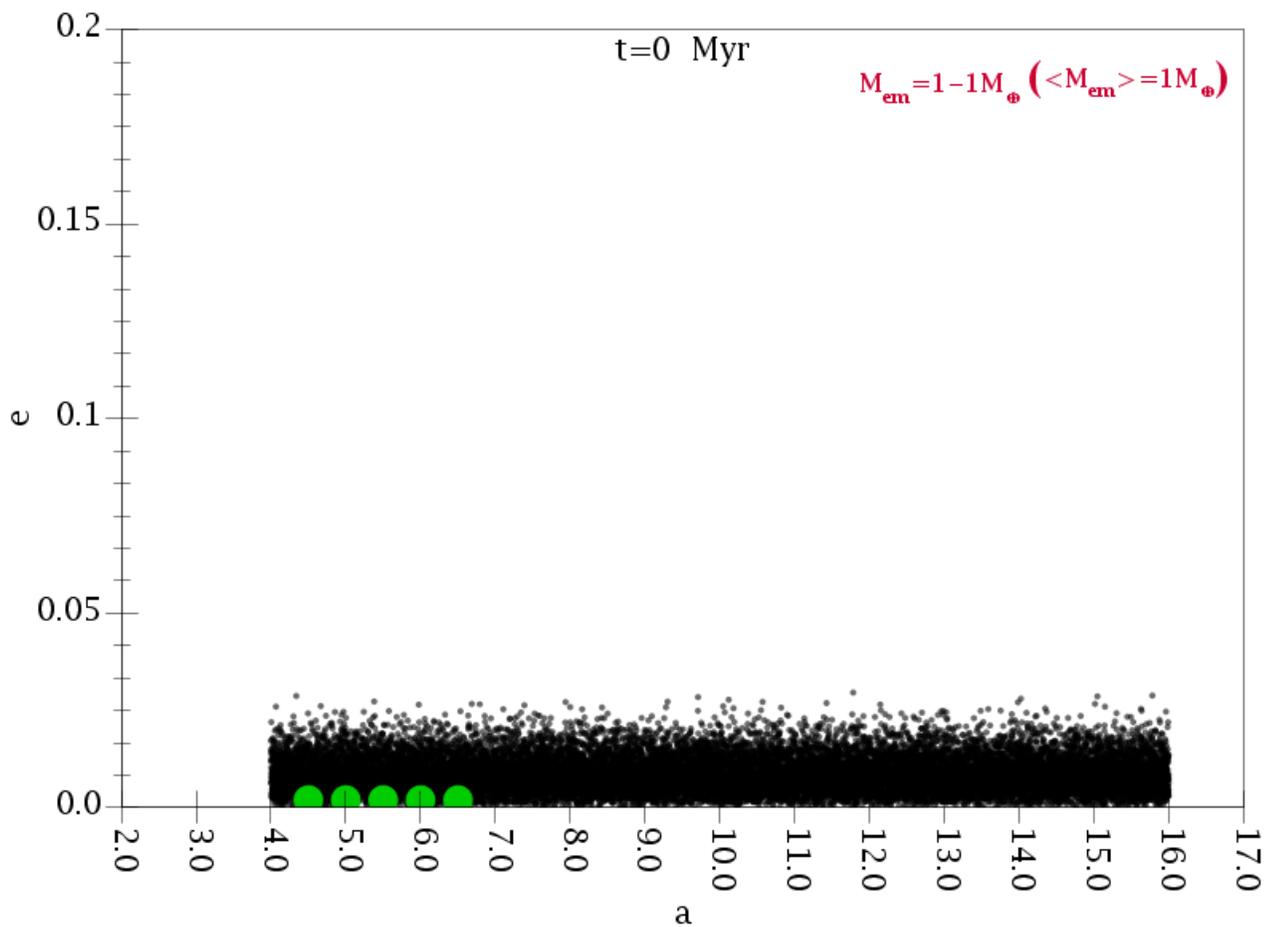
Puisque  $\Theta \sim \sqrt{r}$  l'accrétion des planétésimaux est peu efficace loin de l'étoile



## Excitation orbitale et frottement gazeux

On pourrait penser que, en présence d'un fort frottement gazeux, l'éjection soit empêchée et la protoplanète puisse accréter tous les objets disponibles.

Mais la combinaison entre excitation orbitale et amortissement par la friction, place les planétésimaux hors de portée des protoplanètes



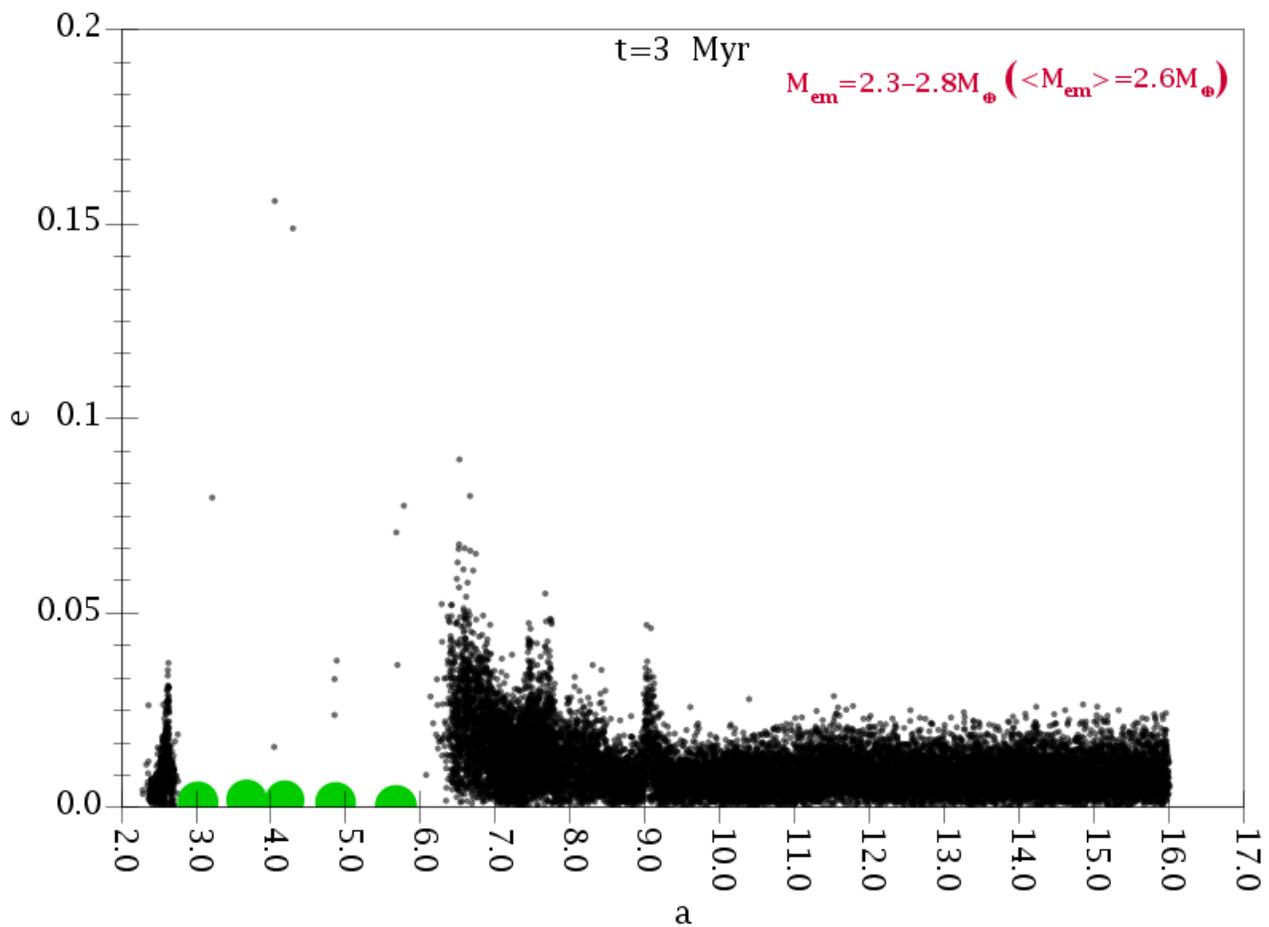
Levison et al., 2010



## Excitation orbitale et frottement gazeux

On pourrait penser que, en présence d'un fort frottement gazeux, l'éjection soit empêchée et la protoplanète puisse accréter tous les objets disponibles.

Mais la combinaison entre excitation orbitale et amortissement par la friction, place les planétésimaux hors de portée des protoplanètes



Levison et al., 2010

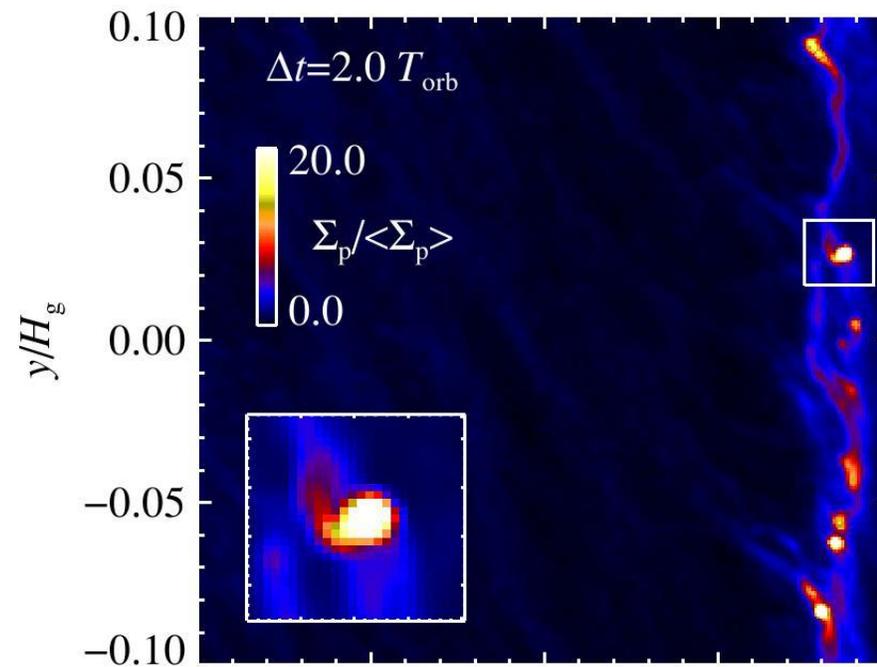


## Croissance par accrétion de poussières (pebble accretion)

Quand les planétésimaux se forment, ils sont immergés dans un disque de gaz et poussières

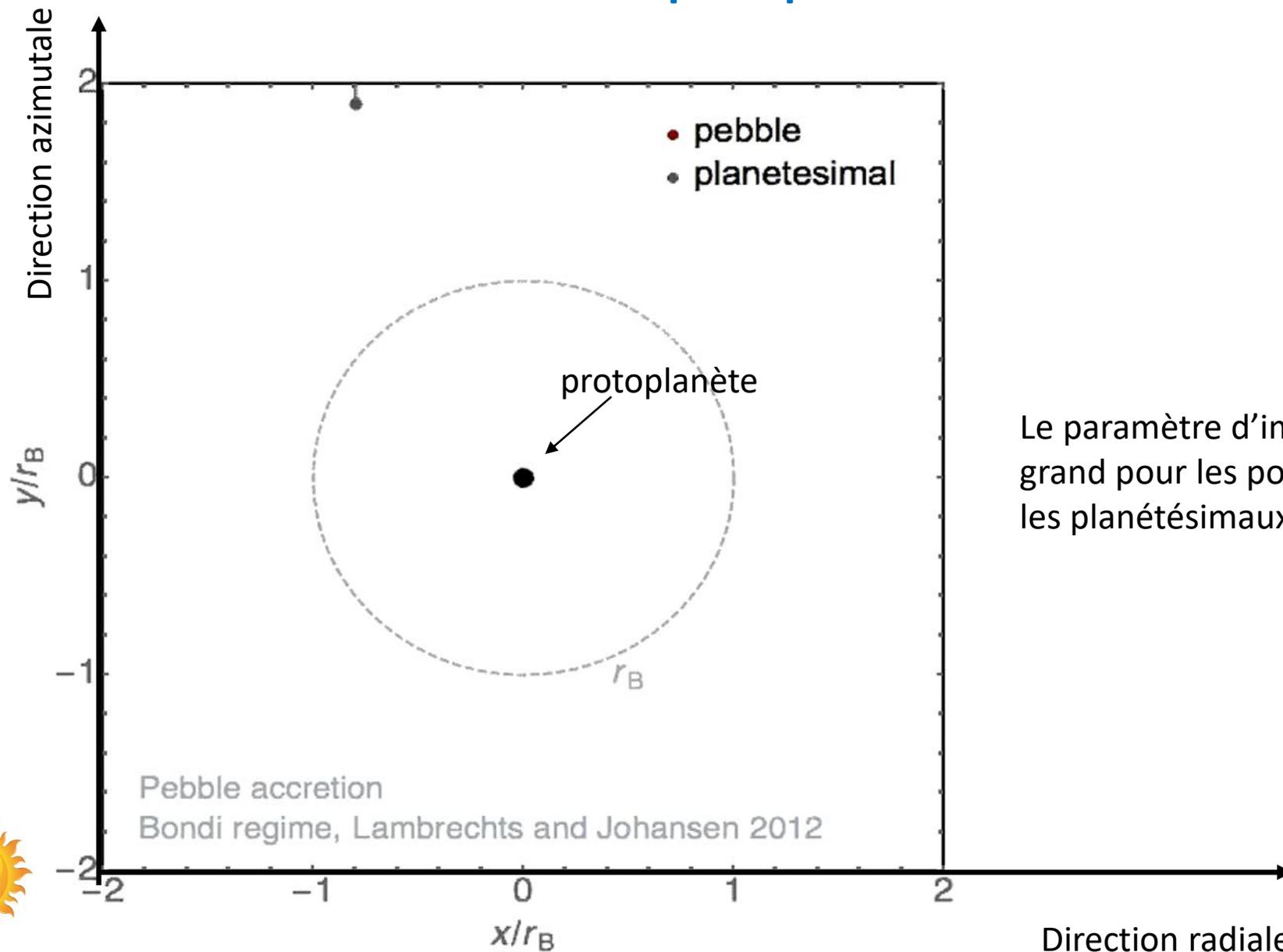
Ils peuvent donc continuer à croître en accrétant des poussières

