

Modèles du principe d'univalence

Thierry Coquand

Théorie des types dépendants

En théorie des types dépendants, telle que présentée par Martin-Löf, tous les principes sont «justifiés»

Exemple du principe d'induction

N est un type primitif, avec «constructeurs» $0 : N$ et $x + 1 : N$ si $x : N$

On peut introduire $f : \prod_{x:N} C(x)$ si on a construit

$$a : C(0) \text{ et } g : \prod_{x:N} C(x) \rightarrow C(x + 1)$$

avec les lois de calcul $f(0) = a$ et $f(x + 1) = g \ x \ f(x)$. Ce sont exactement les lois de calcul pour les fonctions primitives récurrentes, comme formulées par Hilbert.

Théorie des types dépendants

Les calculs sont effectués dans un langage de programmation fonctionnel, qui est un λ -calcul étendu avec constructeurs et définition récursive de fonctions définis par cas.

Par exemple, $W\ A\ B$ avec constructeurs

$$\text{sup} : \Pi_{x:A} (B\ x \rightarrow W\ A\ B) \rightarrow W\ A\ B$$

et $\alpha : \Pi_{u:W\ A\ B} C(u)$ défini par $\alpha(\text{sup}\ a\ f) = \beta\ a\ f\ (\lambda_x \alpha\ (f\ x))$ si

$$\beta : \Pi_{a:A} \Pi_{f:B\ a \rightarrow W\ A\ B} (\Pi_{x:B\ a} C(f\ x)) \rightarrow C(\text{sup}\ a\ f)$$

Théorie des types dépendants

Cette analyse est inspirée des travaux de Gentzen (30-45) en théorie de la démonstration, avec la mise en évidence d'une dualité entre les lois d'introduction (constructeurs) et lois d'élimination (fonctions définies par cas), justifiées par des lois de calcul.

Corollaire : normalisation et décidabilité du typage.

Comparaison avec théorie des ensembles telle que formulée par Zermelo (1908) par un système d'axiomes.

Le modèle de P. Aczel fournit une « explication » de certains de ces axiomes, en représentant les ensembles par des arbres et l'égalité par la relation de bisimulation.

Théorie des types dépendants

Peut-on justifier le principe d'univalence, comme présenté dans la leçon précédente ?

La justification inductive de l'égalité par Martin-Löf ne justifie par ce principe : tout élément (clos) de $A \equiv_U A$ doit être la réflexivité.

Si on ajoute le principe d'univalence comme axiome, on perd le résultat de canonicité et on perd le caractère effectif/constructif.

Un essai naturel pour justifier ce principe est de partir du modèle de cet axiome mis au point par Voevodsky et présenté dans *The Simplicial Model of Univalent Foundations (after Voevodsky)* Ch. Kapulkin et P. Lumsdaine (2012). Comme on va le voir, ce modèle n'est *pas* constructif, mais on peut construire des variations de ce modèle qui sont effectives.

Dans quelle mesure le modèle simplicial est constructif?

La non constructivité du modèle simplicial est subtile :

-avec la définition usuelle de la condition de Kan, on ne peut pas montrer l'existence de l'*exponentielle* de manière constructive,

-il y a une définition (classiquement) équivalente de cette condition (en gros, qui exprime que « toute boîte ouverte peut être remplie »). Avec cette condition, on peut justifier l'existence de l'exponentielle, mais il y a un problème constructif pour construire des *univers*.

L'exponentielle se trouve dans les notes de J. Moore (1956) sur *Algebraic homotopy theory* et son argument repris par H. Cartan *Sur le foncteur $\text{Hom}(X, Y)$ en théorie simpliciale* (1956) et dans le livre de P. May *Simplicial objects in algebraic topology* (1967).

Application de modèles constructifs

Par exemple, on peut suivre la preuve de Serre que $\pi_n(S_m)$ est de présentation finie, et l'écrire en théorie des types.

Ceci a été fait par D. Wörn et R. Barton (2023).

Si on a un modèle constructif de l'univalence (et des types inductifs d'ordre supérieur) on peut « suivre » cette preuve et calculer, pour n et m donnés, une présentation de $\pi_n(S_m)$.

Une question similaire est discutée par Kreisel : Serre lui demandait si l'axiome du choix était nécessaire pour montrer ce résultat, et Kreisel suggérait pour cela d'utiliser le modèle des ensembles constructibles (qui interprète l'axiome du choix), cf. *La prédictivité* G. Kreisel (1960).

Cette analyse fournit une preuve constructive de ce résultat, et dans une méta-théorie plus faible que PA_2 .

