Le mystère de l'égalité

Thierry Coquand

COLLÈGE DE FRANCE
1530

Théorie des types dépendants

Cette leçon est un commentaire de la formalisation de Voevodsky qui est décrite dans le papier *An experimental library of formalized mathematics based on the univalent foundations* (2014).

Je vais insister sur deux principes qui semblent importants pour la représentation formelle des preuves mathématiques, et sont conséquences du principe d'univalence

-le principe d'extensionalité

-le principe du choix unique

Ce sont des principes importants pour une représentation *modulaire* des preuves; L'univalence entraine en plus une nouvelle forme générale de ⟪transport de structures⟫.

Extensionalité

Russell dans *The Theory of Implications* (1906), remarque que toutes les opérations sur les propositions sont invariantes par équivalence logique.

Observe that if $p \leftrightarrow q$, *then* q *may be substituted for* p, *or vice versa, in any formula involving no primitive ideas except implication and negation, without altering the truth or falsehood of the formula. This can be proved in each separate case, but no generally, because we have no means of specifying (with our apparatus of primitive ideas) that a complex* $C(p,q)$ *is to be one that can be built up out of implication and negation alone.*

C'est l'essence de la justification de l'extensionalité, et de l'univalence.

Extensionalité

Dans la forme générale de la proposition, la proposition n'apparaît dans une proposition que comme base d'une opération de vérité. Wittgenstein Tractacus 5.54 (1921)

Influence sur Russell, introduction de la deuxième édition des *Principia Mathematica*

In the Introduction to the present edition we have assumed that a function can only enter into a proposition through its values $\ldots$ *That is to say, we can decide that mathematics is to confine itself to functions of functions which obey the above assumption.*

There is a prior question which is simpler, and that is the question whether all functions of propositions are truth functions $\ldots$ *If this were the case, we should have, if* f *any function of propositions,* $(p \leftrightarrow q) \to (fp \leftrightarrow fq)$ *Consequently, according to the definition* $(p \leftrightarrow q) \to p \equiv q$ *There will thus be only two propositions, one true and one false.*

La dernière affirmation n'est pas justifiée, mais elle est reprise par Church (1941).

Extensionalité

A function can only enter into a proposition through is values. All functions of functions are extensional ... *Consequently there is no longer any reason to distinguish between functions and classes. This assumption if fundamental in the following theory. It has its difficulties, but for the moment we ignore them. It takes the place (not quite adequatly) of the axiom of reducibility.*

Discussion dans *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919) : les quantificateurs sont des fonction(elle)s extensionnelles de fonctions; si on a $\forall_{x:A} f\ x \leftrightarrow g\ x$ alors $(\forall_{x:A} f\ x) \leftrightarrow (\forall_{x:A} g\ x)$.

Extensionalité

Formulation dans le système de Church (1941); en suivant Russell $a \equiv_A b$ est *défini* comme étant $\forall_{f:A\to o} f\ a \to f\ b$, ce qui est équivalent à $\forall_{f:A\to o} f\ a \leftrightarrow f\ b$.

L'axiome d'extensionalité est formulé de la manière suivante

$(\forall_{x:A} f\ x \equiv_B g\ x) \to f \equiv_{A\to B} g$

Church mentionne, mais n'inclut pas dans sa liste d'axiomes, le principe suivant, formulé par Russell dans l'appendice C de la nouvelle introduction de *Principia Mathematica*

$(p \leftrightarrow q) \to p \equiv_o q$

Extensionalité

We remark, however, of the possibility of introducing the additional axiom of extensionality, $(p \leftrightarrow q) \to p \equiv_o q$, *which has the effect of imposing so broad a criterion of identity between propositions that there are in consequence only two propositions, and which, in conjunction with* $10^{\alpha\beta}$, *makes possible the identification of classes with propositional functions.*

Church semble penser que cela entraine que o n'aura que deux éléments $\perp$ et $\top$. Mais cela n'est pas le cas, comme le montre les modèles Booléens, où o peut être interprété par une algèbre de Boole complète. (Church étudie en fait de tels modèles en suivant une suggestion de Lagerström 1941.)

Principe du choix unique

On the Axiom of Extensionality, Part I, R. Gandy (1956)

The results of this paper may be vividly, though roughly, expressed by saying: in ordinary mathematics it is not possible to prove the existence of extensional quantities.