C'est le processus dit de "*pebble accretion*"  
(Johansen and Iacerna, 2010; Ormel and Klahr, 2010;  
Murray-Clay et al., 2011; Lambrechts and Johansen, 2012)





## Le principe



Le paramètre d'impact est bien plus grand pour les poussières que pour les planétésimaux.





# Estimations analytiques

Le modèle:

La protoplanète est immergée dans un disque de gaz, en rotation sous-Keplerienne, dont le flux n'est pas significativement perturbé par celle-ci.

Dans un repère tournant avec la protoplanète, les équations pour la poussière sont donc:

$$v_x = -\frac{GM_p x}{r^3} t_f$$

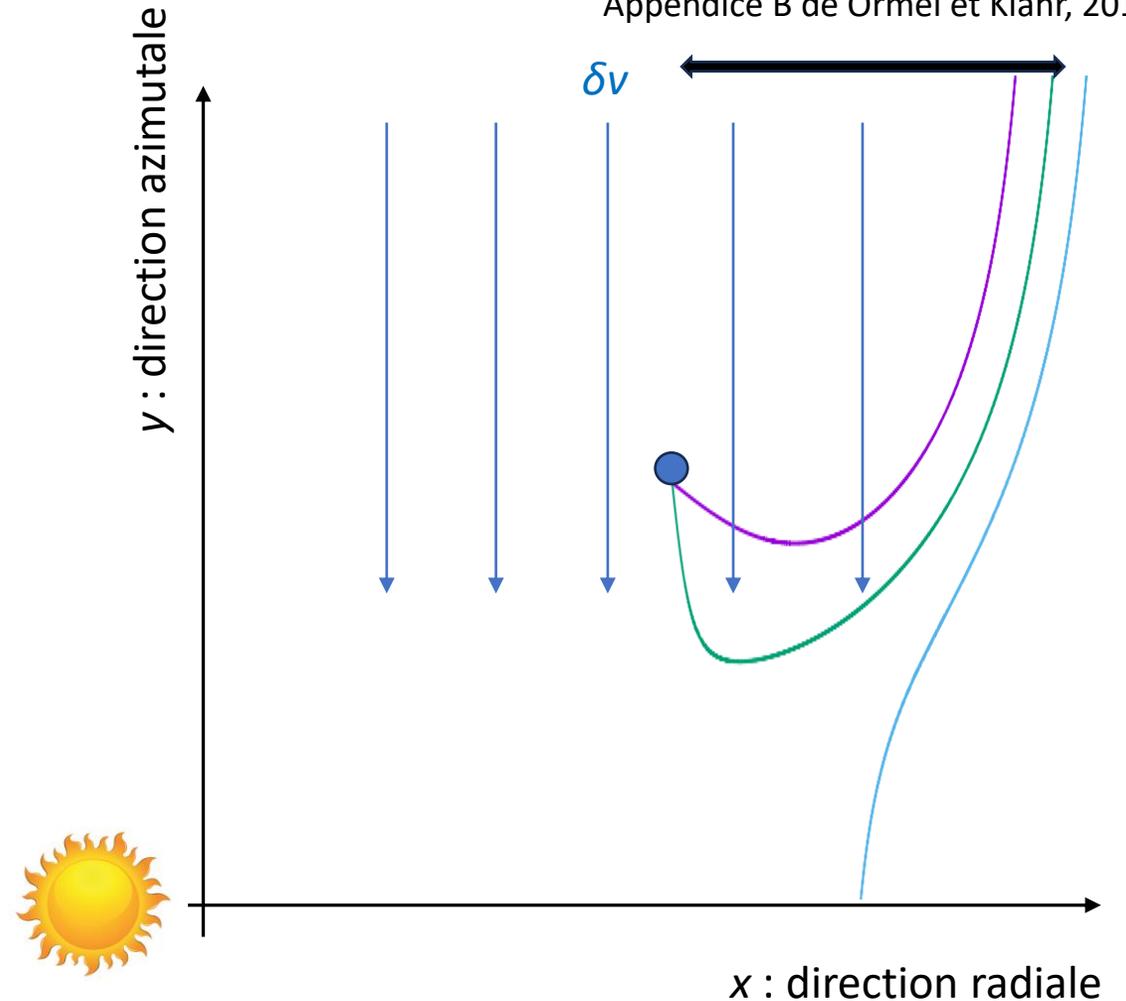
$$v_y = -\frac{GM_p y}{r^3} t_f - \delta v$$

Où  $x$  est la direction radiale,  $y$  celle azimutale, et  $\delta v$  est la vitesse du gaz par rapport à la protoplanète

Paramètre d'impact

$$b = 2\sqrt{GMt_f / \delta v}$$

Appendice B de Ormel et Klahr, 2010





## Estimations analytiques

En imposant  $\delta v = \eta v_K$

$$b = 2\sqrt{\frac{GMt_f}{\eta v_K}} = 2\sqrt{\frac{t_f}{t_B}} R_B$$

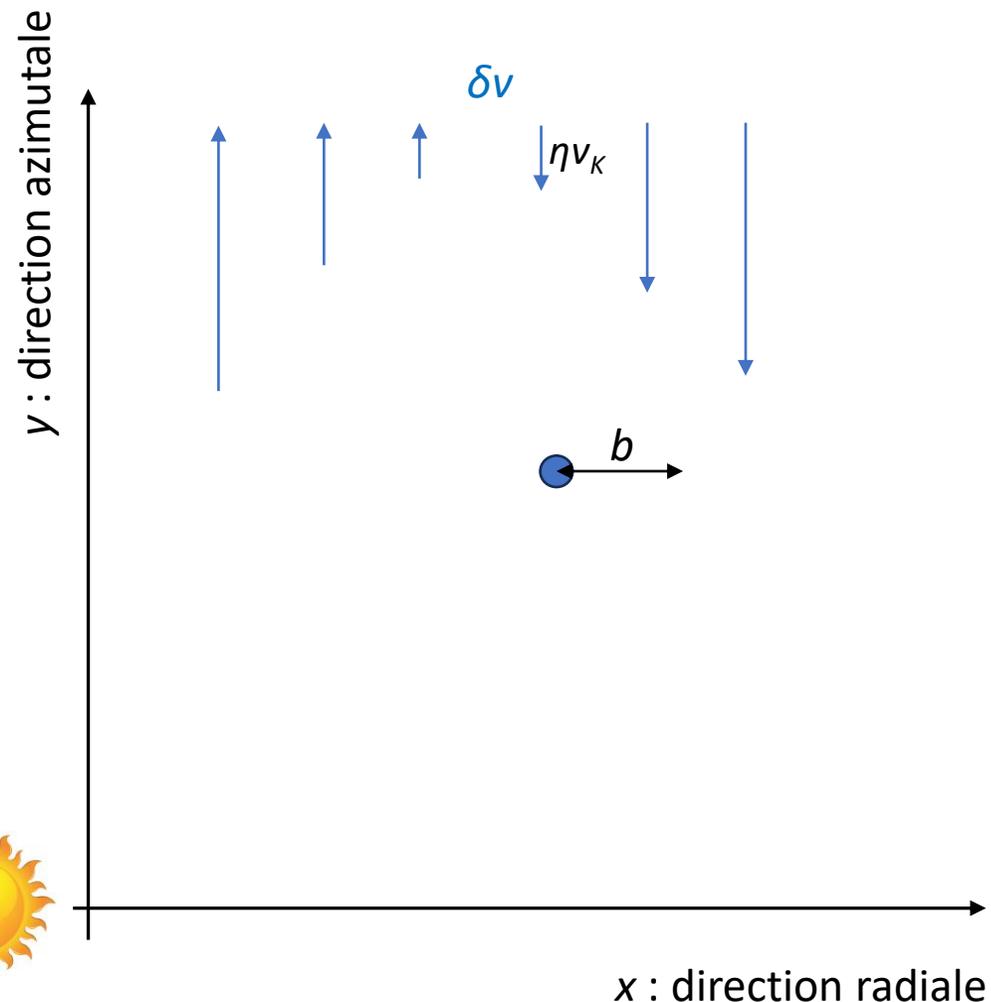
où  $R_B = \frac{GM}{(\eta v_K)^2}$  (rayon de Bondi) et  $t_B = \frac{R_B}{\eta v_K}$

Cependant, dans un disque en cisaillement Keplerien, la vitesse du gaz par rapport à la planète est:

$$\delta v = \eta v_K + \frac{3}{2}\Omega b$$

Dans la limite  $\delta v \sim (3/2)b\Omega$  on trouve:

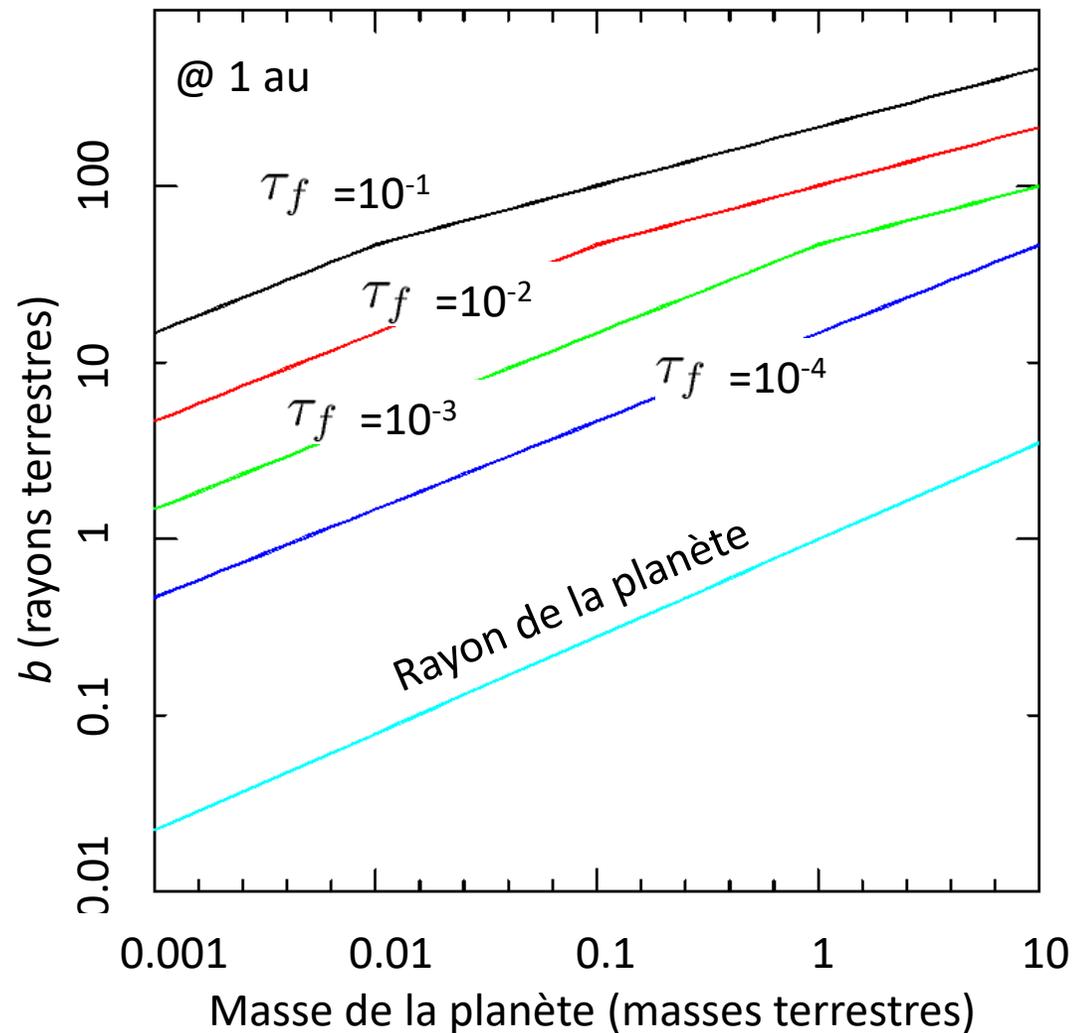
$$b = 2\sqrt{GMt_f/\delta v} = 2\tau_f^{1/3} R_H$$





