Espaces d'Eilenberg-MacLane

Thierry Coquand

COLLÈGE
DE FRANCE
1530

Plan

Dans cette leçon, je veux d'abord présenter deux résultats de base qui peuvent se formuler en logique d'ordre supérieur et ont deux preuves possibles, soit en utilisant principe du choix unique tel que formulé par Church, soit en utilisant le principe du choix unique pour unique à isomorphisme près.

Le deuxième argument ne peut donc pas se formuler en logique d'ordre supérieur, mais il peut se formuler en théorie des types dépendants avec l'univalence.

Je présente ensuite une définition possible récursive des espaces d'Eilenberg-MacLane.

Faisceaux

Dans les années 60, il y a eu une convergence assez surprenante entre les travaux en géométrie algébrique et la logique intuitionniste.

Étude des *faisceaux* en géométrie algébrique

P. Deligne *Cohomologie étale : les points de départ* (1977)

Étude des *faisceaux* en logique intuitionniste, généralisant les travaux de Beth (1955)

Extending the topological interpretation to intuitionistic analysis D. Scott (1968)

D. Scott et Lawvere ont aussi remarqué que la logique d'ordre supérieur *intuitionniste* (version intuitionniste de la théorie de Church 1941) avait une sémantique naturelle en termes de faisceaux. Le papier *A proof of the independence of the continuum hypothesis* (1967) a joué un rôle important.

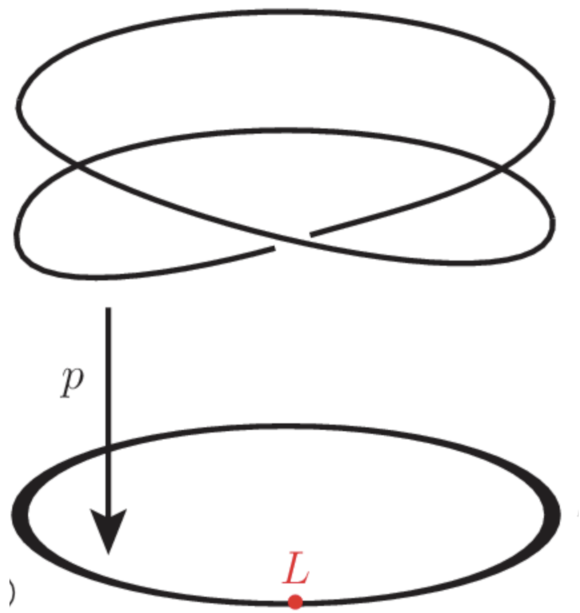
Faiseaux et théorie des types simples

Un faisceau F sur un espace topologique est un *préfaisceau*, c'est-à-dire une collection d'ensembles $F(U)$ avec une opération de restriction $F(U) \to F(V)$ pour $V \subseteq U$, satisfaisant une condition de *recollement*.

Si on a un recouvrement ouvert U_i de U et des éléments locaux a_i dans $F(U_i)$, alors on peut recoller ces éléments en un élément global *à condition* que ces éléments soient compatibles, c'est-à-dire que a_i et a_j coïncident lorsqu'ils sont restreints à $U_i \cap U_j$.

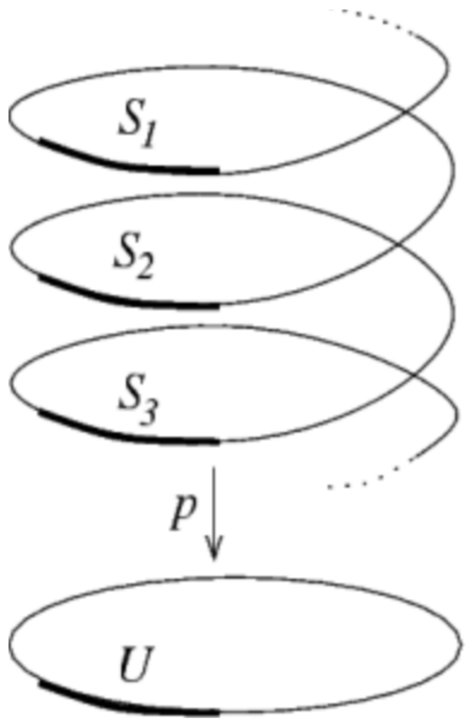
Par exemple, $F(U)$ peut être l'ensemble des sections continues d'une application $p : E \to B$.