Application de modèles constructifs

Une autre application est de montrer que l'univalence n'augmente pas la force logique de la théorie des types : le système avec une hiérarchie d'univers a la même force logique avec ou sans univalence.

On obtient aussi une justification du principe de description définie/l'axiome du choix unique dans une méta-théorie faible.

Le modèle simplicial

Le modèle simplicial est un raffinement du modèle de *préfaisceau* construit sur la catégorie Δ .

Les objets sont les ordres linéaires finis non vides $[n]$.

Les morphismes sont les applications croissantes (au sens large).

Semi-Simplicial Complexes and Singular Homology, S. Eilenberg et J. Zilber (1950).

Intuition *spatiale*.

Un peu après, et de manière indépendante, Beth (1955) puis Kripke (1958) introduisent aussi modèles de préfaisceaux, avec cette fois une intuition *temporelle*, pour donner des modèles de la logique intuitioniste.

Le modèle simplicial

Une intuition possible pour un préfaisceau Γ sur Δ est que l'on a pour chaque forme $[n]$, un ensemble d'éléments $\Gamma([n])$ de « forme » $[n]$

$\Gamma([0])$ est l'ensemble des points

$\Gamma([1])$ est l'ensemble des lignes

$\Gamma([2])$ est l'ensemble des triangles, ...

On a $i : [0] \rightarrow [1]$ pour $i = 0, 1$ et si γ dans $\Gamma([1])$ on peut penser à γ comme une ligne qui joint le point γ_0 au point γ_1 .

Le modèle simplicial

De même si A est dans $\mathbf{Type}(\Gamma)$, alors pour ρ dans $\Gamma([0])$ on peut penser à $A([0], \rho)$ comme un ensemble de points.

Si γ est dans $\Gamma([1])$ on peut penser à $A([1], \gamma)$ comme un ensemble de lignes. Si u est dans $A([1], \gamma)$ alors u est une ligne de source $u0$ dans $A([0], \gamma0)$ et de but $u1$ dans $A([0], \gamma1)$.

Le modèle simplicial

Pour l'application $r : [1] \rightarrow [0]$ et si a est un point dans $\Gamma([0])$ alors ar dans $\Gamma([1])$ est la ligne « constant » a .

Un élément dans $\Gamma([n])$ qui est de la forme us pour u dans $\Gamma([m])$ avec $m < n$ et $s : [n] \rightarrow [m]$ surjectif est appelé « dégénéré ».

En général, on ne peut pas décider si un élément est dégénéré ou non. Classiquement, tout élément dans $\Gamma([n])$ est de la forme unique us avec $s : [n] \rightarrow [m]$ surjectif et u non dégénéré; c'est un lemme d'Eilenberg-Zilberg.

(Ceci est tout à fait similaire au *support* d'un élément d'un ensemble nominal, qui n'existe que de manière classique.)

Le modèle simplicial

Un contexte sera un $\mathcal{U}_\omega$ -petit préfaiceau sur Δ , donc une famille d'ensembles $\Gamma(X)$, qui sont $\mathcal{U}_\omega$ -petits, et flèches de restriction $\Gamma(X) \rightarrow \Gamma(Y)$, $\rho \mapsto \rho f$ pour $f : Y \rightarrow X$. On identifiera X avec $Yo(X)$ et $\Gamma(X)$ avec $X \rightarrow \Gamma$.

Une substitution $\sigma : \Delta \rightarrow \Gamma$ est une transformation naturelle.

Un type A sur Γ est donné par une famille d'ensembles $A(X, \rho)$ pour $\rho : X \rightarrow \Gamma$ qui sont $\mathcal{U}_\omega$ -petits, avec flèches de restriction $A(X, \rho) \rightarrow A(Y, \rho f)$, $u \mapsto uf$

Un élément de A est une famille d'éléments $a(X, \rho)$ de $A(X, \rho)$ telle que $a(X, \rho)f = a(\rho f, Y)$ si $f : Y \rightarrow X$.

Le modèle simplicial

Comme dans tout modèle de préfaisceau, on a un univers U_i avec $U_i(X, \rho)$ défini comme ensemble des familles $\mathcal{U}_i$ -petites $A(Y, f)$ avec flèches de restriction $A(Y, f) \rightarrow A(Z, fg)$ si $g : Z \rightarrow Y$.

Si B est dans $\mathbf{Elem}(\Gamma, U_i)$, on associe $T_i(B)$ dans $\mathbf{Type}(\Gamma)$ en prenant

$$T_i(B)(X, \rho) = B(X, \rho)(X, \text{id}).$$

On a alors

$$B(Y, \rho f)(Y, \text{id}) = B(X, \rho)f(Y, \text{id}) = B(X, \rho)(Y, f).$$

ce qui permet de définir la flèche de restriction $T_i(B)(X, \rho) \rightarrow T_i(B)(Y, \rho f)$.