Ce papier précise les intuitions de Russell; il définit, par induction sur le type, le fait d'être ⟪extensionnel⟫. Par exemple, $F : (N \to o) \to o$ est extensionnel si, et seulement si, on a

$$(\forall_{x:N}(f\ x \leftrightarrow g\ x)) \to (F\ f \leftrightarrow F\ g)$$

Ces résultats sont déjà présents dans la thèse de R. Gandy *On axiomatic systems in mathematics and theories in physics* (1953). G. Takeuti, de manière indépendante, décrit aussi cette interprétation de l'extensionalité dans le papier où il formule sa conjecture d'élimination des coupures pour la logique d'ordre supérieur (1953).

Principe du choix unique

Opérateur $\iota : (A \to o) \to A$ qui satisfait

$$(\exists!_{x:A}\psi\ x) \to \psi\ (\iota\ \psi)$$

Cette opération permet de nommer un objet si celui-ci est défini de manière unique.

H. Cartan (1941) appelle ceci le principe de l'《élément explicite》. Il donne l'exemple de l'ensemble vide : on peut montrer $\exists!\ _x\forall_y y \notin x$ et donc, par ce principe on peut introduire $\emptyset = \iota(\lambda_x \forall_y y \notin x)$.

Principe du choix unique

Dans Bourbaki, cette opération est remplacée par une opération de choix général (appelée τ alors qu'Hilbert utilisait le symbole ϵ qui, dans Bourbaki, dénote la relation d'appartenance).

la plus intéressante est sans doute l'introduction par Hilbert du symbole τ, qui permet de considérer comme des signes abréviateurs les quantificateurs $\exists$ et $\forall$, d'éviter l'introduction du symbole fonctionnel ⟪universel⟫ ι de Peano et Russell (qui ne s'applique qu'à des relations fonctionnelles).

Principe du choix unique

Russell dans *On Denoting* (1905), puis dans *Principia Mathematica* (1910) avec Whitehead, justifie ce principe de la manière suivante, comme ⟪symbole incomplet⟫

$\iota\ \psi$ n'a pas de signification en lui-même, mais $C[\iota\ \psi]$ veut dire

$$(\exists!_x\ \psi\ x) \wedge \forall_x\ (\psi\ x \to C[x]) \text{ équivalent à } (\exists!_x\ \psi\ x) \wedge \exists_x\ (\psi\ x \wedge C[x])$$

C'est cette justification qui est utilisée maintenant en mathématique; par exemple, une *fonction* est une *relation fonctionnelle*. Cette justification n'est pas ⟪compositionnelle⟫ (la signification d'une expression n'est pas définie par les significations des expressions qui la composent).

L'analyse de la théorie des types avec le principe d'univalence fournit une nouvelle justification compositionnelle *du principe du choix unique*

Principe du choix unique

Martin-Löf propose une autre analyse de ce principe, en représentant l'existence par $\Sigma_{x:A}P(x)$ (ce qui était appelé ⟪existence forte⟫ par Howard).

Avec cette représentation, on obtient une justification d'un principe de choix général

$$(\Pi_{x:A}\Sigma_{y:B}R(x,y)) \to \Sigma_{f:A\to B}\Pi_{x:A}R(x, f\ x)$$

Mais cette représentation *n'est pas modulaire* : si par exemple, on définit ⟪être une k-algèbre de présentation finie⟫ de cette manière, une construction ou un résultat sur une algèbre de présentation finie donnée A va a priori dépendre de la présentation.

Il est en particulier remarquable que, même en algèbre constructive, les résultats du livre *A Course in Constructive Algebra*, par R. Mines, F. Richman et W. Ruitenburg, sont présentés en utilisant une existence ⟪faible⟫.

Principe du choix unique

Cette discussion apparait aussi pour représenter les modules dans les langages de programmation

Abstract Types Have Existential Types, J. Mitchell et G. Plotkin, 1988.

Using dependent types to express modular structure, D. McQueen, 1986.

Extensionalité et choix unique pour la formalisation

Le calcul des constructions, étendu avec une hiérarchie d'univers introduite dans *An analysis of Girard's paradox*, Th. C. (1986), ne peut pas prouver l'extensionalité et le choix unique.