Ruban de Möbius



Il y a seulement des sections *locales* et pas de sections *globales*

Hélice



Il y a seulement des sections *locales* et pas de sections *globales*

Modèles de faisceaux et logique d'ordre supérieur

Grothendieck a réalisé que la collection de 《tous》 les faisceaux sur un espace présente une forte similarité avec la collection de 《tous》 les ensembles, mais pour une version intuitionniste.

On peut définir le produit $A \times B$ de deux faisceaux, ou l'espace des fonctions B^A.

Il existe un faisceau particulier Ω qui joue le rôle d'espace des valeurs de vérité; $\Omega(U)$ est l'ensemble des *cribles* sur U. (Grothendieck appellera Ω l'《objet de Lawvere》.)

En général, la loi du *tiers exclu* peut ne pas être valable : la négation de U est l'interieur de son complémentaire et si la frontière $\overline{U} - U$ n'est pas vide, alors le tiers exclu n'est pas vérifiée pour U.

L'*axiome du choix* peut également ne pas être valable.

(Avec l'axiome d'extensionalité, l'axiome du choix entraine le tiers exclu.)

Modèles de faisceaux et logique d'ordre supérieur

D. Scott, en reformulant la notion de forcing à l'aide de *modèles à valeurs booléennes*, perçut le lien entre cette technique non seulement avec les modèles de Kripke, mais aussi avec les travaux de l'école de Grothendieck.

Il réalisa également que le formalisme de la *logique d'ordre supérieur*/théorie des types simples de Church est remarquablement bien adapté pour décrire ce qui se passe dans les modèles de faisceaux.

Bien que l'axiome du choix puisse ne pas être valide, l'axiome de choix 《unique》 est toujours satisfait.

Modèles de faisceaux et logique d'ordre supérieur

A Formulation of the Simple Theory of Types, A. Church, 1941

L'axiome 9 est l'axiome du choix ⟪unique⟫ $\psi(x) \wedge (\forall_y \; \psi(y) \to y = x) \to \psi(\iota(\psi))$

Il peut se reécrire comme $(\exists!_x \psi(x)) \to \psi(\iota(\psi))$

L'axiome 10 est l'axiome d'extensionalité pour les fonctions

L'axiome 11 est l'axiome du choix $\psi(x) \to \psi(\epsilon(\psi))$

Il peut se reécrire comme $(\exists_x \psi(x)) \to \psi(\epsilon(\psi))$

Modèles de faisceaux et logique d'ordre supérieur

Soit F un faisceau sur un espace topologique X et $\psi : F \to \Omega$ une transformation naturelle.

Dans le modèle des faisceaux, $\exists_{x:F}\psi(x)$ signifie que l'on peut trouver *localement* a_i dans $F(U_i)$ qui satisfait $\psi(a_i)$

En général, les éléments a_i peuvent ne pas être *compatibles* et il peut ne pas être possible de les ⟪recoller⟫ en un élément *global* qui satisfait ψ.

Mais c'est possible si on a l'existence *unique* : les éléments a_i sont alors nécessairement *compatibles*.

L'axiome du choix *unique* est donc valide dans un modèle de faisceaux, alors que l'axiome du choix peut ne pas être valide.

Torseur

Pour l'hélice H, on n'a pas d'élément global $1 \to H$.

C'est un exemple d'un $\mathbb{Z}$-*torseur*.

Si G est un faisceau de groupe G, un G-torseur est un faisceau T muni d'une action $T \times G \to T$ telle que, localement, T muni de cette action soit isomorphe à G muni de l'action canonique $G \times G \to G$ par translation.

(Une intuition peut être : espace affine, sans origine fixée vs espace vectoriel.)

Le ruban de Möbius M définit un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-torseur

M n'a pas d'élément global; c'est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-torseur *non trivial*.