Tout est effectif, et élémentaire.

Le modèle simplicial

On peut définir $\epsilon_0 : \Gamma \rightarrow \Gamma \times [1]$ et $\epsilon_1 : \Gamma \rightarrow \Gamma \times [1]$.

Si A est dans $\mathbf{Type}(\Gamma)$ et a et b sont dans $\mathbf{Elem}(\Gamma, A)$ alors on peut définir $a \equiv_A b$ en prenant pour $(a \equiv_A b)(X, \rho)$ l'ensemble des éléments ω dans $\mathbf{Elem}(X \times [1], A\rho\pi_1)$ tels que $\omega\epsilon_0 = a\rho$ et $\omega\epsilon_1 = b\rho$.

Intuitivement ω est un chemin de source $a\rho$ et de but $b\rho$.

On peut alors définir $\mathbf{refl}_a(X, \rho) = a\rho\pi_1$ et $\mathbf{refl}_a$ est dans $\mathbf{Elem}(\Gamma, a \equiv_A a)$.

Le type $S_a = \sum_{x:A} a \equiv_A x$ contient l'élément $(a, \mathbf{refl}_a)$, et on peut construire un chemin de $(a, \mathbf{refl}_a)$ dans un élément quelconque (x, ω) de S_a .

Cofibration

$\Omega(X)$ est l'ensemble des *cribles* sur X . Un crible de X est un ensemble C de flèche de codomaine X clos par composition : si $f : Y \rightarrow X$ dans C et $g : Z \rightarrow Y$ alors fg dans C . (C'est un sous-objet de $Yo(X)$.) Si $f : Y \rightarrow X$, on définit un crible Cf sur Y en prenant l'ensemble des $g : Z \rightarrow Y$ tels que fg dans C . En particulier $\top$ est l'ensemble de toutes les flèches de codomaine X .

Pour un modèle constructif, on aura besoin de se limiter à des cribles *décidables*. On fixera Φ sous-treillis distributif de Ω , qui ne contient que des cribles décidables. L'objet Φ classe les « cofibrations ».

Une condition est que Φ définit une « dominance » : tout isomorphisme est une cofibration et les cofibrations sont closes par composition. Une autre condition est que l'injection $0 : [0] \rightarrow [1]$ (resp. $1 : [0] \rightarrow [1]$) est classifiée par un élément δ_0 (resp. δ_1) de $\Phi([1])$.

On demandera aussi que $\Phi([n])$ contienne $\Delta^k[n]$, qui correspond au crible $Im f \subseteq [n] - \{i\}$ pour un $i \neq k$.

On peut prendre pour $\Phi(X)$ l'ensemble des cribles décidables de X .

Types et éléments partiels

Soit Γ un contexte et $\psi : \Gamma \rightarrow \Phi$, on définit $\Gamma|\psi$ en prenant $\Gamma|\psi(X)$ sous-ensemble des ρ dans $\Gamma(X)$ tels que $\psi\rho = \top$.

On a une flèche de restriction $\Gamma|\psi(X) \rightarrow \Gamma|\psi(Y)$ pour $f : Y \rightarrow X$.

On note $|\psi : \Gamma|\psi \rightarrow \Gamma$ la flèche d'injection.

Un *type partiel sur Γ d'étendue ψ* est un élément de $\mathbf{Type}(\Gamma|\psi)$; c'est donc une famille d'ensembles $A(X, \rho)$ pour $\psi\rho = \top$ avec flèches de restriction.

Un *élément partiel de A d'étendue ψ* est un élément de $\mathbf{Elem}(\Gamma|\psi, A|\psi)$; c'est donc une famille d'éléments $a(X, \rho)$ pour $\psi\rho = \top$ avec $a(X, \rho)f = a(Y, \rho f)$.

Notation : Si $\sigma : \Theta \rightarrow \Gamma$ et A un élément de $\mathbf{Type}(\Gamma|\psi)$ on notera $A\sigma$ l'élément $A\sigma(X, \nu) = A(X, \sigma\nu)$ de $\mathbf{Type}(\Theta|\psi\sigma)$. De même, si a élément de $\mathbf{Elem}(\Gamma|\psi, A|\psi)$ on notera $a\sigma$ l'élément $a\sigma(X, \nu) = a(X, \sigma\nu)$ de $\mathbf{Elem}(\Theta|\psi\sigma, A|\psi\sigma)$.