## Estimations analytiques

$$b = \min\left(2\sqrt{\frac{t_f}{t_B}} R_B, 2\tau_f^{1/3} R_H\right)$$





## Taux d'accrétion (2D vs. 3D)

En 3D ( $b \ll H_p$ )

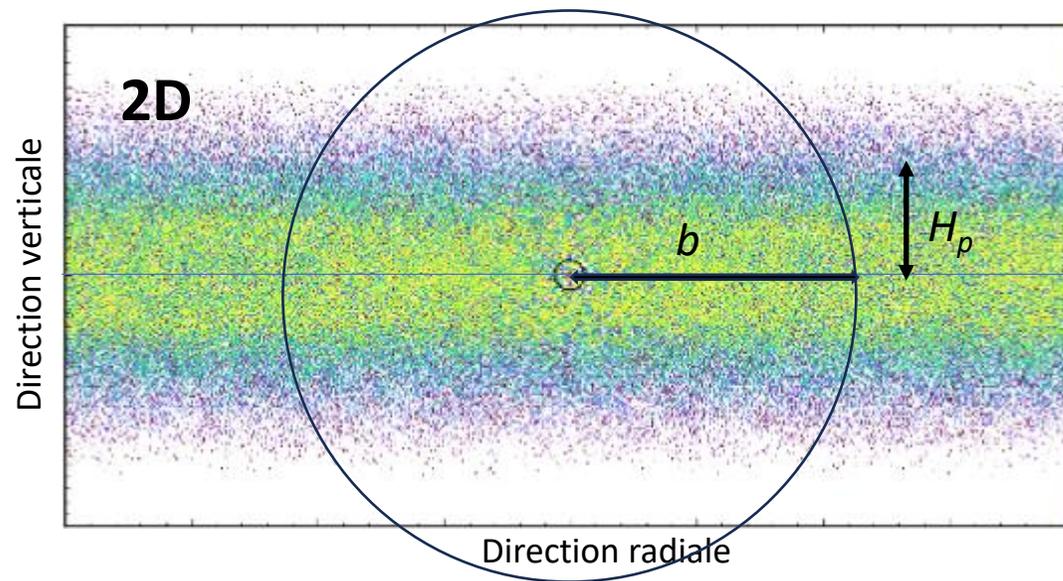
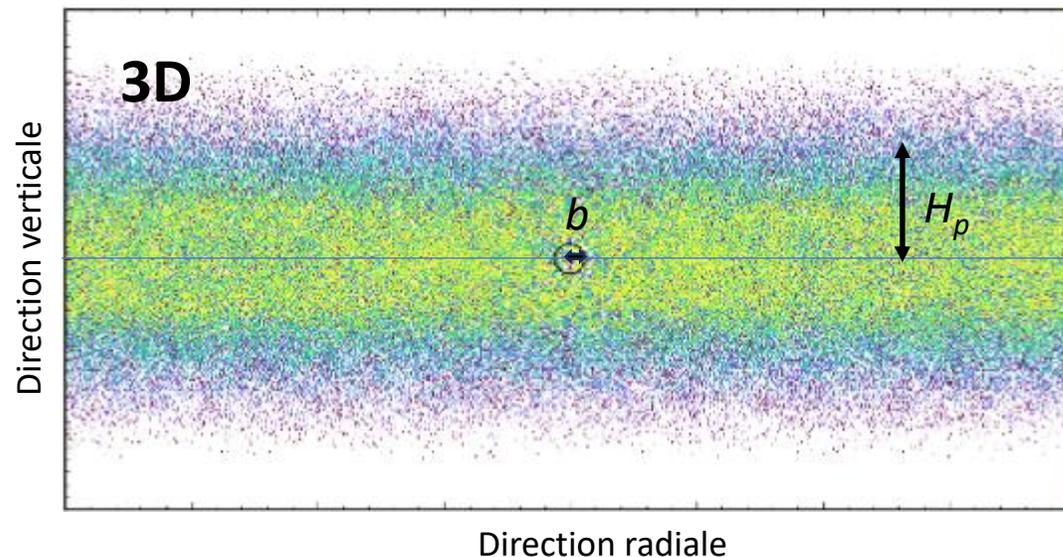
$$\dot{M}_{3D} = \pi b^2 \frac{\Sigma_p}{\sqrt{2\pi} H_p} \delta v$$

En 2D ( $b \gg H_p$ )

$$\dot{M}_{2D} = 2b \Sigma_p \delta v$$

où  $\delta v = \eta v_K + \frac{3}{2} \Omega b$

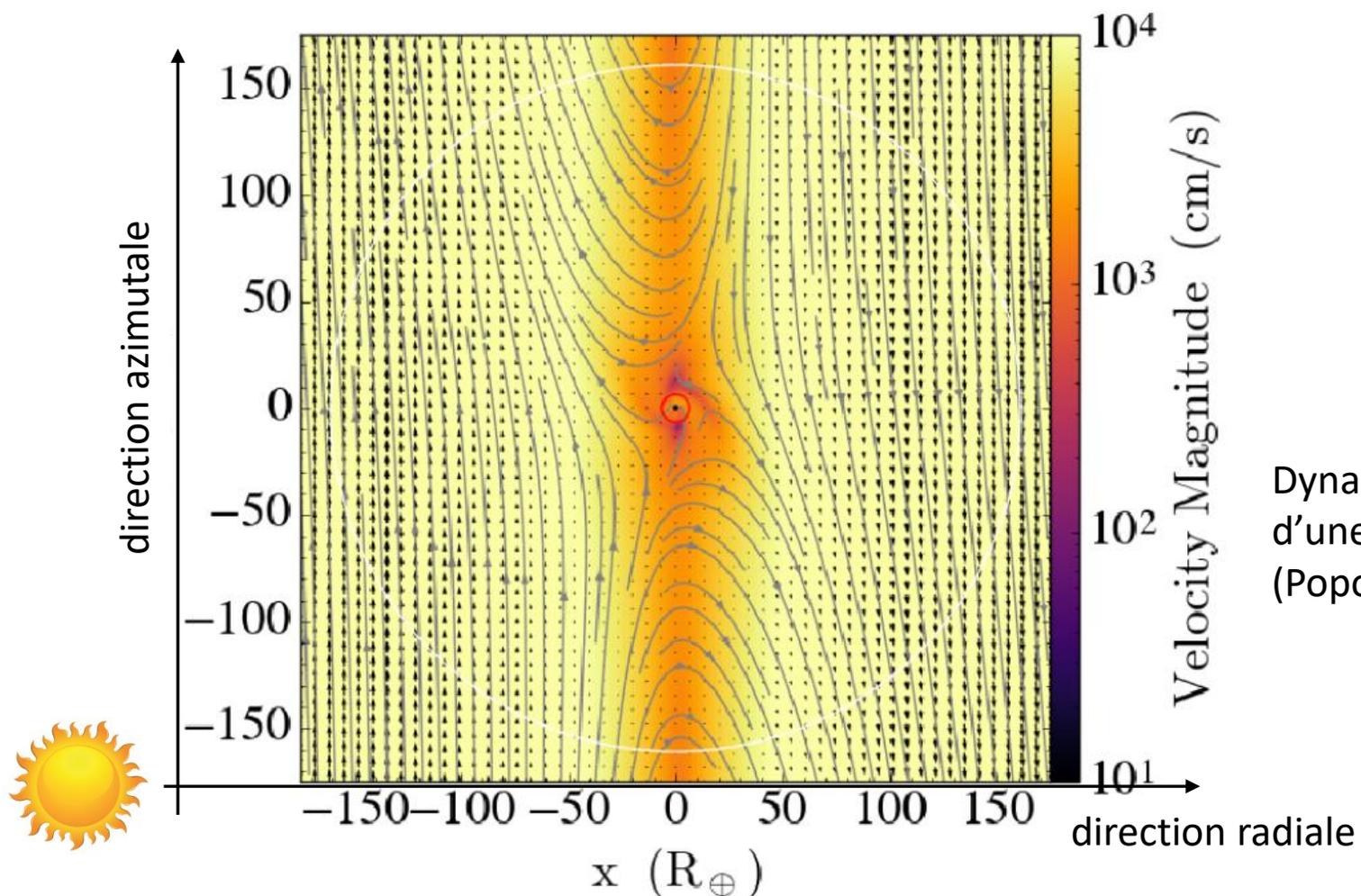
À noter:  $\dot{M}_{3D} \ll \dot{M}_{2D}$





## Vérifications numériques

Si  $b$  est grand, et donc la planète massive, celle-ci affecte aussi la dynamique du gaz, en invalidant les hypothèses utilisées dans les estimations analytiques

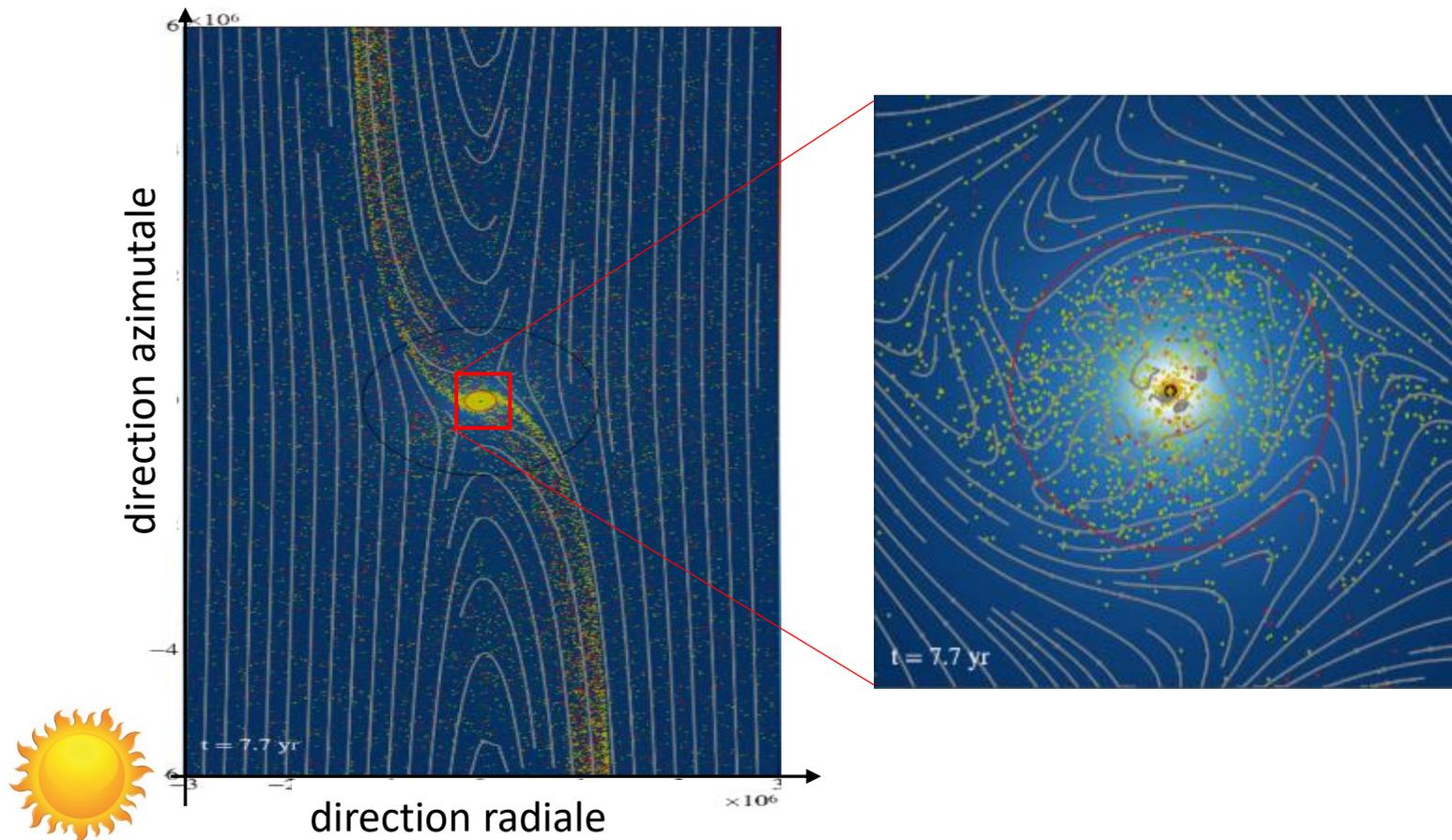


Dynamique du gaz en présence d'une planète de 1 masse terrestre (Popovas et al., MNRAS, 2018)