Torseur et groupe de cohomologie

Si G est un faisceau de groupe $H^1(X, G)$ peut être défini comme l'ensemble des G-torseurs à isomorphisme près.

On peut montrer $H^1([0,1], \mathbb{Z}) = 0$ et $H^1(S_1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $H^1(S_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Cela veut dire que sur S_1, il n'y a que deux $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-torseurs à isomorphisme près.

Torseurs

Lemme : *Tout morphisme entre deux G-torseurs est un isomorphisme.*

Localement, $T(U_i) \to T'(U_i)$ a un inverse *unique*.

On peut donc recoller ces inverses pour obtenir un inverse défini *globalement* $T' \to T$

La collection des G-torseurs forment donc un *groupoïde* BG.

Il y un objet T_G qui est G muni de la G-action par translation.

T_G est le G-torseur ⟪trivial⟫. Chaque G-torseur est *localement* isomorphe à T_G.

Lemme : *Le groupe $Aut(T_G)$ des automorphismes de T_G est exactement G.*

Torseurs

Lemme : *Si nous avons un morphisme* $f : G \to H$, *nous pouvons construire un foncteur* $BG \to BH$ *envoyant* T_G *sur* T_H *et qui induit* f *via* $Aut(T_G) \to Aut(T_H)$

Si T est un G-torseur et $f : G \to H$, comment définir le H-torseur correspondant $f(T)$?

Deligne fournit une preuve en deux lignes de l'existence de ce foncteur dans *Le symbole modéré*, 5.2-3 (1991).

Torseurs

L'idée clef est de définir $f(T)$ *conjointement avec* une application $\alpha : T \to f(T)$ telle que

$$\alpha(t \cdot x) = \alpha(t) \cdot f(x)$$

Ce couple $(f(T), \alpha)$ *est déterminé à isomorphisme* unique *près*

De plus, ce couple existe localement

Il est alors possible de recoller ces données locales, *car* elles sont uniquement déterminées

Techniquement, le recollement est un peu plus subtil que pour un faisceau, c'est un exemple de recollement pour les *champs*.

Torseurs

La preuve dans *Cohomologie non abélienne*, J. Giraud (1971) est différente

Giraud construit directement $f(T)$ en prenant $T \times H$ quotienté par la relation

$$(t \cdot g, h) \sim (t, f(g) \cdot h)$$

C'est un H-torseur par l'action $(t, h_0) \cdot h_1 = (t, h_0 \cdot h_1)$ et on a une application $\alpha : T \to f(T),\ t \mapsto (t, 1)$ qui vérifie $\alpha(t \cdot g) = \alpha(t) \cdot f(g)$.

On peut alors montrer que ceci définit un foncteur $BG \to BH$ qui est un ⟪débouclage⟫ de f.

Torseurs

La preuve de Giraud s'écrit en théorie des types simples; elle utilise une opération de quotient qui se définit bien dans ce formalisme.

Mais la preuve de Deligne, qui utilise un principe du choix unique, pour lequel *unique* signifie *unique à isomorphisme unique près*, ne peut pas s'écrire en théorie des types simples/logique d'ordre supérieur.

Voici ce qu'écrit Deligne :

Si T est un G-torseur et $f : G \to H$ un morphisme, $f(T)$ est défini. C'est un H-torseur muni de $f : T \to f(T)$ vérifiant $f(tg) = f(t)f(g)$ et ceci le caractérise à isomorphisme unique près.

Si on veut capturer cet argument dans un système formel, on peut utiliser la théorie des types dépendants avec univalence.

Théorie des Types Dépendants

Nous pouvons définir ce qu'est un *groupe* G dans un univers U donné.

Ce doit être un *ensemble*/0-type muni d'une opération binaire vérifiant les lois usuelles.

Si A est un 1-type et a élément de A, alors $a \equiv_A a$ a une structure de groupe pour la composition de chemins.

Nous pouvons former la collection de tous les groupes (dans un univers donné) et *prouver* que c'est un 1-type/groupoïde (en utilisant l'univalence).