Types et éléments partiels

Si A est dans $\mathbf{Type}(\Gamma)$ le types $\tilde{A}$ des éléments partiels de A est défini en prenant pour $\tilde{A}(X, \rho)$ l'ensemble des couples φ, a avec φ dans $\Phi(X)$ et a un élément partiel de $A\rho$ d'étendue φ . On définit $(\varphi, a)f = \varphi f, af$.

On a une transformation naturelle $\eta : A(X, \rho) \rightarrow \tilde{A}(X, \rho)$, $a \mapsto (\top, \lambda_{Y,f}af)$.

On a aussi $\tilde{A} \rightarrow \Phi$, $(\varphi, a) \mapsto \varphi$ et η est classifiée par cette flèche.

Le modèle simplicial

On veut se restreindre aux ensembles simpliciaux qui vérifient la condition de Kan, introduite dans *A Combinatorial Definition of Homotopy Groups*, D. Kan (1958).

C'est une *propriété* : si on a $\rho : [n] \rightarrow \Gamma$, tout élément partiel d'étendue $\Delta^k[n]$ admet une extension totale. On note $\text{isFib}(\Gamma, A)$ cette propriété.

Avec cette définition, il n'est *pas* possible de montrer les propriétés voulues dans une méta-théorie constructive, cf.

A Kripke model for simplicial sets, M. Bezem et Th. C. (2013)

Non-constructivity in Kan simplicial sets, M. Bezem, Th. C. et E. Parmann (2015)

On utilise des modèles de Kripke à 3 niveaux, et l'utilisation d'un vérificateur automatique est utile pour s'assurer que l'on a bien examiné tous les cas.

Le modèle simplicial

On s'attend par exemple à avoir la propriété suivante

si A dans $\mathbf{Type}(\Gamma)$ est une fibration de Kan alors, pour tout $\gamma : [1] \rightarrow \Gamma$, on a une équivalence $A\gamma_0 \rightarrow A\gamma_1$

En particulier on doit pouvoir définir une flèche $A\gamma_0 \rightarrow A\gamma_1$.

La construction naturelle de cette flèche utilise que l'on peut décider si un simplexe donné $[n] \rightarrow A\gamma_0$ est dégénéré ou non, mais ce n'est pas décidable en général.

De même, la construction de l'exponentielle, telle que décrite par J. Moore, H. Cartan (1956) et P. May (1967), se fait par cas si un élément est dégénéré ou non. Une telle distinction de cas est aussi présente, dans un cadre différent, dans la thèse de J.-P. Serre *Homologie Singulière des Espaces Fibrés*, (1951).

Le modèle simplicial

La justification habituelle de l'existence des produits dépendants est assez indirecte, par exemple, on trouve dans les notes de Thomas Streicher (2010)

Using the fact that trivial cofibrations are stable under pullbacks along Kan fibrations (referred to as right proper in the literature) one easily establishes that Kan fibrations are closed under dependent products

Ce résultat est lui-même prouvé en utilisant la notion de fibrations minimales, qui se construisent en utilisant l'axiome du choix.

Le modèle simplicial

Cette justification utilise que l'on a une *structure de modèle de Quillen* sur les ensembles simpliciaux.

Les *cofibrations* sont les monomorphismes, flèches classifiées par Ω .

Les *fibrations* sont définies par la propriété de relèvement par rapport aux injections $\Delta^k[n] \rightarrow [n]$.

Ceci détermine de manière unique la notion d'*équivalence faible*.

Le modèle simplicial

On montre alors, classiquement, que cette structure de modèle vérifie les propriétés :

- Frobenius (et « right proper » : les équivalences faibles sont préservées par produit fibré le long des fibrations)

- « Extension d'équivalence »

- Extension de fibration le long de cofibration triviale

À partir de ces propriétés de la structure de modèle, on peut montrer que l'on obtient un modèle de l'univalence en considérant les types A tels que $\Gamma.A \rightarrow \Gamma$ est une fibration.

Le modèle simplicial

L'approche que je présente est « duale » : on commence par construire un modèle de l'univalence, et on peut en déduire une structure de modèle de Quillen sur les ensembles simpliciaux.

Pour les ensembles simpliciaux, ceci utilise encore une méta-théorie classique mais l'utilisation de la logique classique est « concentrée » dans la preuve d'équivalence de deux définitions d'être une fibration.

Cette méthode permet plus généralement de construire de nouveaux modèles de l'univalence dans une méta-théorie constructive, et aussi des structures de modèles de Quillen sur des préfaisceaux. Cette construction de modèle a de plus été formalisée dans NuPrl (M. Bickford, 2017) et dans Agda (I. Orton et A. Pitts, 2017).