L'égalité peut être définie en suivant Russell

$$a \equiv_A b \;=\; \Pi_{P:A\to o} P\ a \to P\ b$$

et on a $a \equiv_A b : o$

On peut définir une existence 《faible》

$$\exists_{x:A} B(x) \;=\; \Pi_{P:o}(\Pi_{x:A}(B(x) \to P)) \to P$$

et on ne peut pas montrer l'axiome du choix, ou l'axiome du choix unique avec cette notion d'existence.

Extensionalité et choix unique pour la formalisation

Ce formalisme suffit pour montrer la partie *combinatoire* du théorème des quatre couleurs, qui exprime que ⟪quatre couleurs suffisent pour toute hypercarte planaire (vérifiant la formule d'Euler)⟫, mais la partie sur $\mathbb{R}^2$ utilise le tiers-exclu.

Pour $BB(5) = 47176870$, bien que la preuve soit sur les machines de Turing, qui sont des objets discrets, il est commode de représenter les machines de Turing comme des *fonctions*, et la preuve ajoute le principe d'extensionalité comme un axiome.

Il est aussi ajouté dans le système CompCert, pour des raisons similaires; par exemple, dans le modèle mémoire de CompCert, on utilise des "injections mémoire", qui sont des transformations sur les adresses mémoire, et qui sont représentées par des fonctions.

L'imprédicativité n'est pas utilisée de manière essentielle dans ces dévelopements, mais elle est pratique pour ne pas avoir à introduire un système complexe d'univers.

Extensionalité et choix unique pour la formalisation

Pour la preuve formelle du théorème de l'ordre impair (Feit-Thompson), le principe d'extensionnalité n'est pas ajouté comme axiome, *mais* une forme faible du principe du choix unique

$$(\exists!_{x:N} P(x)) \to \Sigma_{x:N} P(x) \text{ pour } P(x) \text{ décidable,}$$

est utilisée de manière essentielle.

Ce principe est prouvable à partir d'une extension du calcul (1998?), qui permet d'extraire un élément d'une preuve d'accessibilité (qui est une propriété au sens de cette théorie des types, i.e. un objet de type o)

Ce principe est aussi utilisé de manière essentielle dans les preuves formelles sur la calculabilité par Y. Forster et D. Kirst.

Le système Lean ajoute l'extensionalité et un opérateur de choix *général*, qui peut être énoncé comme $(\exists_{x:A} B(x)) \to \Sigma_{x:A} B(x)$. (On n'a pas à supposer que tous les types sont non vides comme en théorie des types simples.)

Extensionalité en théorie des types dépendants

Le type des *propositions* est stratifié et devient le système des *univers*

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow p \equiv_o q$$

devient

$$(X \simeq Y) \rightarrow X \equiv_U Y$$

Comment définir $X \simeq Y$? Un premier candidat serait de prendre $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ avec $g \circ f \equiv \mathsf{id}_X$ et $f \circ g \equiv \mathsf{id}_Y$.

Le principe obtenu est correct, mais on n'obtient pas de cette manière une formulation optimale du principe d'univalence.

Stratification des types

Univalent models interpret types not as sets but as homotopy types. Their use in formalization of general Mathematics (as opposed to just homotopy theory) is based on the following consideration. First note that we can stratify mathematical constructions by their "level." There is element-level Mathematics - the study of element-level objects such as numbers, polynomials or various series. Then one has set level Mathematics - the study of sets with structures such as groups, rings etc., which are invariant under isomorphisms. The next level is traditionally called category-level, but this is misleading. A collection of set-level objects naturally forms a groupoid since only isomorphisms are intrinsic to the objects one considers, while more general morphisms can often be defined in a variety of ways. Thus the next level after the set level is the groupoid-level - the study of properties of groupoids with structures which are invariant under the equivalences of groupoids. From this perspective a category is an example of a groupoid with structure which is rather similar to a partial ordering on a set. V. Voevodsky (2014)

Stratification des types : la notion de proposition

Une des découvertes de Voevodsky est que cette stratification se formule directement en théorie des types dépendants.

isContr A est défini comme $\Sigma_{a:A}\Pi_{x:A}a \equiv x$; avec l'extensionalité pour les fonctions, ceci est équivalent à $\Sigma_{a:A}\mathsf{id}_A \equiv \lambda_{x:A}a$

Deux définitions de isProp A comme $\Pi_{a\ b:A}\ a \equiv_A b$ et comme $\Pi_{a\ b:A}$ isContr $(a \equiv_A b)$

On a isProp (isProp A) et isProp (isContr A)

On définit alors isSet A par $\Pi_{a\ b:A}$isProp $(a \equiv_A b)$ et on a isProp (isSet A) : «être une ensemble» est une *propriété*

«Être un groupoïde» est défini par $\Pi_{a\ b:A}$isSet $(a \equiv_A b)$; c'est aussi une propriété.