Torseurs en Théorie des Types Dépendants

Si G est un groupe, nous pouvons alors définir le type BG des G-torseurs :

$$BG \ := \ \Sigma_{T:U} \, \|T\| \times \Sigma_{a:T\times G\to T}\psi(T,a)$$

où $\psi(T,a)$ est une proposition/type exprimant que a est une action de G telle que $T\times G \to T\times T$ soit une bijection.

On peut *prouver* en théorie des types que BG est un *groupoïde*.

Torseurs en Théorie des Types Dépendants

L'argument de Deligne peut alors s'exprimer directement en théorie des types.

Étant donné un morphisme de groupes $f : G \to H$ et $T : BG$, nous pouvons considérer :

$$S(T) \ := \ \Sigma_{T' : BH} \, \Sigma_{\alpha : T \to T'} \, \Pi_{t:T} \Pi_{x:G} \, \alpha(t \cdot x) \equiv \alpha(t) \cdot f(x)$$

Nous montrons que ce type est *contractile* en suivant de près l'argument de Deligne.

Ainsi, ce type, qui ressemble à un type de structure, est en fait un type singleton.

Torseurs en Théorie des Types Dépendants

En effet, être contractile est une *proposition*, donc $\psi = \text{isContr } S(T)$ est une proposition.

Par conséquent, pour prouver qu'un type donné $S(T)$, où T est un G-torseur, est contractile, nous pouvons supposer que T possède un élément.

Ceci parce que $T \to \psi$ équivaut à $\|T\| \to \psi$ puisque ψ est une proposition.

Torseurs en Théorie des Types Dépendants

Nous sommes alors dans le cas où T est le G-torseur trivial, et dans ce cas le fait que :

$$S(T) \ := \ \Sigma_{T':BH} \, \Sigma_{\alpha:T_G \to T'} \, \Pi_{t:T_G} \Pi_{x:G} \, \alpha(t \cdot x) \equiv \alpha(t) \cdot f(x)$$

soit contractile, c'est-à-dire qu'il est habité et est une proposition, découle de *l'univalence*.

Dans l'argument de Deligne, cela correspond au fait que deux éléments quelconques T'_1, α_1 et T'_2, α_2 sont isomorphes, avec un unique isomorphisme.

Ainsi, nous avons pu représenter un argument utilisant l'axiome de description où l'unicité signifie unique à unique isomorphisme près.

Torseurs en Théorie des Types Dépendants

BG est un exemple de type avec un point de base T_G.

On note $U_{pb} = \Sigma_{X:U} X$ le type des types «pointés».

Si (A, a) et (B, b) sont dans U_{pb} on note $(A, a) \rightarrow_{pb} (B, b)$ le type

$$\Sigma_{u:A \rightarrow B}\; u\; a \equiv_B b$$

Torseurs en Théorie des Types Dépendants

On rappelle $S(T) = \Sigma_{T':BH}\Sigma_{\alpha:T\to T'}\ \Pi_{t:T}\Pi_{x:G}\ \alpha(t\cdot x) \equiv \alpha(t)\cdot f(x)$

On vient de montrer que $S(T)$ est toujours contractile.

D. Wärn a remarqué que $\Pi_{T:BG}S(T)$ est en fait la *fibre* de f pour l'application boucle

$$(BG \to_{pb} BH) \to \mathsf{Hom}(G,H), \quad F \mapsto \Omega(F)$$

en identifiant $T_G \equiv T_G$ et G (resp. $T_H \equiv T_H$ et H).

Torseurs

Par contre, le résultat que tout morphisme entre deux G-torseurs est un isomorphisme se traduit bien directement en logique d'ordre supérieur.

Si $\alpha : T \to T'$ est un morphisme de G-torseur alors on montre la *proposition*

$$\psi \ := \ \exists!_{\beta : T' \to T} \ (\beta \circ \alpha \equiv \mathsf{id}_T \wedge \alpha \circ \beta \equiv \mathsf{id}_{T'})$$

en utilisant $\exists_{x:T} \top$, qui est la manière d'exprimer que T est non vide en logique d'ordre supérieur.