## Vérifications numériques

Distribution des particules sur le plan médian du disque, perturbées par une planète de 1 masse terrestre (Popovas et al., MNRAS, 2018)





## Vérifications numériques

Prédiction théorique:

$$\dot{M}_{3D} = \pi b^2 \frac{\Sigma_p}{\sqrt{2\pi} H_p} \delta v$$

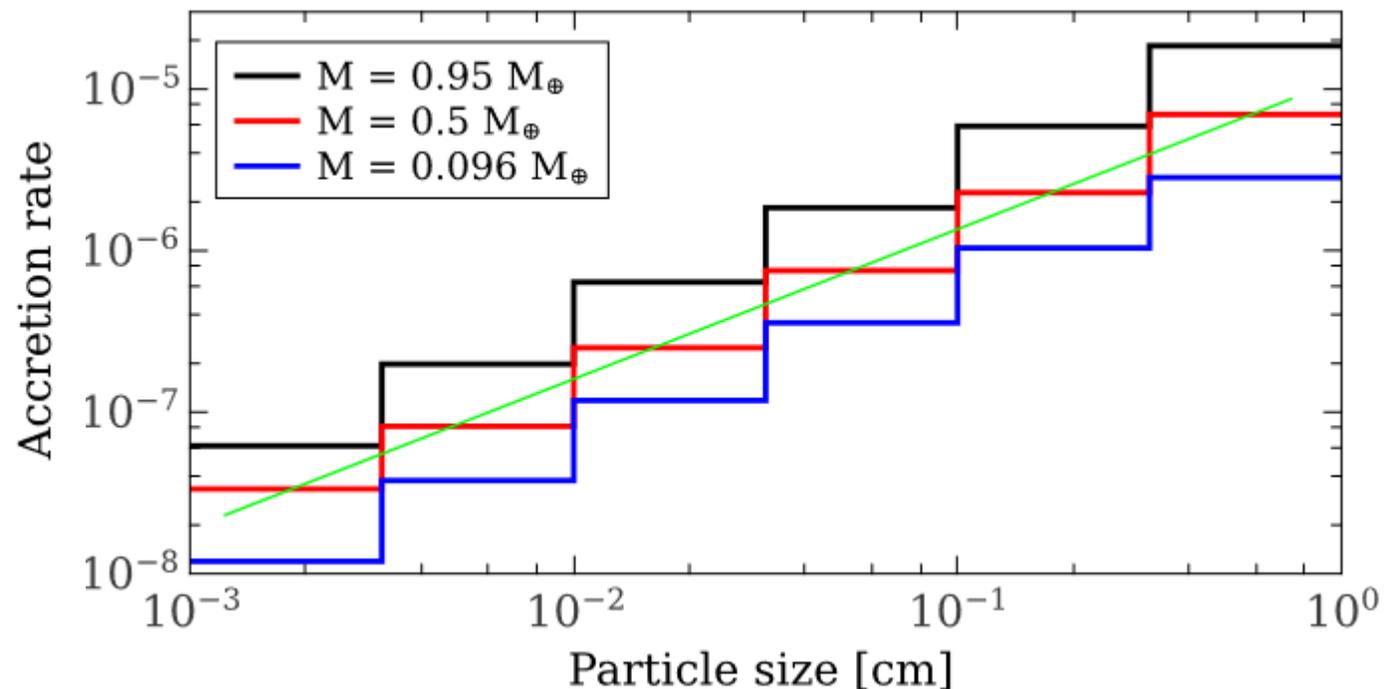
$$\propto \tau_f R_H^3 \frac{\Sigma_p}{H_p} \Omega$$

Rappel:

$$b = 2\tau_f^{1/3} R_H$$

$$\delta v \propto \Omega b$$

Taux d'accrétion mesuré (Popovas et al., MNRAS, 2018)



On vérifie bien la dépendance linéaire en taille des particules (i.e en  $\tau_f$ ) de l'accrétion 3D, ainsi que celle en  $R_H^3$  (ici en  $R_H^2$ , car  $H_p$  est assumée être proportionnelle à  $R_H$ ).

A un facteur numérique près proche de 1, les simulations confirment les estimations analytiques.



## La croissance par accrétion de poussières est toujours en mode oligarchique

Limite de Bondi, 3D: 
$$\frac{dM_{pl}}{dt} \propto \frac{\tau_f}{t_B} R_B^2 \frac{\Sigma_p}{H_p} \eta v_K \propto M_{pl} \frac{\tau_f \Sigma_p}{\eta v_K H_p}$$

Limite de Bondi, 2D: 
$$\frac{dM_{pl}}{dt} \propto \sqrt{\frac{\tau_f}{t_B}} R_B \Sigma_p \eta v_K \propto M_{pl}^{1/2} \sqrt{\tau_f} \Sigma_p$$

Limite de Hill, 3D: 
$$\frac{dM_{pl}}{dt} \propto \tau_f R_H^3 \frac{\Sigma_p}{H_p} \propto M_{pl} \tau_f \frac{\Sigma_p}{H_p}$$

Limite de Hill, 2D: 
$$\frac{dM_{pl}}{dt} \propto \tau_f^{2/3} R_H^2 \Sigma_p \propto M_{pl}^{2/3} \tau_f^{2/3} \Sigma_p$$

Le taux d'accrétion dépend de  $\tau_f, H_p, \Sigma_p$

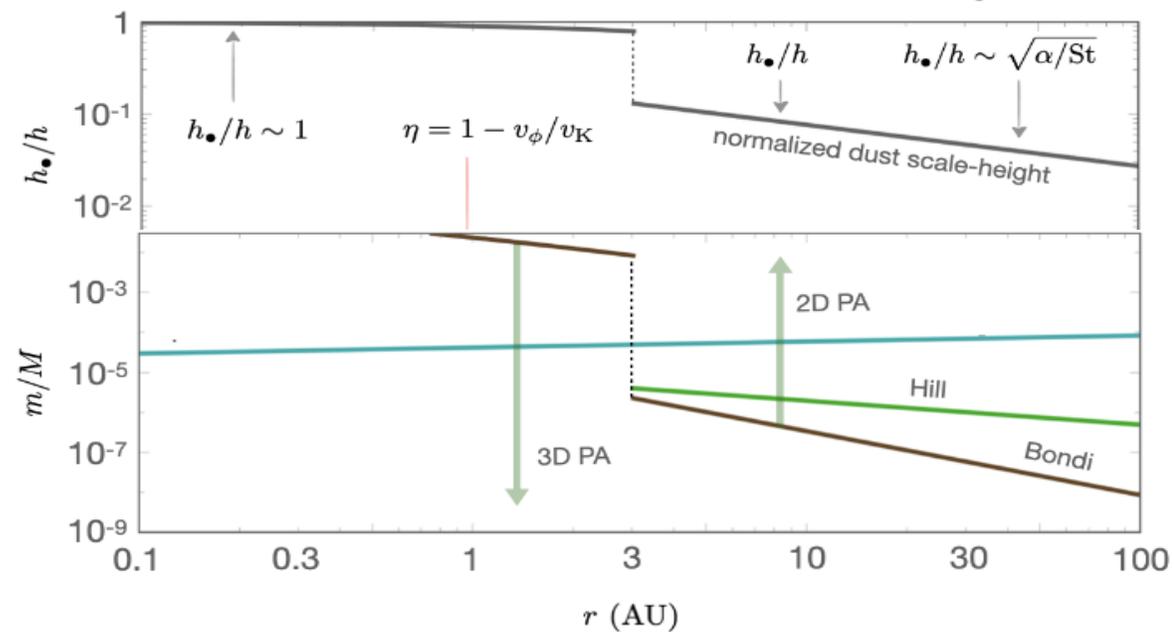
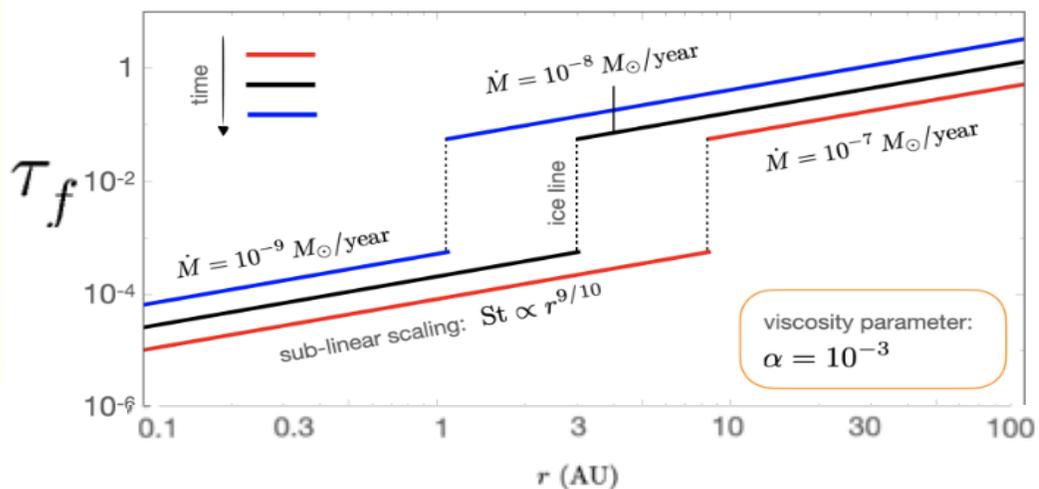


# Considérations sur $\tau_f$ et $H_p$

Si la taille des poussières est limitée par la fragmentation:

$$\tau_f = \frac{1}{3} \frac{v_f^2}{\alpha c_s^2}, \quad c_s = \sqrt{k_b T / \mu}$$

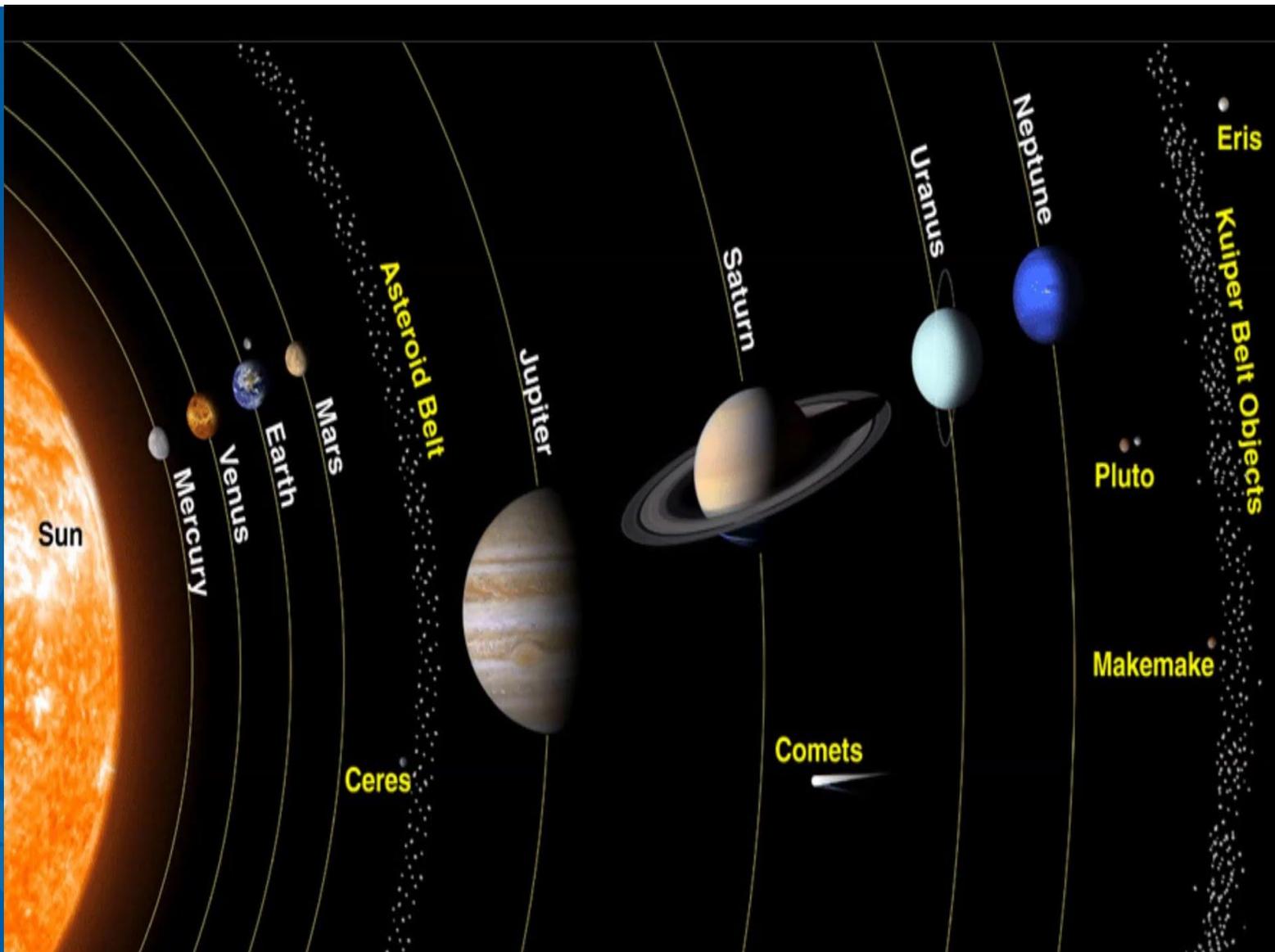
$$\alpha = 10^{-3} \quad \dot{M} \sim 10^{-8} M_\odot \text{yr}^{-1}$$