Stratification des types : la notion de proposition

Un exemple de preuve $\text{isContr}\ A \to \text{isContr}\ (x \equiv_A y)$

Si on a $\alpha : \Pi_{x:A} a \equiv_A x$ alors on montre que si $l : x \equiv_A y$ on a

$$(\alpha\ x) \cdot l \equiv_{a \equiv_A y} \alpha\ y$$

en se réduisant au cas où $y = x$ et $l = \text{refl}\ x$

$$(\alpha\ x) \cdot (\text{refl}\ x) \equiv_{a \equiv_A x} \alpha\ x$$

qui est vérifié par définition de la composition des chemins/preuves d'égalité.

Ce raisonnement n'est pas valide avec l'égalité de Russell $\Pi_{P:A \to o} P\ a \to P\ b$.

Stratification des types : la notion de proposition

Le principe d'univalence doit être formulé comme une *proposition*

Voevodsky introduit une définition élégante pour $f : A \to B$ d'être une *équivalence*, qui est une *proposition*

$$\mathsf{isEquiv}\ f \ = \ \Pi_{b:B}\mathsf{isContr}\ (\Sigma_{a:A} f\ a \equiv_B b)$$

On a $\mathsf{isProp}\ (\mathsf{isEquiv}\ f)$ et le type $A \simeq B$ est défini comme $\Sigma_{f:A\to B}\ \mathsf{isEquiv}\ f$

Stratification des types : la notion de proposition

Le fait que $\mathsf{id}_A : A \to A$ soit une équivalence devient alors

$$\Pi_{a:A}\mathsf{isContr}\ (\Sigma_{x:A}\ a \equiv x)$$

Dans le modèle simplicial, ceci exprime que l'espace total de la fibration, qui à x associe l'espace des chemins de a à x, est *contractile*. C'est cette propriété de l'espace des chemins qui était essentielle pour J.-P. Serre dans sa thèse (1951)

Ceci est démontrable pour l'égalité introduite par Martin-Löf 1973; cette formulation n'est pas celle de 1979 et du livre *Intuitionistic Type Theory* (1984). Cette loi d'élimination 1973 est introduite pour des raisons purement formelles d'uniformité.

Stratification des types : la notion de proposition

Ici encore, cette justification ne marche pas avec la définition de Russell $a \equiv_A b$ défini comme $\Pi_{P:A\to o} P\ a \to P\ b$.

On présentera plus tard une variation de cette définition, due à Voevodsky, qui donne la notion ⟪correcte⟫ d'égalité.

Stratification des types : formulation de l'univalence

Comme id_X est une équivalence, on a une flèche canonique $X \equiv_U Y \to X \simeq Y$

On peut alors énoncer le *principe d'univalence*

La flèche canonique $X \equiv_U Y \to X \simeq Y$ *est une équivalence*

Le principe d'univalence est une proposition.

Il y a d'autres manières d'énoncer l'univalence, par exemple

Le type $\Sigma_{X:U} A \simeq X$ *est contractile*

C'est cette formulation qui est utilisée pour le modèle simplicial et le modèle effectif que je vais présenter dans la prochaine leçon.

Le principe d'univalence

Le principe d'univalence peut être considéré comme une généralisation de la formulation

$$(p \equiv_o q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

Voevodsky a montré qu'il entraine le principe d'extensionalité pour les fonctions. (Pour cela, il est essentiel d'avoir η-conversion.)

Il entraine aussi que deux types équivalents sont égaux; l'égalité $X \equiv_U Y$ est une notion forte : non seulement X et Y vérifient les mêmes *propriétés* mais on peut aussi *transporter* toute structure de X sur une structure de Y

Mais cette formulation est aussi plus raffinée : par exemple, elle entraine que $\mathsf{hProp}(U)$ est un ensemble et que $\mathsf{hSet}(U)$ est un groupoïde.

Structure

Comme pour le principe d'extensionalité pour les fonctions, le principe d'univalence est une propriété de *modularité*.