Autre définition de fibration de Kan

Une *boîte ouverte* de $\Theta \times [1]$ est une cofibration de la forme $\psi\pi_1 \vee \delta_i\pi_2 : \Theta \times [1] \rightarrow \Phi$, $i = 0$ ou $i = 1$, pour $\psi : \Theta \rightarrow \Phi$.

Ceci donne la deuxième définition possible de fibrations de Kan : A dans $\mathbf{Type}(\Gamma)$ tel que si $\sigma : \Theta \times [1] \rightarrow \Gamma$, toute boîte ouverte de $A\sigma$ « peut se remplir ».

On peut montrer que cette condition est équivalente à une condition qui semble plus faible : pour tout $\sigma : \Theta \times [1] \rightarrow \Gamma$, toute boîte ouverte de $A\sigma$ « peut se fermer ».

C'est aussi une *propriété*, mais on peut en extraire une *structure*

Autre définition de fibration de Kan

L'équivalence entre ces deux définitions est un résultat clef

An Introduction to Simplicial Homotopy Theory, A. Joyal et M. Tierney, Th. 1.5.3

Simplicial Homotopy Theory, P. Goerss et J. Jardine, Pr. 4.2

Calculus of Fractions and Homotopy Theory, P. Gabriel et M. Zisman (1967) théorie des extensions anodynes

Objets injectifs/contractiles

A est *contractile* : si $\sigma : \Theta \rightarrow \Gamma$ alors tout élément partiel de $A\sigma$ s'étend en un élément total.

C'est une propriété; on dit aussi que A est *injectif*.

Lemme : A est *contractile* si, et seulement si, l'application $\eta : A \rightarrow \tilde{A}$ a un inverse à gauche.

Sans axiome du choix, ceci donne une *structure*, qui est une opération d'extension $e(\varphi, a) : A(X, \rho)$, opération qui prend un élément partiel d'étendue φ et produit un élément total $e(\varphi, a)$ tel que $e(\varphi, a)|\varphi = a$. De plus, on a $e(\varphi, a)f = e(\varphi f, af)$.

On peut utiliser une telle structure si on montre une proposition.

Objets injectifs/contractiles

On note $\text{isContr}(\Gamma, A)$ la propriété d'être contractile, et $\text{Contr}(\Gamma, A)$ l'ensemble des opérations d'extensions.

On a des flèches de restriction $\text{isContr}(\Gamma, A) \rightarrow \text{isContr}(\Theta, A\sigma)$ et $\text{Contr}(\Gamma, A) \rightarrow \text{Contr}(\Theta, A\sigma)$.

Sans axiome du choix, on a $\text{isContr}(\Gamma, A) \rightarrow \text{Contr}(\Gamma, A)$.

Structure de remplissage et de composition

De manière similaire, la propriété de Kan est équivalente à un élément de la structure $\text{Fill}(\Gamma, A)$: « toute boîte ouverte de A se remplit » et ceci de manière uniforme.

Boîte ouverte pour ψ dans $\Phi(X)$: l'ensemble des éléments partiels de A au stage $X \times [1]$ d'étendue $\varphi\pi_1 \vee \delta_0\pi_2$ ou $\varphi\pi_1 \vee \delta_1\pi_2$.

On définit de même $\text{Comp}(\Gamma, A)$ ensemble des opérations qui ferment une boîte ouverte de manière uniforme.

On a donc $\text{isFib}(\Gamma, A) \rightarrow \text{Comp}(\Gamma, A) \rightarrow \text{Fill}(\Gamma, A)$.

Structure de remplissage et de composition

Ceci correspond à un raffinement de la propriété de *relèvement des chemins* pour $\Gamma.A \rightarrow \Gamma$

Relèvement des chemins : pour $\gamma : \Theta \times [1] \rightarrow \Gamma$ et a_0 dans $\text{Elem}(\Theta, A\gamma\epsilon_0)$ (resp. a_1 dans $\text{Elem}(\Theta, A\gamma\epsilon_1)$) on peut trouver ω dans $\text{Elem}(\Theta \times [1], A\gamma)$ tel que $\omega\epsilon_0 = a_0$ (resp. $\omega\epsilon_1 = a_1$). C'est le cas particulier où $\psi = \perp$.

Ici, on se donne non seulement a_0 (resp. a_1) mais aussi un *relèvement partiel*

Ceci permet de montrer que si A admet cette forme forte du relèvement des chemins, alors aussi $a \equiv_B b$ admet cette forme forte du relèvement des chemins.