(Batygin and Morbidelli, 2022, A&A)



## La croissance par accrétion de poussières est plus favorable dans le disque externe, à l'inverse de la croissance par accrétion de planétésimaux

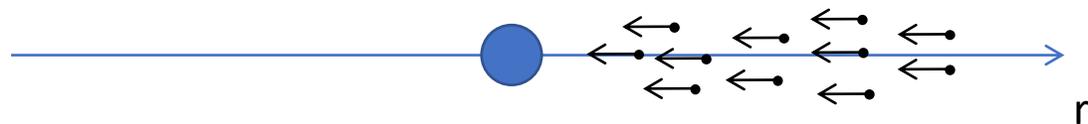


Cette différence en modes d'accrétion peut expliquer le contraste entre planètes géantes et planètes telluriques

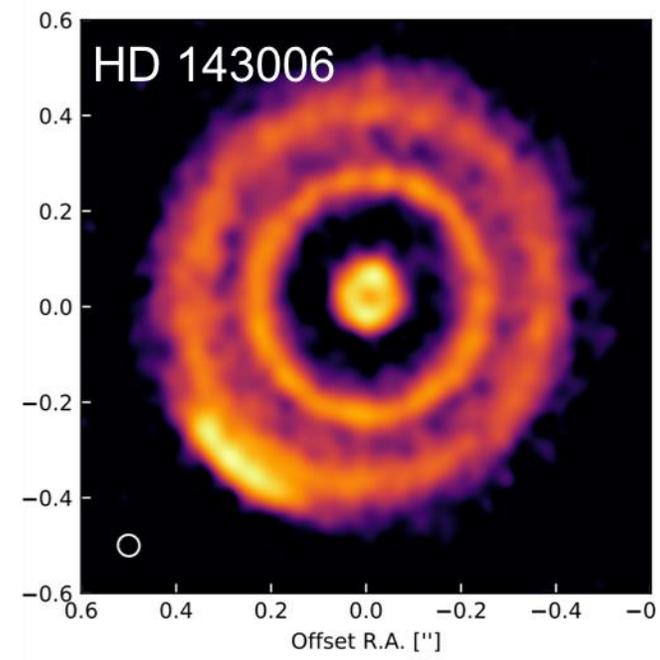
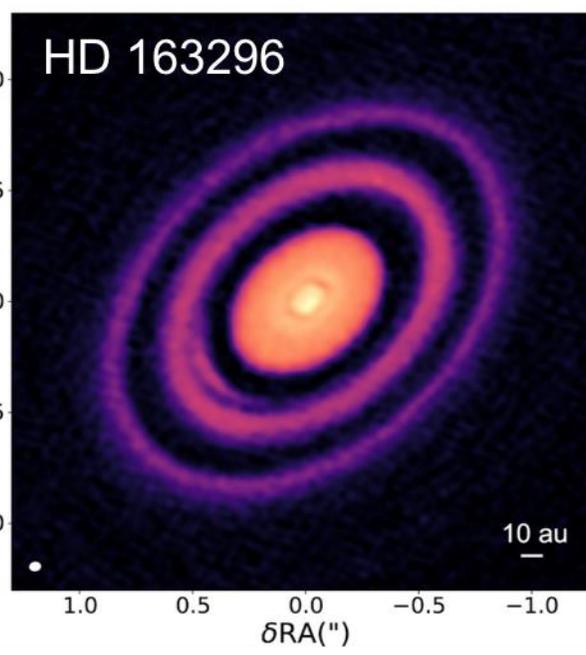
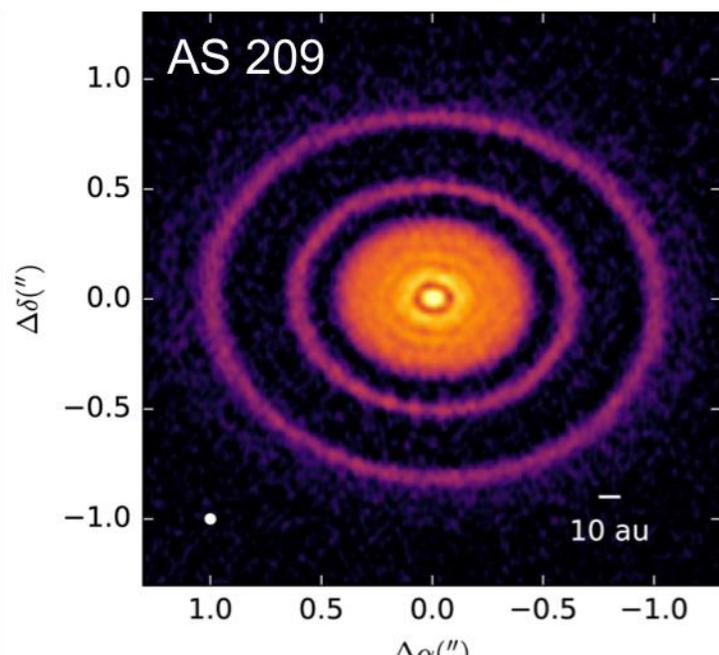


## Considérations sur $\Sigma_p$

$\Sigma_p$  est supposé être maintenu par le flux radial continu des poussières



Vrai?

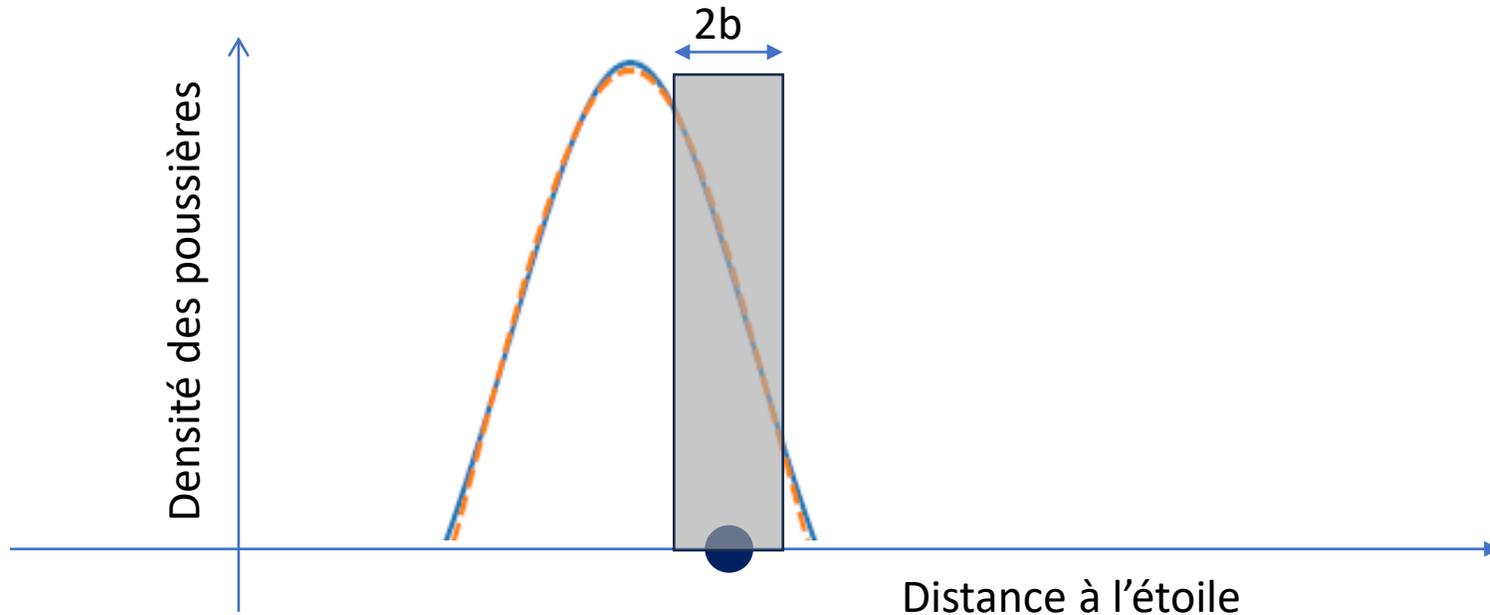




## Croissance par accrétion de poussières piégées dans un anneau

Possible, mais le taux d'accrétion dépend de:

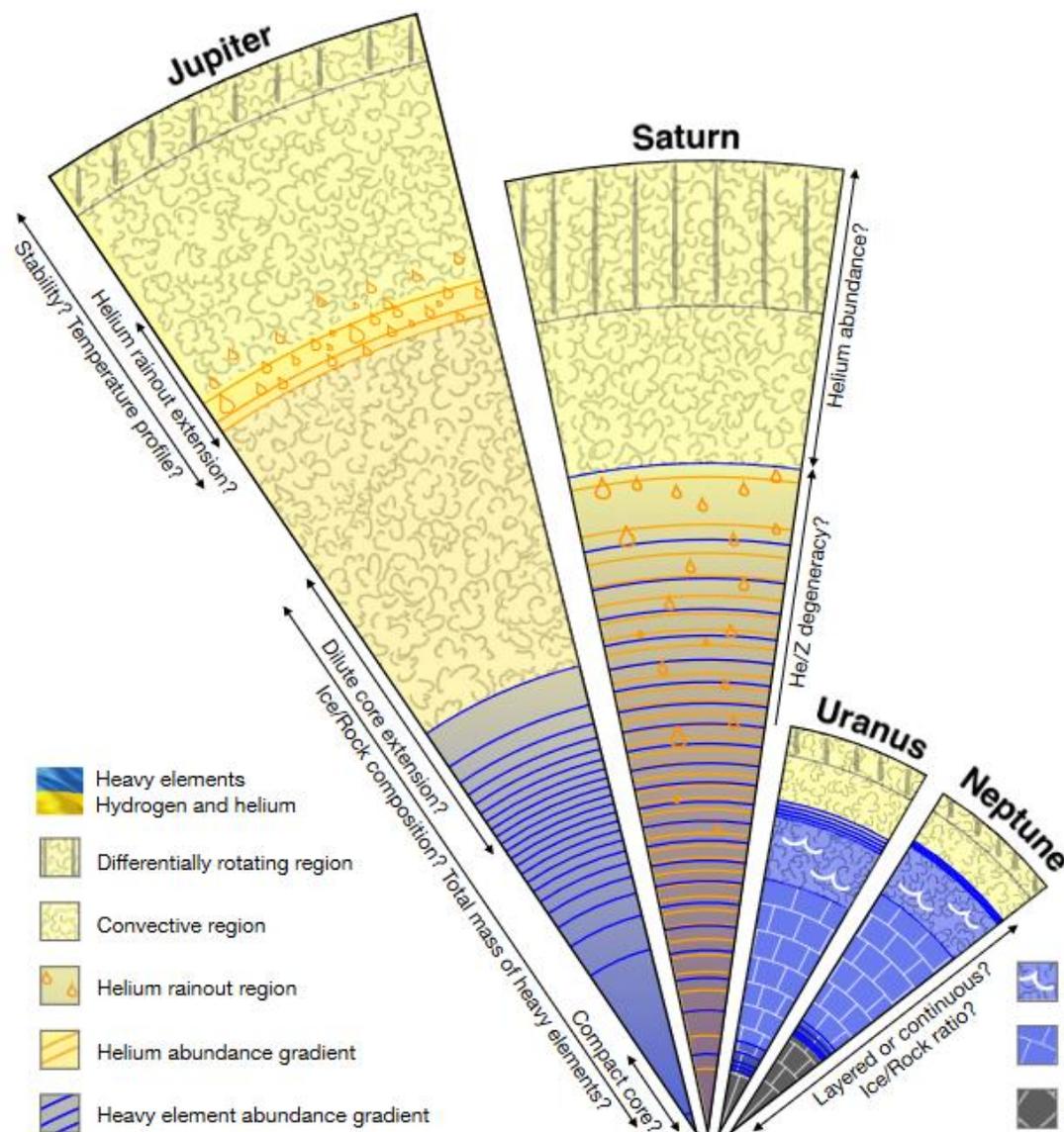
- La densité de poussières dans l'anneau
- La position de la planète par rapport au centre de l'anneau
- La vitesse de redistribution des poussières dans l'anneau par diffusion, pour ré-alimenter la zone d'accrétion ( $2b$ ) de la planète



Morbidelli et al. (2020)



# La formation des planètes géantes



La présence d'un noyau (plus ou moins dilué) d'éléments lourds au centre des planètes géantes suggère que celles-ci se soient formées par capture du H et He du disque autour d'une protoplanète solide massive.