On peut donc s'attendre que, de la même manière que le principe d'extensionalité a été ajouté pour faciliter la formalisation en pratique, le principe d'univalence sera utile pour la formalisation en mathématique et en informatique.

C'était une des motivations de Voevodsky pour introduire ce principe. Mais il considère une généralisation de la notion de structure où la notion d'ensemble est remplacée par la notion de 《type d'homotopie》.

A major advantage of this point of view is that unlike ∞-categories, which can be defined in many substantially different ways the world of ∞-groupoids is determined by Grothendieck correspondence (see Grothendieck 1997) , which asserts that ∞-groupoids are "the same" as homotopy types. Combining this correspondence with the previous considerations we come to the view that not only homotopy theory but the whole of Mathematics is the study of structures on homotopy types. Voevodsky (2014)

Structure

$S : U \to U,\ A \mapsto A \times (A \to A)$ type de structures, une structure sur A est donnée par un élément $a : A$ et une fonction $f : A \to A$

Un objet de type $\Sigma_{A:U} S\ A$ est un type A avec un élément et une fonction $f : A \to A$.

On a une notion canonique d'《isomorphisme》 $(A, a, f) \simeq (B, b, g)$

Ce doit être une équivalence $\alpha : A \to B$ avec $\alpha a \equiv_B b$ et $g \circ \alpha \equiv \alpha \circ f$

Si on regarde l'interprétation de S dans le modèle où les types sont des groupoïdes (suggéré par F. Lamarche et étendu par M. Hofmann et Th. Streicher pour un modèle de $a \equiv_A b$), ceci correspond exactement à un élément de $(A, a, f) \equiv (B, b, g)$.

Structure

Ceci suggère fortement qu'en théorie des types avec l'univalence, on doit pouvoir montrer que deux structures isomorphes sont égales, i.e. vérifient les mêmes propriétés; *Isomorphism is equality*, Th. C. et N.A. Danielsson (2013)

Ici encore on a une formulation élégante sous la forme suivante

Théorème: *La flèche canonique* $(A, a, f) \equiv (B, b, g) \to (A, a, f) \simeq (B, b, g)$ *est une équivalence*

On obtient un principe général de *transport de structure*, comme étudié par Bourbaki.

Structure

Comme tu sais, mon honorable collègue Mac Lane soutient que toute notion de structure comporte necessairement une notion d'homomorphisme, consistant à indiquer, pour chacune des données constituant la structure, celles qui se comportent de manière covariante et celles qui se comportent de maniere contravariante ... Que penses-tu qu'il y ait à tirer de ce genre de considérations? A. Weil (lettre à Chevalley 1943)

Pour chaque notion de structure, on peut associer canoniquement une notion d'*isomorphisme*, mais une notion de structure donnée, par exemple, celle d'espace topologique, peut avoir plusieurs notions de morphismes.

Structure

Le principe de transport de structure est étudié en détail dans Bourbaki. En théorie des ensembles, toutes les propriétés de structure ne sont pas transportables, et Bourbaki donne des ⟪critères de transportabilité⟫.

Par exemple, la propriété pour un groupe donné de contenir un élément fixe (e.g. $\emptyset$) n'est pas invariante par isomorphisme. Cette propriété ne peut pas se formuler en théorie des types.

La notion de structure était aussi importante pour Russell.

Le chapitre VI de *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919) est consacrée à la notion d'isomorphisme et dans *My philosophical development* (1959), on trouve la remarque

When two relations have the same structure, their logical properties are identical, except such as depend upon the membership of their fields.

Exemple des catégories

Pour les *catégories*, la notion d'*isomorphisme* doit être remplacée par la notion d'*équivalence*.

Comment définir une catégorie?

Analogue de la notion d'*ensemble ordonné* au niveau des groupoïde.

Un ordre est une structure sur un ensemble.

Une catégorie est une structure sur un groupoïde.

Exemple des catégories

Un *préordre* sur un ensemble est une relation réflexive et transitive.

Un *ordre* est une relation de préordre antisymétrique.

Précategorie sur un type A : on a Hom x y *ensemble*, avec id_x : Hom x x. et relation de composition (remplace réflexivité et transitivité)

On peut alors définir l'*ensemble* Iso x y et on a une flèche canonique $x \equiv_A y \to$ Iso x y. Une *catégorie* est une précatégorie telle que cette flèche canonique est une équivalence.