Structure de remplissage et de composition

Ce raffinement était évoqué dès 1939 par Eilenberg

Lemme : Si A sous-polyèdre de B alors $B \times 0 \cup A \times [0, 1]$ est un rétracte de $B \times [0, 1]$

Proof of basic results about homotopy ... can be obtained quite neatly by repeated, and sometimes tricky, use of this general lemma

Proposition : Étant donné deux fonctions homotopique f_0 et $f_1 : A \rightarrow X$ et une extension $f'_0 : B \rightarrow X$ de f_0 , alors il existe une extension f'_1 de f_1 homotopique à f'_0

Objets injectifs/contractiles

Soit A dans $\mathbf{Type}(\Gamma)$ et a dans $\mathbf{Elem}(\Gamma, A)$

Le type $S_a = \Sigma_{x:A} a \equiv_A x$ est défini par : $S_a(X, \rho)$ est l'ensemble des éléments (b, ω) avec b dans $A(X, \rho)$ et ω dans $A(X \times [1], \rho\pi_1)$ avec $\omega\epsilon_0 = a(X, \rho)$ et $\omega\epsilon_1 = b$. On a vu que ce type vérifie $\Pi_{t:S_a}(a, \mathbf{refl}_a) \equiv_{S_a} t$.

Le fait que S_a soit contractile provient directement d'une structure de remplissage de A , car un élément partiel de S_a définit exactement une boîte ouverte.

En général, on peut montrer que, étant donnée une structure de remplissage pour B , alors B est contractile si, et seulement si, on a un élément de $\Sigma_{b:B} \Pi_{y:B} b \equiv_B y$.

Structure de remplissage et de composition

Théorème : *On peut construire de manière effective et naturelle en Γ*

$$\text{Comp}(\Gamma, A) \rightarrow \text{Fill}(\Gamma, A)$$

$$\text{Comp}(\Gamma, A) \rightarrow \text{Comp}(\Gamma.A, B) \rightarrow \text{Comp}(\Gamma, \Pi_A B)$$

$$\text{Comp}(\Gamma, A) \rightarrow \text{Comp}(\Gamma.A, B) \rightarrow \text{Comp}(\Gamma, \Sigma_A B)$$

$$\text{Comp}(\Gamma, A) \rightarrow \text{Comp}(\Gamma, a \equiv_A b)$$

On peut donc montrer la clôture par exponentielle, mais en utilisant la définition en terme de structure de composition.

Extension d'une fonction partielle de but donné

Si A est un type dans Γ , et $\psi : \Gamma \rightarrow \Phi$, une *fonction partielle d'étendue* ψ et de *codomaine* A est une transformation naturelle $\alpha : B \rightarrow A|\psi$ avec B type partiel d'étendue ψ .

Lemme: *Toute fonction partielle de codomaine A a une extension totale.*

(Ceci correspond au fait que le type $\Sigma_{B:U}(B \rightarrow A)$ est contractile.)

La preuve construit explicitement $\text{Ext}(\alpha)(X, \rho)$ comme l'ensemble

- $B(X, \rho)$ si $\psi\rho = \top$

- l'ensemble des paires (a, b) avec a dans $A(X, \rho)$ et $b(f)$ famille de $B(Y, \rho f)$ pour $\psi f = \top$ avec $b(f)g = b(fg)$, et telle que $\alpha b(f) = af$.

On définit les flèches de restriction $\text{Ext}(\alpha)(X, \rho) \rightarrow \text{Ext}(\alpha)(Y, \rho f)$.

On peut alors définir $\text{ext}(\alpha)b = \alpha b$ si $\psi\rho = \top$ et $\text{ext}(\alpha)(a, b) = a$ si $\psi\rho \neq \top$

Structure d'équivalence

Si A et B sont deux éléments de $\mathbf{Type}(\Gamma)$ et $\alpha : B(X, \rho) \rightarrow A(X, \rho)$ une transformation naturelle, et a dans $A(X, \rho)$, alors un élément de la fibre en a pour α est une paire b, ω avec b dans $B(X, \rho)$ et ω un chemin de αb vers a .

$\mathbf{Equiv}(\Gamma, \alpha, A, B)$ est le type des opération qui, étant donné un élément a de $A(X, \rho)$, étend de manière uniforme tout élément partiel de la fibre en a en un élément total.

Extension d'une équivalence partielle de but donné

On peut alors construire un programme qui correspond au fait que $\Sigma_{B:U} B \simeq A$ est contractile.