Si on a $a : T$ alors on peut utiliser a pour donner un isomorphsime $\alpha_a : T_G \to T$. En utilisant $\alpha(a) : T'$ on a un isomorphisme $\alpha'_a : T_G \to T'$. Comme on a $\alpha \circ \alpha_a = \alpha'_a$ on en déduit l'existence d'un inverse de α, soit $\alpha'_a \circ \alpha_a^{-1}$.

Comme cet inverse est unique, on peut l'obtenir explicitement avec l'opérateur ι (il ne dépend pas du choix de l'élément a).

COLLÈGE DE FRANCE 1530

Groupe de Picard et torseurs

Voici un autre exemple, aussi dû à Deligne, d'une preuve qui utilise le principe du choix unique où l'unicité est à isomorphisme unique près.

Dans *Cohomologie étale : les points de départ* (1977), Deligne montre que si R est un faisceau d'anneau, alors le *groupoïde de Picard* (groupoïde des R-modules localement libre de rang 1) et le groupoïde des $R^\times$-torseurs sont équivalents.

Ce résultat est aussi dans ⟪Stacks⟫, Lemma 21.6.1, mais avec une preuve qui utilise une construction explicite qui ne nécessite pas ce principe du choix unique.

Groupe de Picard et torseurs

En théorie des types, on peut exprimer les deux arguments et l'argument de Deligne peut être exprimé de la manière suivante.

Soit $Mod(R)$ le groupoïde des R-modules et R^1 le R-module libre de rang 1.

Alors $R^1 \equiv_{Mod(R)} R^1$ est égal à $R^\times$.

$L = \Sigma_{M:Mod(R)} \|M \equiv R^1\|$ représente le type des R-modules localement libres de rang 1.

Lemme : $L \to BR^\times \qquad M \mapsto (M \equiv R^1)$ *est une équivalence.*

L'argument dans Stacks construit explicitement par un quotient un R-module à partir d'un $R^\times$-torseur.

Torseurs en théorie des types dépendants

Lemme : *Si A est un groupoïde et $a : A$, soit L_a le type $\Sigma_{x:A} \|x \equiv a\|$. L'application*

$$L_a \to B(a \equiv a) \qquad x \mapsto (x \equiv a)$$

est une équivalence.

Pour chaque $(a = a)$-torseur T, la fibre $\Sigma_{(x,p):T_a} T \equiv (x \equiv a)$ est *contractile*.

L'argument de Deligne se traduit dans l'argument suivant : il suffit de le montrer quand T est le torseur trivial $a \equiv a$. La preuve est directe dans ce cas.

Une fois de plus, la clef est que être contractile est une *proposition* et que tout torseur T vérifie $\|T \equiv (a \equiv a)\|$. Sémantiquement, tout torseur est *localement* trivial.

Torseurs et cohomologie

Les torseurs peuvent être utilisés pour définir $H^1(X, L)$; ceci se généralise si L est abélien pour $H^2(X, L)$ en utilisant la notion de *gerbe*, et en fait, comme on va le voir, pour tout $H^n(X, L)$.

Le langage des torseurs et des gerbes est essentiellement équivalent à celui des cocycles de Cech. Il est plus commode et plus intrinsèque si l'on accepte de parler d'objet défini à isomorphisme unique près, de catégorie définie à équivalence unique à isomorphisme unique près, et de recollement de champs.

Stratification des types

On rappelle la stratification introduite par Voevodsky :

(-2)-type : contractile

$(n+1)$-type : pour tout a_0 et a_1 dans A, le type $a_0 \equiv_A a_1$ est n-type

On a vu que tout n-type est aussi un $(n+1)$-type

On peut introduire une autre stratification :

(-2)-connexe : tout type est (-2)-connexe

$(n+1)$-connexe : on a $\|A\|$ et pour tout a_0 et a_1 dans A, le type $a_0 \equiv_A a_1$ est n-connexe

Tout $(n+1)$-connexe type est un n-connexe type.

0-connexe correspond intuitivement à connexe par arc, et 1-connexe à simplement connexe.

Stratification des types

Soit $K_1(U)$ le type des 1-types pointés dans U qui sont 0-connexes.

Soit $\mathsf{Grp}(U)$ la collection des groupes dans U.