Ceci géralise la formulation suivante de réflexivité et antisymétrie $x \equiv y \leftrightarrow (x \leqslant y \wedge y \leqslant x)$

Ceci entraine que A est un groupoïde car $x \equiv_A y$ doit être un ensemble

Exemple des catégories

L'axiome d'univalence entraine que $\mathsf{hSet}(U)$, avec $\mathsf{Hom}\ a\ b = a \to b$ et l'opération de composition des fonctions, forme une *catégorie*.

De même, il y a une structure de *catégorie* sur le type des groupes, si on définit ce type comme $\Sigma_{X:U}\mathsf{isSet}\ X \times S(X)$ avec $S(X)$ qui exprime qu'il y a une opération sur X qui satisfait les axiomes de groupe.

On peut définir la notion d'équivalence de catégories, et on peut montrer que la flèche canonique $A \equiv_{\mathsf{Cat}} B \to A \simeq B$ est une équivalence, cf. *Univalent categories and the Rezk completion*, B. Ahrens, C. Kapulkin et M. Shulman (2013).

On a la même situation pour les 2-catégories faibles et la notion de 2-équivalence, cf. R. Bocquet (2016) et *Bicategories in Univalent Foundation*, B. Ahrens, D. Frumin, M. Maggesi, N. Veltri et N. van der Weide (2022).

Exemple des catégories

Pour définir une notion de catégorie cartésienne A, on peut énoncer que pour deux objets a et b, il existe un triplet (c, π_1, π_2) vérifiant la propriété universelle du produit : pour tout d, la flèche

$$\mathsf{Hom}\ d\ c\ \to \mathsf{Hom}\ d\ a \times \mathsf{Hom}\ d\ b, \qquad f \mapsto (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$$

est une bijection.

Le type de ces triplets est toujours une *proposition*.

Pour une catégorie, ⟪avoir des produits⟫ est donc une *propriété*.

On peut extraire une *structure* de cette propriété comme opération $a \times b$ avec $\pi_1 : \mathsf{Hom}\ (a \times b)\ a$ et $\pi_2 : \mathsf{Hom}\ (a \times b)\ b$.

De même, ⟪être une catégorie abélienne⟫ est une propriété, mais on peut extraire une structure de cette propriété, qui s'exprime par des conditions universelles.

Exemple des catégories

A major advantage of this point of view is that unlike ∞-categories, which can be defined in many substantially different ways the world of ∞-groupoids is determined by Grothendieck correspondence ... which asserts that ∞-groupoids are "the same" as homotopy types. Combining this correspondence with the previous considerations we come to the view that not only homotopy theory but the whole of mathematics is the study of structures on homotopy types.

Troncature propositionnelle

Voevodksy définit la *troncature propositionnelle*

$$||A|| = \Pi_{X:U}(\mathsf{hProp}\ X) \to (A \to X) \to X$$

La spécification de $||A||$ est alors

-$||A||$ est une proposition

-$A \to ||A||$

-si P est une proposition, on a $||A|| \to P$ si $A \to P$

Mais il faut faire attention avec les univers; avec cette définition, on a $||A|| : U^+$ si $A : U$.

Troncature propositionnelle

Avec la troncature propositionnelle, on peut définir $\exists_{x:A}P(x)$ comme $\|\Sigma_{x:A}P(x)\|$

La définition est équivalente à

$$\Pi_{X:U}\mathsf{hProp}\ X \to (\Pi_{x:A}P(x) \to X) \to X$$

à comparer avec

$$\Pi_{X:o}(\Pi_{x:A}P(x) \to X) \to X$$

Troncature propositionnelle

On a aussi une formulation élégante de l'*axiome du choix* : si A est un ensemble, on a $(\Pi_{x:A} \|B(x)\|) \to \|\Pi_{x:A} B(x)\|$. Ce principe est vérifié dans le modèle simplicial.