# Structure de l'atmosphère en équilibre hydrostatique

Un système d'équations:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}$$

(1) Équilibre hydrostatique: force de gravité=gradient de pression

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

(2) Relation masse-densité – dans le noyau ( $r < r_c$ )  $\rho = \rho_c$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{64\pi\sigma} \frac{\kappa L\rho}{r^2 T^3}$$

(3) Gradient de température dans le cas radiatif

$$L(r) \approx \frac{GM_c \dot{M}}{r_c} - \frac{GM_c \dot{M}}{r}$$

Luminosité due à la libération d'énergie potentielle pendant l'accrétion de matière solide sur la planète

$K$  opacité

$$P = \frac{k_B}{\mu} \rho T$$

(4) Équation d'état

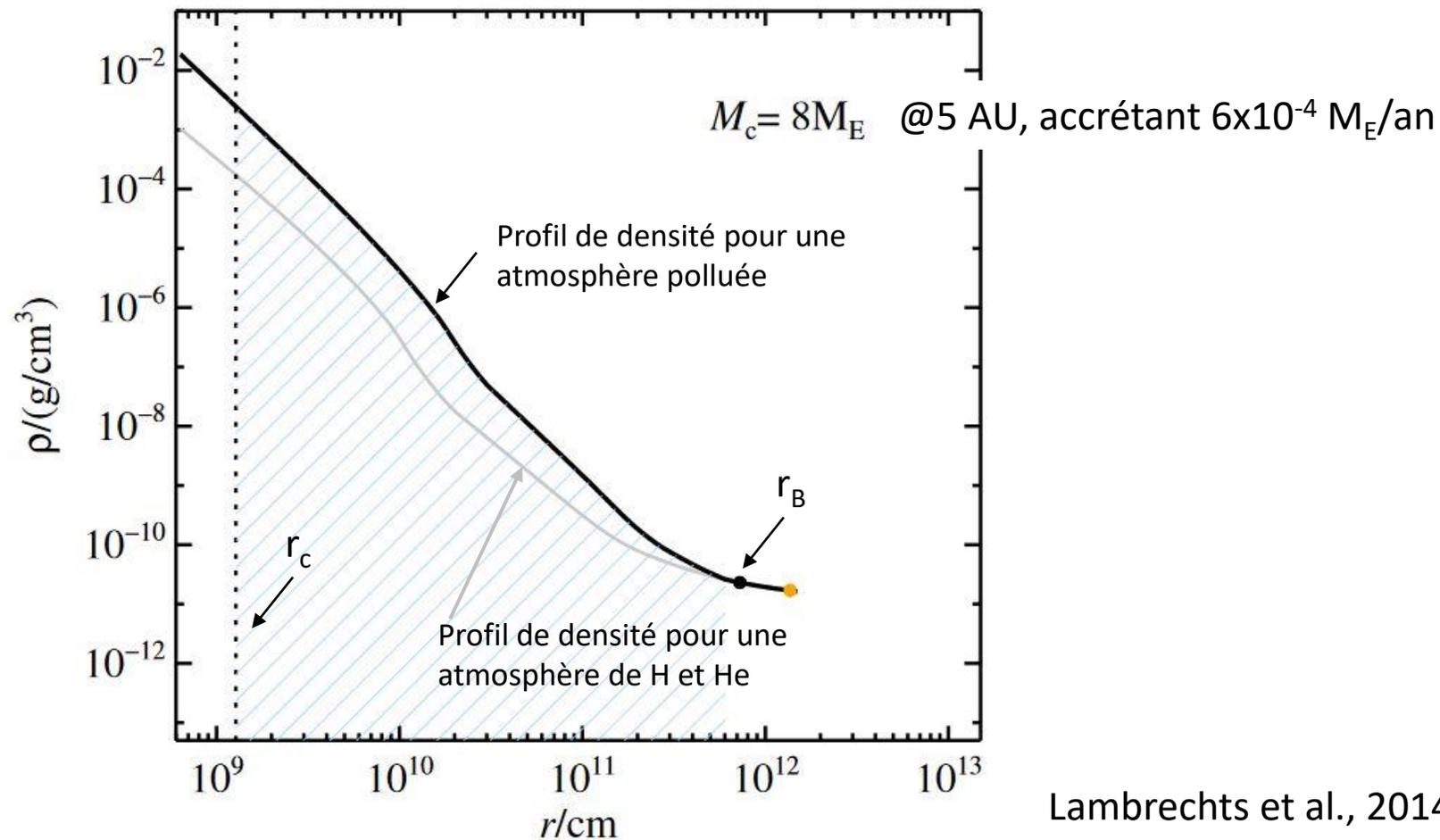
Ce système se réduit à une seule équation (compliquée)  $\rho(r)$ , qui est résolue numériquement en imposant les conditions limites  $\rho_0, T_0$  (valeurs du disque) au bord externe de l'atmosphère  $r_{bd}$ , qui est le minimum entre  $R_H = (M/3M_*)^{1/3}$  and  $R_B = 2GM/c_s^2$

Si  $r_{bd} < r_c$  il n'y a pas d'atmosphère possible.



# Structure de l'atmosphère en équilibre hydrostatique

Exemple de solution numérique

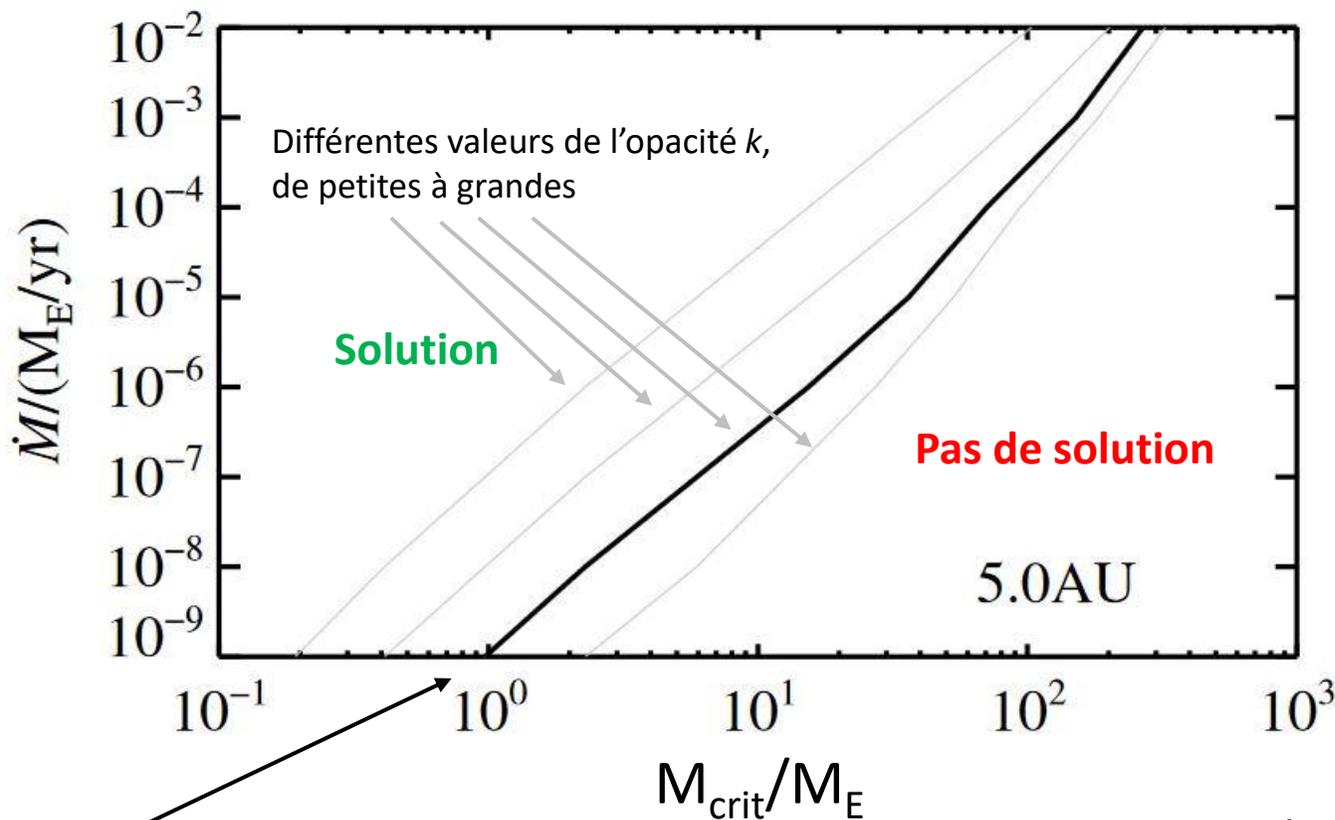


Lambrechts et al., 2014



# Condition d'existence d'un équilibre hydrostatique

La solution du système hydrostatique existe seulement si  $M_c < M_{crit}$  with  $M_{crit}(L, k)$



A noter:  
 $M_{crit} \rightarrow 0$  pour  $L \rightarrow 0$

Règle empirique: quand  $M_c \sim M_{crit}$ ,  $M_{atm} \sim M_c$

Lambrechts et al., 2014



# Fin de l'équilibre hydrostatique: croissance exponentielle de l'atmosphère

L'atmosphère se contracte sous l'effet de sa propre gravité, permettant l'accrétion de nouveau gaz

Quelques équations:

$$\frac{d \log(r_p)}{dt} = -\frac{1}{\tau_{KH}} \quad (1) \text{ contraction de l'atmosphère}$$

$$\tau_{KH} \sim \frac{GM_c M_{atm}}{r_p L} \quad (2) \text{ Temps de Kelvin-Helmholts pour contraction de l'atmosphère}$$

$$L \approx -\frac{d(E_{th} + E_{grav})}{dt} \quad (3) \text{ Luminosité due à la libération d'énergie potentielle } E_{grav} \text{ pendant la contraction de l'atmosphère et à l'énergie thermique stockée } E_{th}$$