Le même argument qu'on a présenté pour les torseurs montre que l'application boucle

$$K_1(U) \to \mathsf{Grp}(U) \qquad\qquad (A, a) \mapsto a \equiv_A a$$

est *pleinement fidèle*.

C'est aussi une application *essentiellement surjective* car $\Omega(BG, T_G)$ est G

C'est donc une *équivalence*

Le type $K_1(U)$ est donc équivalent au type des groupes dans U.

Torseurs en théorie des types dépendants

On peut donc reformuler la théorie des groupes en travaillant avec les 1-types pointés qui sont 0-connexes et les applications pointées.

On n'a jamais besoin de définir la notion de groupe de manière algébrique.

C'est le point de vue adopté dans le livre *Symmetry* https://unimath.github.io/SymmetryBook/book.pdf, M. Bezem, U. Buchholtz, P. Cagne, B. I. Dundas, D. R. Grayson

La plupart des résultats de ce livre sont formalisés dans Agda.

Torseurs en théorie des types dépendants

Soit A un 1-type qui est 0-connexe.

La propriété pour $a \equiv_A a$ d'être *abélien* est équivalente à la propriété que A est *homogène* : $\Pi_{x:A}(A, a) \equiv (A, x)$.

Torseurs en théorie des types dépendants

D. Wärn a généralisé cet argument pour donner une preuve nouvelle du résultat suivant

Théorème: *Si* A *est* n*-connexe et* B $(2n)$*-type alors pour* a *dans* A *et* b *dans* B*, l'application*

$$((A,a) \to_{pb} (B,b)) \to (\Omega(A,a) \to_{pb} \Omega(B,b))$$

est une équivalence

Cf. *Eilenberg-MacLane spaces and stabilisation in homotopy type theory*, (2022).

Une preuve un peu différente a été formalisée par L. Leclerc dans Agda (2022).

Cohomology in Homotopy Type Theory, (2022).

Lemmes clefs

On utilise juste deux lemmes

Lemme 1 : *Si A est n-connexe et B est un n-type, alors l'application $B \to B^A,\ b \mapsto (x \mapsto b)$ est une équivalence.*

Lemme 2 : *Si A est n-connexe avec a and A et $P(x)$ famille de $(n+k+1)$-types sur A, alors toutes les fibres de l'application d'évaluation $(\Pi_{x:A}P(x)) \to P(a)$ sont des k-types.*

Cas particulier : si $k = -2$, alors les fibres sont contractiles, et l'application d'évaluation est une équivalence. C'est le cas de base du Lemme 2, qui est une application directe du Lemme 1 en écrivant l'évaluation comme composition

$$(\Pi_{x:A}P(x)) \to (\Pi_{x:A}P(x)^{a\equiv x}) \to P(a)$$

Lemmes clefs

Voici le lemme 1 dans Agda (tel que formalisé par L. Leclerc).

D'abord la définition d'être n-connexe

```
{- Recursive definition of n-connectedness -}
is_connected : N-2 -> (Type i) -> (Type i)
is <-2> connected A = unit
is (S n) connected A =
|| A || x ((a0 a1 : A) -> is n connected (a0 == a1))
```

Lemmes clefs

```
  lemma-1 :
(A : Type i) (B : Type j) (n : N-2) -> is n connected A
 -> has-level n B -> is-equiv (\ (b : B) (_ : A) -> b)

lemma-1 A B <-2> _ is-contr-B = ...
lemma-1 A B (S n) (merely-A , hA) hB =
  || ||-rec is-equiv-is-prop lemma merely-A
  where
    q : (f : A -> B) (a x : A) -> f a == f x
    q f a x = is-equiv.g
                 (lemma-1 (a == x) (f a == f x) n (hA _ _)
                          (has-level-apply hB _ _))
                 (ap f)
    lemma : A -> is-equiv (\ (b : B) (_ : A) -> b)
    lemma a = is-eq (\ b _ -> b) (\ f -> f a) (\ f -> \= (q f a)) (\ _ -> idp)
```

Lemmes clefs

Lemme 2 : *Si A est n-connexe avec a and A et $P(x)$ famille de $(n+k+1)$-types sur A, alors toutes les fibres de l'application d'évaluation $(\Pi_{x:A}P(x)) \to P(a)$ sont des k-types.*

Il peut se reformuler de la manière suivante.