En particulier, l'axiome du choix dénombrable est $(\Pi_{x:N} \|B(x)\|) \to \|\Pi_{x:N} B(x)\|$

Le principe d'univalence est *incompatible* avec un opérateur de choix global, il entraine

$$\neg(\Pi_{A:U} \mathsf{hSet}\ A \to \|A\| \to A)$$

Exemple des catégories

Soit A et B deux catégories et $f : A \to B$ un foncteur; on suppose

f est *essentiellement surjectif* : $\Pi_{b:B}\exists_{a:A}\mathsf{Iso}\ (f\ \ a)\ b$

f est *pleinement fidèle* : $\mathsf{Hom}\ a_0\ a_1 \to \mathsf{Hom}\ (f\ \ a_0)\ (f\ \ a_1)$ est une bijection

En utilisant que f est pleinement fidèle, on montre

Lemma: *Le type* $\Sigma_{a:A}\mathsf{Iso}\ (f\ \ a)\ b$ *est une proposition*

On a donc, si f est aussi essentiellement surjectif, $\Pi_{b:B}\Sigma_{a:A}\mathsf{Iso}\ (f\ \ a)\ b$ et on obtient $g : B \to A$ tel que $\Pi_{b:B}\mathsf{Iso}\ (f\ \ (g\ b))\ b$

Exemple des catégories

En théorie des ensembles, on n'a pas accès à cette version du choix unique et on doit utiliser un axiome du choix général qui choisit un objet a et un isomorphisme Iso $(f\ a)\ b$.

Comme on le verra dans la prochaine leçon, on peut justifier cet axiome du choix unique dans une métathéorie constructive, et plus faible que PA_2.

Principe du choix unique

En général, on représente $\exists!_{x:A} P(x)$ par $\mathsf{isContr}(\Sigma_{x:A} P(x))$

Dans le cas particulier où A est un ensemble et $P(x)$ est une proposition, on retrouve la notion usuelle d'existence unique.

Dans ce cas, l'existence unique entraine que $\Sigma_{x:A} P(x)$, qui a priori est un *ensemble*, devient une *proposition*, et donc, on a bien *dans ce cas* $(\exists_{x:A} P(x)) \to \Sigma_{x:A} P(x)$

Mais si A est un groupoïde et $P(x)$ un ensemble, alors $\Sigma_{x:A} P(x)$ est un groupoïde, et l'existence unique exprime le fait qu'entre deux éléments il y a une et une seule preuve d'égalité et qu'il y a (de manière explicite) un élément.

Principe du choix unique

Dans le cas particulier où $P(x)$ est une propriété décidable pour $x : N$ alors on a

$$(\exists_{x:N} P(x)) \leftrightarrow \exists !_{x:N} Q(x)$$

avec

$$Q(x) \ = \ P(x) \wedge \Pi_{y:N} y < x \rightarrow \neg P(x)$$

et donc on a $(\exists_{x:N} P(x)) \rightarrow \Sigma_{x:N} P(x)$

Ceci est semblable au *principe de Markov* $\neg\neg(\Sigma_{x:N} P(x)) \rightarrow \Sigma_{x:N} P(x)$ qui lui cependant n'est *pas* prouvable (comme on peut le voir, par exemple, en utilisant les modèles de faisceaux).

Formalisation des mathématiques

Il existe plusieurs bibliothèque de preuves mathématiques construites autour de l'axiome d'univalence

-Martin Escardo ⟪type topology⟫

-Egbert Rijke *An introductory course to Homotopy Type Theory* et ⟪agda-unimath⟫

-bibliothèque dans Coq/Rocq

-UniMath https://github.com/UniMath/Foundations et https://github.com/UniMath/UniMath

Redimensionnement

Définissons un type A d'être U*-petit* s'il est équivalent à un type dans U, i.e. $\Sigma_{X:U} A \simeq X$ (qui est une *proposition*). L'axiome de redimensionnement est proche de l'axiome de réductibilité

Axiome de redimensionnement: *Toute proposition est* U*-petite*

Remarque : *Le tiers-exclu entraine l'axiome de redimensionnement*

En effet, il entraine que la flèche $\mathsf{Bool} \to \mathsf{hProp}(U),\ x \mapsto x \equiv \top$ est une équivalence

L'analogue de ce principe n'est pas possible pour les *ensembles* : le type V des ensembles (au sens de P. Aczel raffiné par Gylerud) que j'ai présenté à la leçon précédente vérifie $\mathsf{hSet}\ V$, mais V n'est prouvablement pas U-petit.

Le principe de redimensionnement est valide dans le modèle simplicial (dans une métathéorie classique)

Formalisation des mathématiques

L'axiome du choix, sous la forme

$$\text{isSet } A \to (\Pi_{x:A} \|B(x)\|) \to \|\Pi_{x:A} B(x)\|$$

est aussi valide dans le modèle simplicial (dans une métathéorie classique).