Théorème : *Si A et B sont fibrants et α est une équivalence, alors $\text{Ext}(\alpha)$ est fibrant et $\text{ext}(\alpha)$ est une équivalence.*

Si on a une structure de composition c_A pour A et c_B pour B et une structure d'équivalence e_α pour α , alors on construit, de manière naturelle en Γ , une structure de composition $\text{Ext}(c_A, c_B, e_\alpha)$ pour $\text{Ext}(\alpha)$ et une structure d'équivalence $\text{ext}(c_A, c_B, e_\alpha)$ pour $\text{ext}(\alpha)$.

La preuve est effective et peut être faite dans une méta-théorie faible.

Définition des types fibrants

Si A dans $\mathbf{Type}(\Gamma)$ on a deux définitions *classiquement* équivalentes pour A d'être fibrant

- (1) $\mathbf{isFib}(A)$: pour $\rho : [n] \rightarrow \Gamma$ tout élément partiel d'étendue $\Delta^k[n]$ admet une extension totale
- (2) il y a un élément dans $\mathbf{Comp}(\Gamma, A)$ (ou de manière équivalente dans $\mathbf{Fill}(\Gamma, A)$)

En utilisant la définition (2), on peut montrer de manière constructive la clôture par les opérations $\Pi_A B$, $\Sigma_A B$, $a \equiv_A b$

Univers et définition des types fibrants

On définira $\overline{U}_i(X, \rho)$ comme l'ensemble des éléments U_i -petits de $\mathbf{Type}(X)$ qui sont fibrants.

Si A dans $\mathbf{Elem}(\Gamma, \overline{U}_i)$ on définit $(T_i A)(X, \rho)$ comme l'ensemble $A(X, \rho)(X, \text{id})$.

Pour montrer que $T_i A$ est *fibrant*, on doit utiliser la définition $\mathbf{isFib}(\Gamma, T_i A)$

(1) tout élément partiel d'étendue $\Delta^k[n]$ admet une extension totale

On a donc besoin des définitions (1) et (2), mais l'équivalence de (1) et (2) se montrent seulement dans une méta-théorie classique.

Univers et définition des types fibrants

La construction de l'extension d'une équivalence partielle de codomaine fixé en une équivalence totale permet alors de montrer l'univalence sous la forme

Théorème : *Pour $A : \overline{U}_i$, le type $\Sigma_{X:\overline{U}_i} X \simeq A$ est contractile*

Comme on a une flèche $X \equiv_{\overline{U}_i} A \rightarrow X \simeq A$ on en déduit

Corollaire : *On peut construire un élément de $\mathbf{Comp}(1, \overline{U}_i)$.*

Ceci donne une preuve nouvelle que $\overline{U}_i$ est fibrant. (La première preuve de Voevodsky de ce fait utilisait la notion de fibration minimale.)

Univers et définition des types fibrants

Le problème pour montrer que $T_i A$ est fibrant avec la définition (2) est que $X \times [1]$ n'est pas *représentable* en général.

Ceci n'est plus un problème si l'on part de la catégorie $\square$ des ensembles ordonnés finis non vides. Alors $X \times [1]$ est représentable si X est représentable et on peut alors aussi utiliser la définition (2) pour construire les univers.

On construit alors un modèle de l'univalence dans une méta-théorie constructive.

On peut alors en déduire une structure de modèle de Quillen sur les préfaisceaux sur $\square$.

Univers et définition des types fibrants

Pour la catégorie $\square$, on peut construire une opération $C(A)$ dans $\mathbf{Type}(\Gamma)$ pour A dans $\mathbf{Type}(\Gamma)$, naturelle en Γ telle que $\mathbf{Elem}(\Gamma, C(A))$ et $\mathbf{Comp}(\Gamma, A)$ soit en bijection naturelle.

Pour le modèle simplicial, si on définit $C(A)(X, \rho)$ comme l'ensemble $\mathbf{Comp}(X, A\rho)$, alors la flèche canonique $\mathbf{Comp}(\Gamma, A) \rightarrow \mathbf{Elem}(\Gamma, C(A))$ n'est pas une bijection en général.

Pour le modèle simplicial, on doit donc définir $C(A)(X, \rho)$ comme la proposition $\mathbf{isFib}(X, A\rho)$, et alors $\mathbf{Elem}(\Gamma, C(A))$ si, et seulement si, $\mathbf{isFib}(\Gamma, A)$.

Dans les 2 cas, le modèle de l'univalence est un *modèle interne* du modèle des préfaisceaux.

Reformulation « interne »

Pour vérifier la correction de ce modèle, il est pratique d'utiliser le langage de la théorie des types.