Lemme 2 : *Si A est n-connexe avec a and A et $B(x)$ famille de $(n+k+1)$-types sur A, et b dans $B(a)$, alors $\Sigma_{u:\Pi_{x:A}B(x)} u\ a \equiv b$ est un k-type.*

Pour $k = 0$, on obtient le cas particulier.

Corollaire : *Si A, a est un type pointé n-connexe et B, b un $(n+1)$-type pointé, alors*

$$(A, a) \to_{pb} (B, b)$$

est un 0-type (i.e. un ensemble).

Débouclage

Soit $K_n(U)$ le type des n-types pointés $(n-1)$-connexes avec $n > 0$.

On rappelle que U_{pb} est le type des types avec un point base $\Sigma_{X:U} X$.

L'application de boucle définit une application $\Omega : K_n(U) \to K_{n-1}(U)$

Le raisonnement précédent se généralise en une preuve que c'est une application pleinement fidèle.

Débouclage

Un type pointé ne peut pas toujours se ⟪débouclerr⟫.

Par exemple, BG, T_G ne peut pas se déboucler si G n'est pas commutatif, car en général, $\pi_2(A, a)$ est commutatif.

D. Wärn donne une condition *suffisante* pour un type pointé (A, a) de pouvoir de déboucler.

Soit $D\ (A, a) = \Sigma_{X:U} \|X\| \times \Pi_{x:X}(X, x) \equiv_{U_{pb}} (A, a)$; un élément de $D\ (A, a)$ est de la forme X, h, μ.

Lemme : *Si* $\Sigma_{(X,h,\mu):D\ (A,a)}\ X$ *est* contractile *alors* $D\ (A, a)$ *est un débouclage de* (A, a)*; on a un point* $pb : D\ (A, a)$ *tel que* $\Omega(D\ (A, a), pb) \equiv (A, a)$.

Débouclage

Cette condition peut s'analyser au moyen de la caractérisation suivante.

Lemme : *On a* $(\Sigma_{(X,h,\mu):D\ (A,a)}\ X) \equiv \Sigma_{\mu:\Pi_{x:A}(A,x)\equiv(A,a)}\ \mu\ a \equiv \mathsf{refl}$

Corollaire : *Pour tout* $(2n)$*-type pointé* n*-connexe* (A,a)*, le type des débouclages de* (A,a) *est contractile.*

Ceci permet de définir $K(L,n)$ pour L groupe abélien, par induction sur n, en prenant $K(L,1)$ le type des L-torseurs, et $K(L,n+1)$ de type $D\ (K(L,n),pb)$. C'est un n-type qui est $(n-1)$-connexe.

En utilisant le *principe de remplacement*, on peut prendre $K(L,n) : U$ si $L : U$.

Débouclage

On en déduit le résultat général suivant

Théorème : *L'application de boucle* $\Omega : K_n(U) \to K_{n-1}(U)$ *est une* équivalence *pour* $n > 2$.

De plus tous ces types sont équivalents au type $\mathsf{Ab}(U)$ des groupes *abéliens* dans U.

Tous ces types peuvent être munis d'une structure de *catégorie* (au sens de la leçon précédente).

Pour les groupes abéliens, on prend la notion de morphisme usuel, et pour $K_n(U)$, on prend les *applications pointées*. Il est un peu surprenant que tous les types $K_n(U)$ sont en fait des 1-types.

Espaces d'Eilenberg-MacLane

Pour L groupe abélien, on écrit $K(L, n)$ l'objet correspondant dans $K_n(U)$.

C'est l'espace d'Eilenberg-MacLane associé à L.

(Tout ceci est effectif si on a un modèle constructif de la théorie des types.)

Caractérisation universelle de $K(L,n)$

Donner une application $K(L,n) \to_{pb} (A,a)$ pour un n-type A est équivalent à donner une application $\Omega(K(L,n)) \to_{pb} \Omega(A,a)$, i.e. $K(L,n-1) \to \Omega(A,a)$.