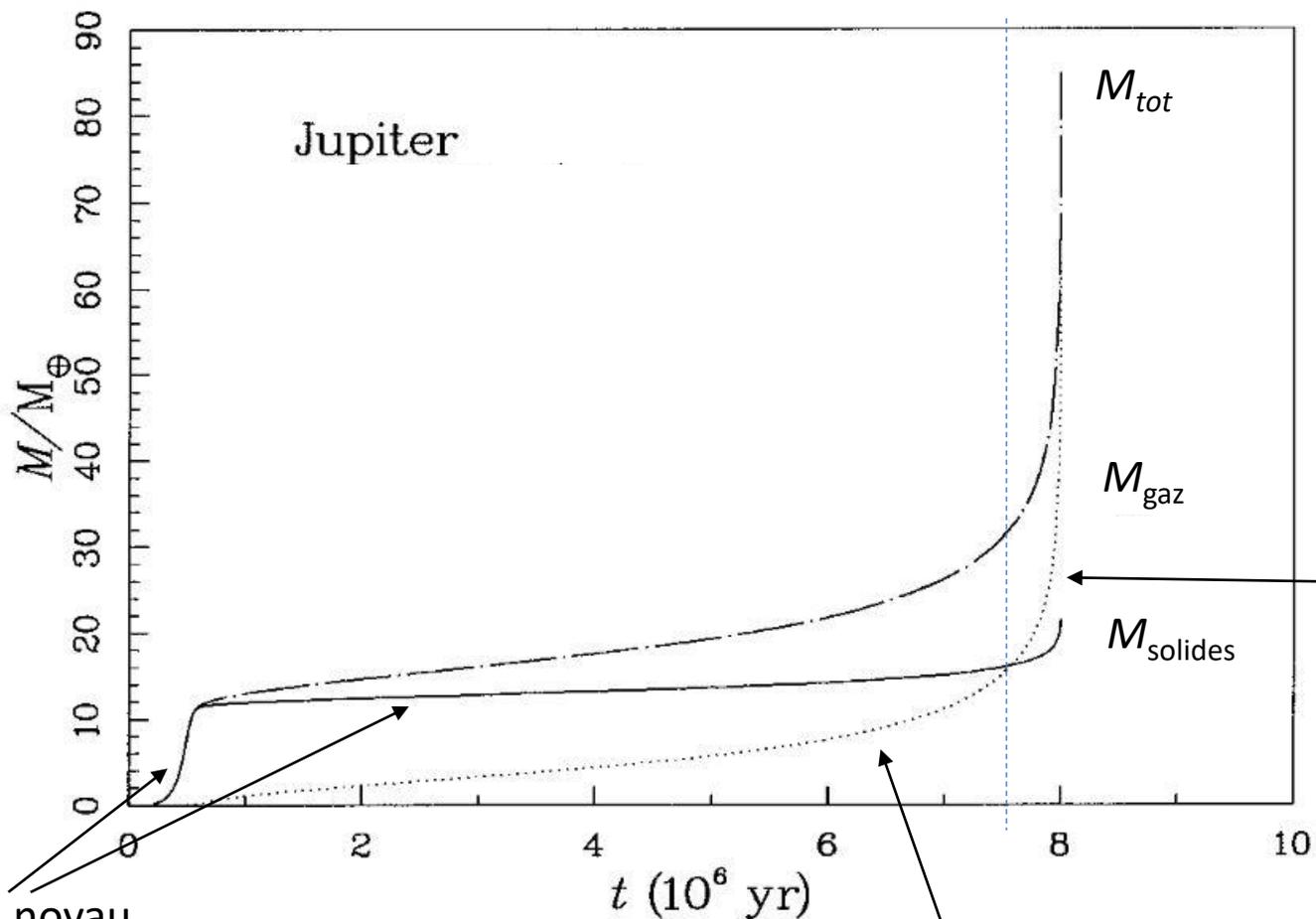
$$\frac{dM_{atm}}{dt} = -4\pi r_{bd} \rho_0 \frac{dr_p}{dt} \quad (4) \text{ Accrétion de nouveau gaz avec densité } \rho_0 \text{ dans la partie supérieure de l'atmosphère contractée}$$

L'augmentation  $dM_{atm}$  de la masse de l'atmosphère a un effet de rétroaction sur  $r_{bd}$ ,  $M_{atm}$  and  $E_{grav} = G(M_c + M_{atm}) dM_{atm} / r_p$  et donc sur  $\tau_{KH}$



# Fin de l'équilibre hydrostatique: croissance exponentielle de l'atmosphère

Pollack et al., Icarus, 1998



Croissance du noyau

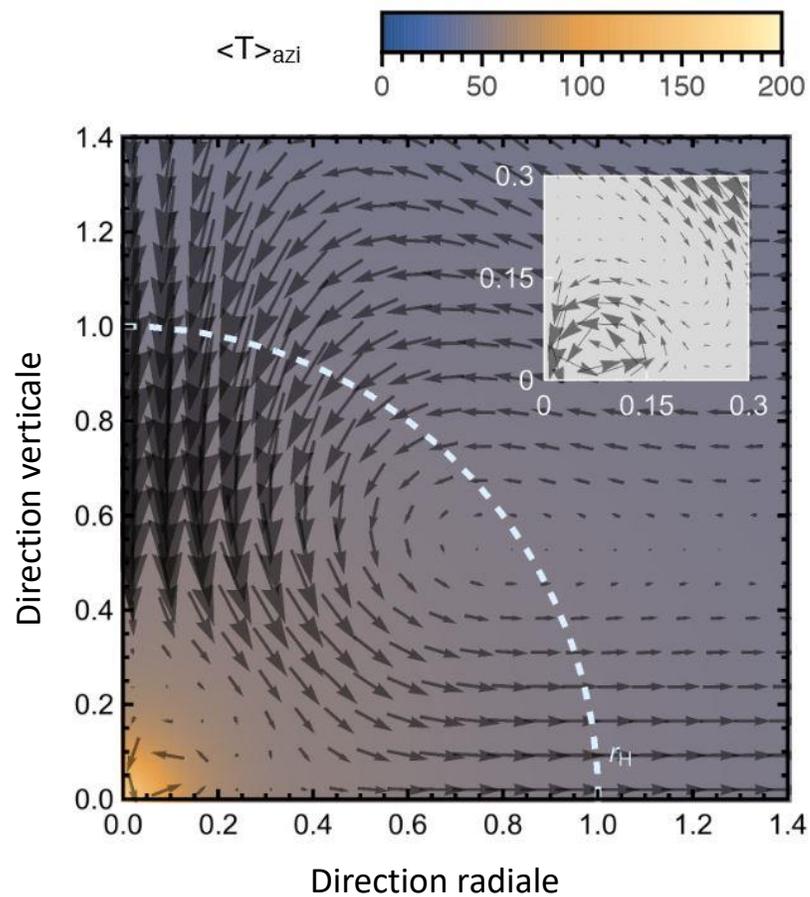
Atmosphère en équilibre hydrostatique

Pas d'équilibre possible:  
accrétion exponentielle du gaz

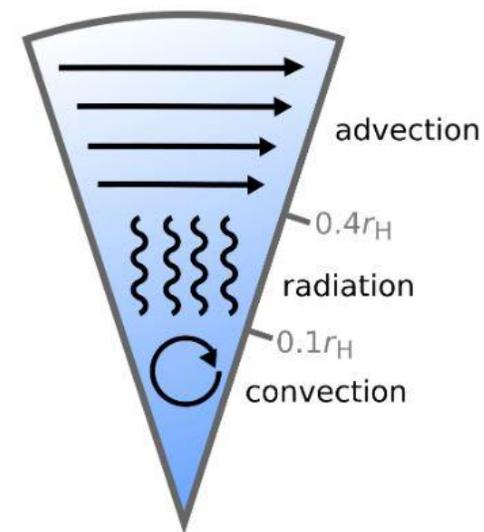
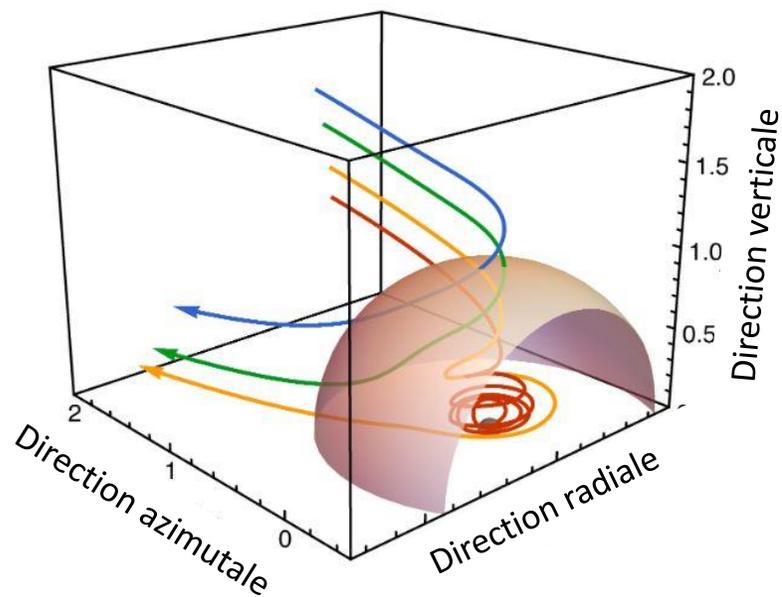