Avec cet axiome, on peut suivre de manière assez fidèle des preuves classiques. Par exemple, la définition des schémas affines dans Hartshorne est reproduite dans le système UniMath

```
Definition zariski_topology : (prime_ideal R -> hProp) -> hProp :=
    \ U, exists A, U <-> (\ p, not (subset A p)).

Lemma gluing_structure_presheaf (ac : AxiomOfChoice) : gluing structure_presheaf.

Definition structure_sheaf (ac : AxiomOfChoice) : sheaf_commring (Spec R) :=
    make_sheaf_commring structure_presheaf
                        locality_structure_presheaf
                        (gluing_structure_presheaf ac).
```

Principe de remplacement

Si $f : A \to B$ et B est localement U-petit, et A est U-petit, alors l'image de f est U-petite.

L'image de f est $\Sigma_{b:B}\exists_{x:A} f\ x \equiv_B b$ avec $\exists_{x:A}P(x) = \|\Sigma_{x:A}P(x)\|$.

Ce principe joue le rôle dans certains cas de l'axiome de redimensionnement

Dans la seconde édition des *Principia Mathematica*, Russell analyse des cas où l'on peut éviter l'axiome de réductibilité. (Il pensait même avoir un argument sans cet axiome pour justifier le principe d'induction sur les entiers, ce qui n'est pas possible, comme il le sera prouvé par Myhill 1974.)

Principe de remplacement, exemples

-Si $B = 1$, alors on obtient la troncature propositionnelle $\|A\|$ de A

-Si $R : A \to A \to \mathsf{hProp}(U)$ est une relation d'équivalence, et $B = A \to \mathsf{hProp}(U)$ et $f\ x = R\ x$, alors on obtient le quotient de A par la relation d'équivalence R

-Comme cas particulier, si $R\ x\ y = \|\mathsf{Id}\ A\ x\ y\|$, on obtient la troncature ensembliste $\pi_0(A)$ (intuitivement, l'ensemble des composantes connexes de A)

-¶ $K(G, 1)$ peut être défini comme l'image de $1 \to T(G)$ où $T(G)$ est le groupoïde des G-torseurs

COLLÈGE DE FRANCE 1530

Essais pour représenter l'égalité

L'égalité pour Martin-Löf 1973 est défini de manière inductive par le ⟪constructeur⟫ refl $x : x \equiv_A x$

Cette égalité n'est *pas* extensionnelle $f = \lambda_x 0 + x$ et id $= \lambda_x x$ ne sont pas prouvablement égaux au type $N \to N$

Mais on peut montrer $\Pi_{x:N} f\ x \ \equiv\ \mathrm{id}\ x$.

On peut donc montrer $P(\mathrm{id})$ pour $P = \lambda_g\ \mathrm{id} \equiv_{N \to N} g$ mais on ne peut pas montrer $P(f)$, bien que f et id sont égaux points par points.

C'est un problème de *modularité*. Pour cette raison, Voevodsky a longtemps considéré que l'égalité de Martin-Löf 1973 ne pouvait pas être pertinente pour une formalisation des mathématiques, et était incompatible avec l'univalence.

Essais pour représenter l'égalité

Notes on homotopy λ-calculus Voevodsky (2006)

Dans cette note, Voevodsky essaie de décrire le modèle des ensembles simpliciaux

Il essaie de représenter les propriétés de l'《égalité》 dans ce modèle; l'égalité est représenté comme espace de *chemins*.

Une propriété essentielle est que $\Sigma_{x:A} a \equiv_A x$ doit être contractile.

Voevodsky énumère plusieurs lois valides dans ce modèle.

Il est tout à fait remarquable que toutes ces lois sont capturées par la formulation de l'égalité de Martin-Löf 1973, avec le principe d'univalence.

Essais pour représenter l'égalité

A very short note on homotopy λ-calculus, V. Voevodsky (2006), contient une variation de la définition de Russell

On définit d'abord la notion de famille de types *représentable*

$$\mathsf{rep}\ F = \mathsf{isContr}(\Sigma_{x:A} F\ x)$$

Intuitivement, on a un élément $a : A$ tel que $F\ x$ est équivalent à $a \equiv_A x$

On peut alors définir l'égalité

$$a \equiv_A b \ = \ \Pi_{F:A \to U} \mathsf{rep}\ F \to F\ a \to F\ b$$