On a alors des types $[1]$ (interval) et Φ (sous-type de Ω).

Si $p : \Omega$ on a un sous-singleton $T(p)$.

Si A est un type, un élément partiel de A est alors un couple ψ, u avec $\psi : \Phi$ et $u : A^{T(\psi)}$.

On a alors une définition « interne » de $\text{Fill}(\Gamma, A)$ comme étant le type des opérations c , qui prennent en argument $\gamma : \Gamma^{[1]}$ et $\psi : \Phi$ et $u : \prod_{x:[1]} T(x = i \vee \psi) \rightarrow A(\gamma x)$ et produisent un élément $c \psi u : \prod_{x:[1]} A(\gamma x)$ qui étendent u .

Reformulation « interne »

On peut alors montrer de manière interne

$$\text{Fill}(\Gamma, A) \rightarrow \text{Fill}(\Gamma.A, B) \rightarrow \text{Fill}(\Gamma, \Pi_A B)$$

$$\text{Fill}(\Gamma, A) \rightarrow \text{Fill}(\Gamma.A, B) \rightarrow \text{Fill}(\Gamma, \Sigma_A B)$$

On construit aussi $C(A)$, et on a une flèche

$$\text{Elem}(\Gamma, C(A)) \rightarrow \text{Fill}(\Gamma, A)$$

mais c'est un isomorphisme seulement pour Γ, A définis *globalement*.

Reformulation «interne»

Cette reformulation interne a été formalisée dans Agda

Axioms for Modelling Cubical Type Theory in a Topos, I. Orton et A. Pitts (2017)

Internal Universes in Models of Homotopy Type Theory. I. Orton, D. Licata, A. Pitts et B. Spitters (2018)

La deuxième formalisation utilise une modalité co-monadique pour définir l'opération $C(A)$.

On peut comparer ces arguments internes à des preuves «en terme de diagrammes»

A 2-categorical proof of Frobenius for fibrations defined from a generic point, S. Hazratpour, E. Riehl (2024).

Modèles constructifs de l'univalence

On peut présenter ces modèles constructifs de l'univalence comme une extension de la théorie des types de Martin-Löf.

Par exemple, le modèle construit sur $\square$ correspond à des calculs sur une extension « nominale » du λ -calcul, c'est ce qui est présenté dans *Cubical Type Theory: a constructive interpretation of the univalence axiom*, C. Cohen, Th. C., S. Huber, A. Mörtberg (2015).

Nous avons construit une implémentation d'un tel système, par exemple <https://github.com/simhu/cubical>; cette extension est maintenant disponible dans le système Agda.

L'extension de ce modèle aux *types inductifs d'ordre supérieur* a suggéré une *décomposition* de l'opération de composition. Cette décomposition permet de donner un modèle de ces types pour le modèle simplicial, ce qui était un problème ouvert, par exemple pour l'opération de suspension comme opération $U_i \rightarrow U_i$.

Décomposition de l'opération de composition

On peut décomposer l'opération de composition, comme

-composition *homogène*, pour $\Theta \times [1] \rightarrow \Gamma$ de la forme $\Theta \times [1] \rightarrow \Theta \rightarrow \Gamma$. On note $\mathbf{hComp}(\Gamma, A)$ l'ensemble de ces opérations.

-*transport* : opération qui prend $\gamma : \Theta \times [1] \rightarrow \Gamma$ et a_0 dans $\mathbf{Elem}(\Theta, A\gamma\epsilon_0)$ et produit un élément de $\mathbf{Elem}(\Theta, A\gamma\epsilon_1)$ (et opération similaire en interchangeant 0 et 1). On note $\mathbf{Transp}(\Gamma, A)$ l'ensemble de ces opérations.

On peut alors construire par exemple $\mathbf{hComp}(\Gamma, A) \rightarrow \mathbf{hComp}(\Gamma, \mathbf{susp} A)$ et $\mathbf{Transp}(\Gamma, A) \rightarrow \mathbf{Transp}(\Gamma, \mathbf{susp} A)$ de manière naturelle en Γ .

On Higher Inductive Types in Cubical Type Theory, Th. C. et S. Hubert et A. Mörtberg (2018).

Conclusion

Ceci donne une interprétation nouvelle de l'égalité

Dans une méta-théorie constructive, ces modèles ne semblent seulement donner une justification « propositionnelle » de la loi de calcul de l'égalité.

En utilisant des notions de structure de modèle de Quillen, A. Swan a pu montrer comment modifier cette interprétation pour justifier cette loi

Identity Types in Algebraic Model Structures and Cubical Sets, A. Swan (2018).