# Simulations hydrodynamiques de l'accrétion d'une atmosphère

Les calculs analytiques négligent les mouvements du gaz par rapport à la planète

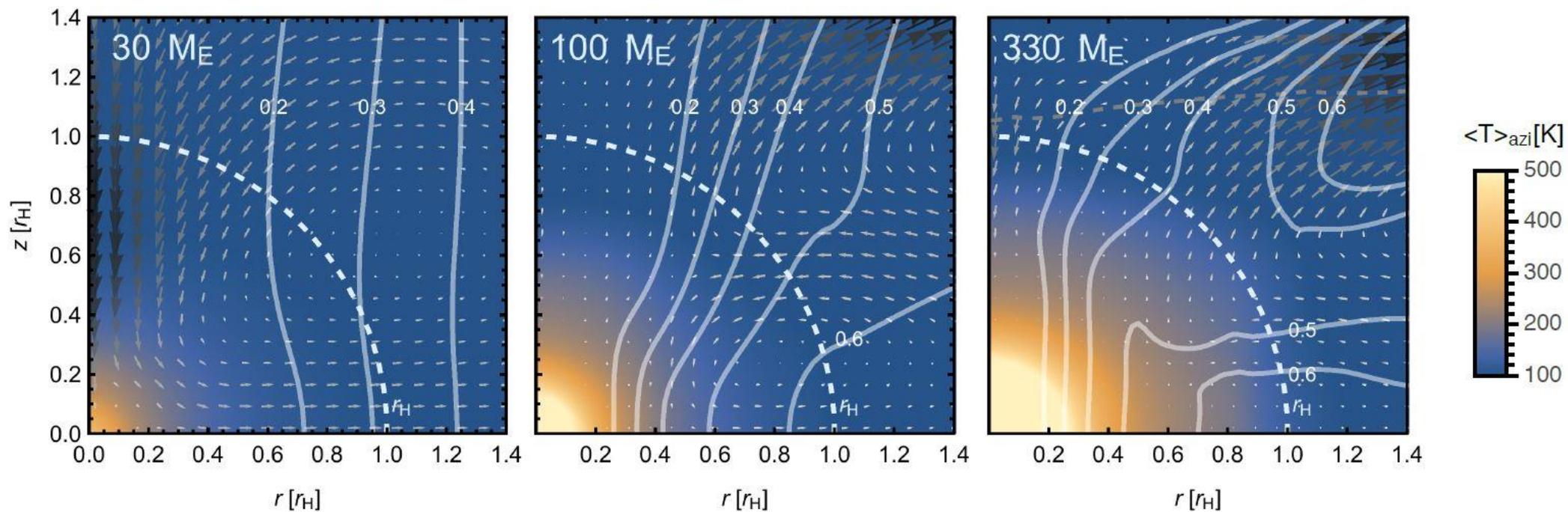


$M_c = 5M_E$





# Simulations hydrodynamiques de l'accrétion d'une atmosphère

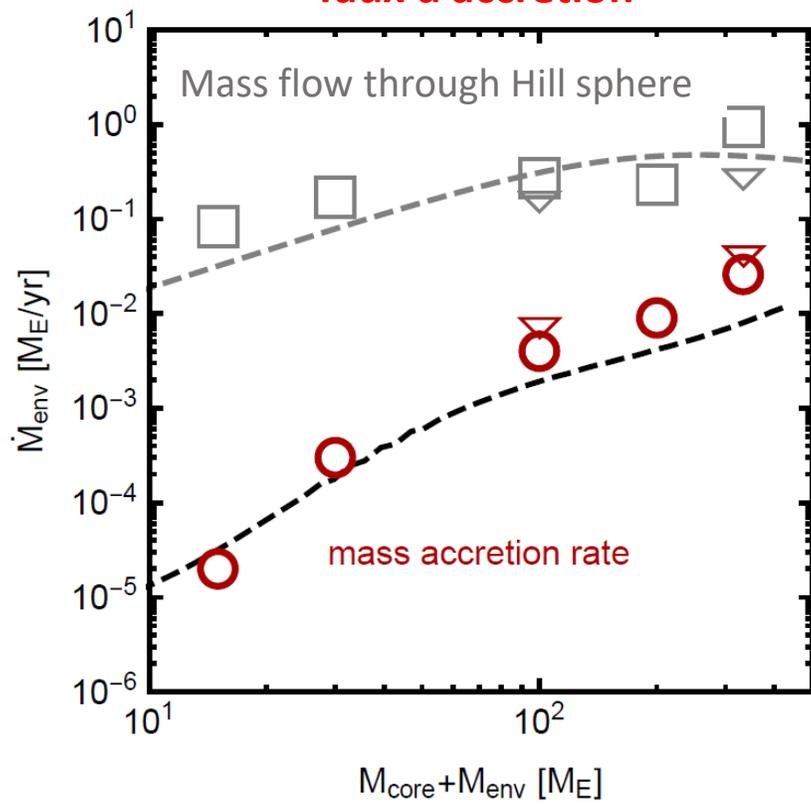


Lambrechts et al., 2019

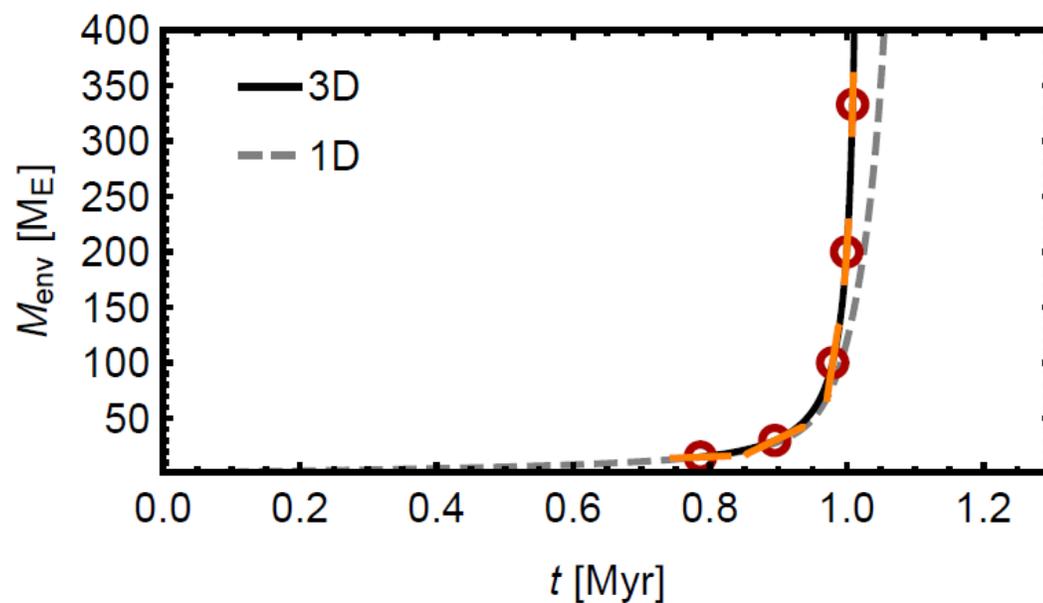


# Simulations hydrodynamiques de l'accrétion d'une atmosphère

## Taux d'accrétion



## Croissance d'une planète géante



Lambrechts et al., 2019



## Formation de planètes géantes par instabilité gravitationnelle

Sans formation préalable d'un noyau solide, le gaz du disque peut former une "bulle" autogravitante si:

$$Q \equiv \frac{c_s \Omega}{\pi G \Sigma} < 1$$

Vitesse du son      Fréquence orbitale

Densité du disque

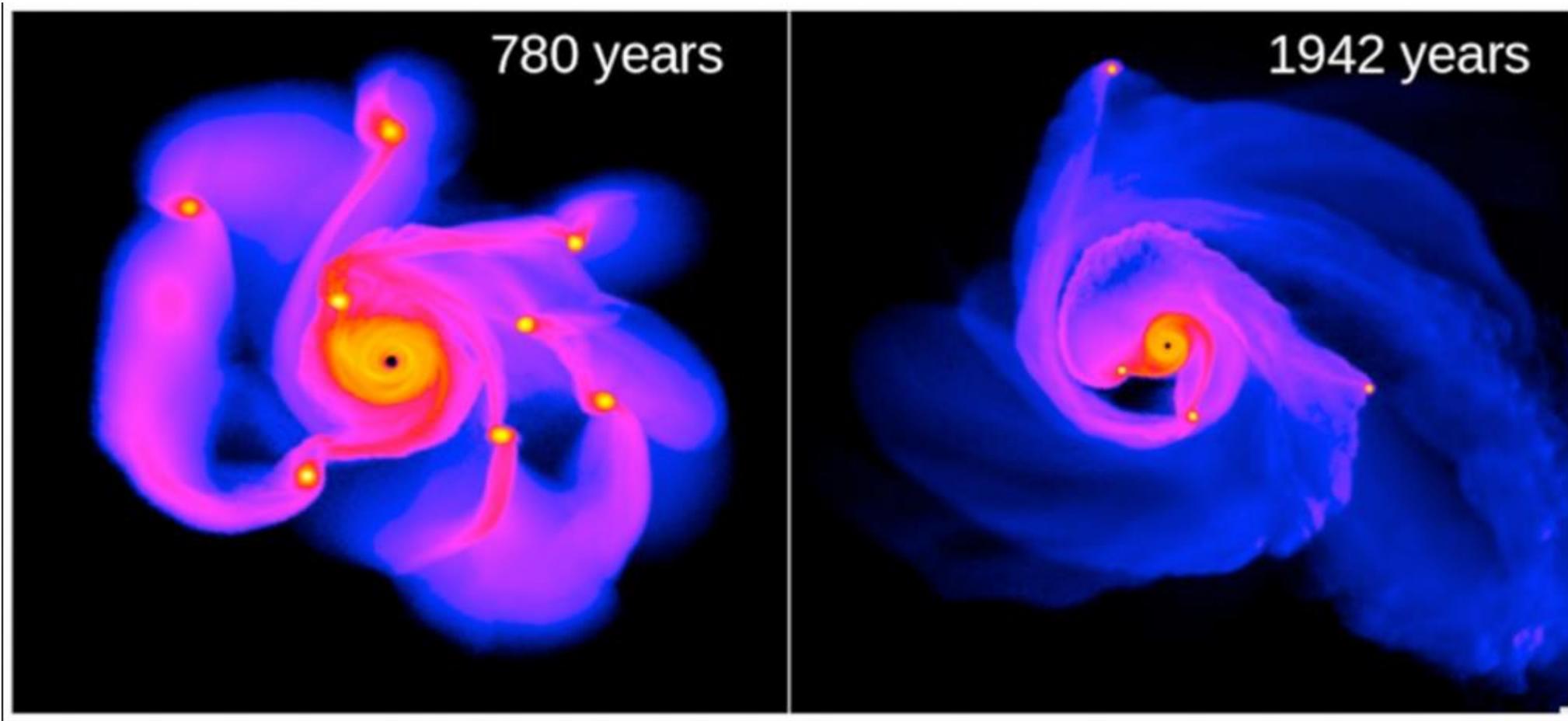
$$\text{Si } H \sim r^{9/7} \left\{ \begin{array}{l} c_s \Omega \sim 1/r^{12/7} \\ \Sigma \sim 1/r^{15/14} \\ Q \sim 1/r^{9/14} \end{array} \right.$$

La condition  $Q < 1$  peut être satisfaite plus facilement dans le disque distant

Le taux de refroidissement dans le disque distant est aussi très court, ce qui permet la contraction des bulles autogravitantes de gaz avant leur déchirement



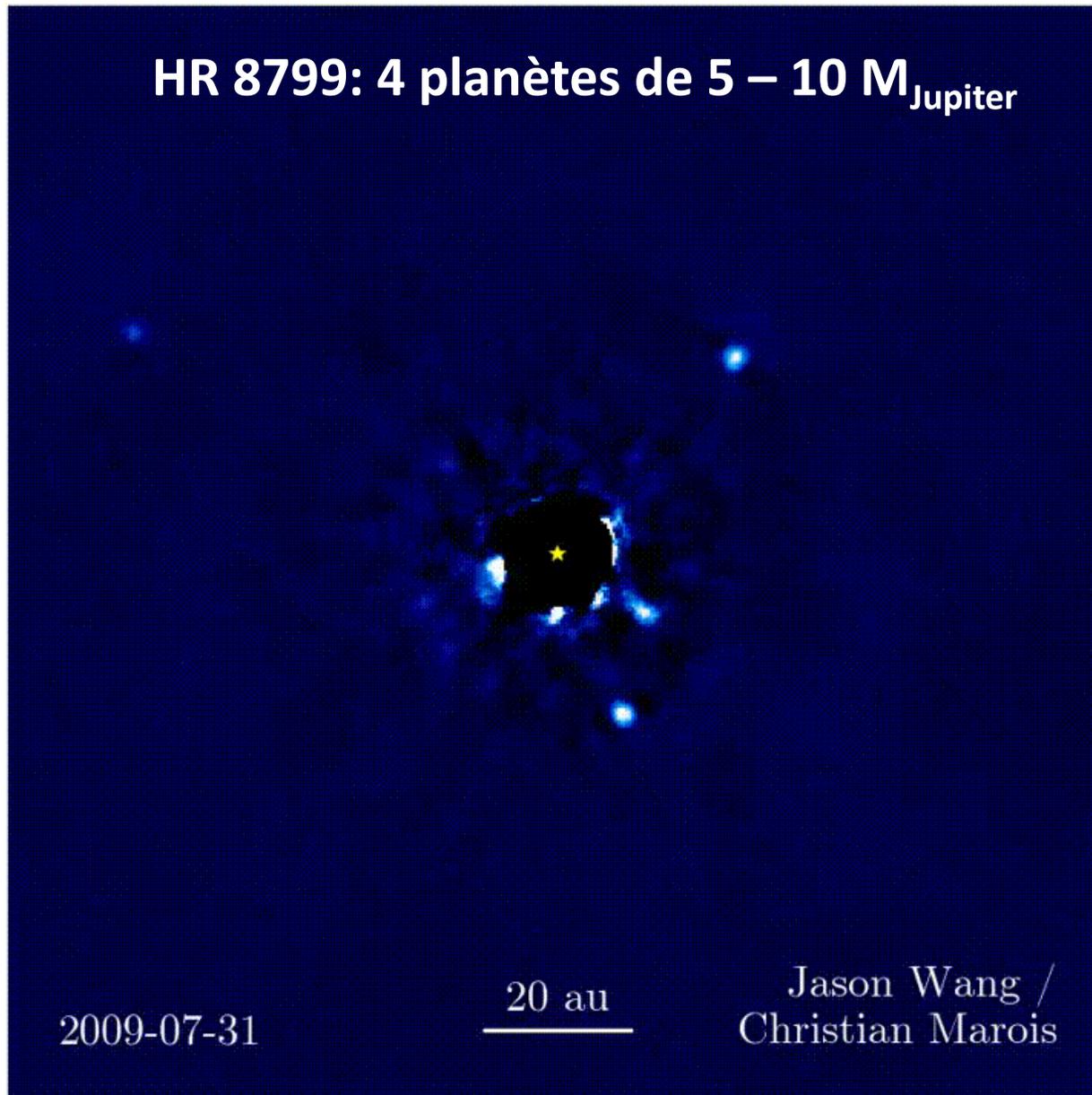
# Simulation numérique de l'instabilité gravitationnelle





## Formation des planètes géantes distantes par instabilité gravitationnelle?

HR 8799: 4 planètes de 5 – 10  $M_{\text{Jupiter}}$





## A retenir

- Dans un disque de planétésimaux, les excentricités orbitales, initialement nulles, augmentent
- Les orbites se croisent, les planétésimaux peuvent rentrer en collisions mutuelles
- Si à faible vitesses ces collisions donnent lieu à une accrétion
- Les objets les plus massifs croissent exponentiellement, grâce à leur facteur de focalisation gravitationnelle
- Une protoplanète dominante se dégage dans chaque anneau d'une largeur comparable au rayon de Hill
- Ces protoplanètes grandissent en suite en mode oligarchique, avec masses comparables
- Des collisions géantes entre protoplanètes ont lieu quand leur espacement devient insuffisant
- Le temps de formation des protoplanètes augmente avec la distance de l'étoile. Difficile de former le noyau d'une planète géante à  $\sim 5$  ua avant la disparition du disque
- L'accrétion de poussières est un deuxième mode de croissance planétaire
- Elle est efficace quand les poussières ont  $\tau_f$  grand et elles sont bien sédimentées sur le plan médian du disque
- Ceci a lieu typiquement au-delà de la ligne des glaces
- Le piégeage des poussières dans des anneaux n'est pas forcément un obstacle à ce mode de croissance
- Quand la planète est suffisamment massive, elle commence à former une atmosphère de H, He en équilibre hydrostatique par capture du gaz du disque.
- Quand la masse de l'atmosphère dépasse celle de la planète solide, le processus s'emballe exponentiellement. On a ainsi la formation d'une planète géante
- Les planètes géantes peuvent se former aussi par instabilité gravitationnelle du disque du gaz, suffisamment loin de l'étoile