C'est équivalent à $K(L,n-2) \to_{pb} \Omega^2(A,a)$, jusqu'à avoir un élément de $\mathsf{Hom}(L,\Omega^n(A,a))$ où $\Omega^n(A,a)$ dénote le $n$ième bouclage de A muni de sa structure de *groupe* (abélien).

L'application Ω^n donne donc une bijection entre les ensembles $K(L,n) \to_{pb} (A,a)$ et $\mathsf{Hom}(L,\Omega^n(A,a))$

Application

La sphère (S_n, b) a une caractérisation universelle : l'application Ω^n est une équivalence entre $(S_n, b) \to_{pb} (A, a)$ et le type $\Omega^n(A, a)$

$K(\mathbb{Z}, n)$ satisfait la même caractérisation universelle mais pour les n-*types pointés*

En utilisant le fait que $B^A \equiv \Sigma_{y:B}(A, a) \to_{pb} (B, y)$, on en déduit

Corollaire : $K(\mathbb{Z}, n)$ *est la* n*th troncature de* S_n.

Par exemple, il en résulte que S_2 est 1-connexe.

Corollaire : $\pi_k(S_n, b) = 0$ *si* $k < n$ *et* $\pi_n(S_n, b) = \mathbb{Z}$

Cet argument est dû à D. Wärn. La preuve dans le livre HoTT utilise le Théorème de suspension de Freudenthal. La première preuve, formalisée dans Agda et due à G. Brunerie et D. Licata, utilisait la méthode 《encode-decode》. En fait, la motivation pour prouver ce résultat était de *définir* $K(\mathbb{Z}, n)$ comme la $n$ième troncature de S_n.

Groupe de cohomologie

Si X est un type *quelconque* et $L : X \to \mathsf{Ab}(U)$ alors on définit $H^n(X, L)$, le $n$ième groupe de cohomologie à valeur dans L, comme la *troncation ensembliste de* $\Pi_{x:X} K(L\ x, n)$.

En général, $\Pi_{x:X} K(L\ x, n)$ est un n-type mais il peut ne pas être 0-connexe.

On peut construire des modèles où des *ensembles* ont des groupes de cohomologie non triviaux.

Suite exacte courte

Théorème : $(A,a) \to_{pb} (B,b) \to_{pb} (C,c)$ *correspond par* Ω^n *à une suite exacte courte si, et seulement si, c'est une suite de fibration.*

Si $0 \to L \to M \to N \to 0$ est une suite exacte courte de groupes abéliens on obtient pour $n > 0$ une suite de fibration $K(L,n) \to_{pb} K(M,n) \to_{pb} K(N,n)$.

On obtient alors une suite *longue* de fibrations, pour tout $n > 0$

$$\dots K(L,n-1) \to_{pb} K(M,n-1) \to_{pb} K(N,n-1) \to_{pb} K(L,n) \to_{pb} K(M,n) \to_{pb} K(N,n)$$

On en déduit la suite exacte longue

$$H^0(X,L) \to H^0(X,M) \to H^0(X,L) \to H^1(X,L) \to H^1(X,M) \to H^1(X,N) \to \dots$$

Cohomologie

Le traitement de cohomologie des faisceaux dans *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Grothendieck (1957) utilise les résolutions injectives des faisceaux et donc repose sur l'axiome du choix.

La technique utilisée est appelée ⟪principe de localisation booléenne⟫ par Joyal dans sa lettre à Grothendieck (1984).

Comme on peut justifier l'univalence de manière constructive, on peut espérer que les techniques présentées dans cette leçon vont permettre un traitement constructif des groupes de cohomologie.

Conclusion

On a des exemples en mathématique où l'on veut utiliser le principe du choix unique, où unique veut dire unique à isomorphisme unique près, ou unique à équivalence unique à isomorphisme unique près, et on peut exprimer ces raisonnements en théorie des types avec univalence.

Les espaces d'Eilenberg-MacLane ont une définition récursive comme débouclage et ceci permet de définir les groupes de cohomologie. Tous ces résultats ont été formalisés et les preuves formelles ne sont pas très éloignées des preuves informelles.