# Modalités et modèles de la théorie des types

Thierry Coquand

COLLÈGE DE FRANCE
1530

# Plan

Dans cette leçon, je vais d'abord montrer comment utiliser le langage de la théorie des types dépendants pour formuler la notion de *faisceaux*.

Ceci donnera des exemples importants de *modalités exactes à gauche* qui permettent de construire des *modèles internes* de la théorie des types avec univalence. Ceci permet de montrer que certains principes sont *indépendants*.

Comme on peut associer des structures de modèles de Quillen à des modèles de l'univalence, ceci permet aussi de construire de nouvelles structures de modèle de Quillen. En particulier, je vais définir une modalité (due à C. Sattler) qui permet de construire un modèle qui a de bonnes propriétés dans une méta-théorie constructive.

## Modèle de préfaisceau

On rappelle comment construire un modèle de préfaisceau sur une catégorie $\mathcal{C}$.

Supposons que $\mathcal{C}$ soit une catégorie dans $\mathcal{U}_0$. On peut associer un *modèle de préfaisceau* sur $\mathcal{C}$

On écrit $X, Y, Z, \ldots$ les objets de $\mathcal{C}$ et $f, g, \ldots$ les flèches de $\mathcal{C}$.

Un contexte sera un préfaisceau sur $\mathcal{C}$ à valeur dans $\mathcal{U}_\omega$, i.e. une collection d'éléments $\Gamma(X)$ de $\mathcal{U}_\omega$ avec des opérations de restriction $\rho \mapsto \rho f,\ \Gamma(X) \to \Gamma(Y)$ pour $f : Y \to X$.

Une substitution $\sigma : \Delta \to \Gamma$ est une transformation naturelle.

Un type $A$ dans Type$(\Gamma)$ sera une famille d'ensembles $A(X, \rho)$ dans $\mathcal{U}_\omega$ avec des opérations de restriction $u \mapsto uf,\ A(X, \rho) \to A(Y, \rho f)$.

Un élément $t$ dans Elem$(\Gamma, A)$ est une section : une famille d'éléments $t(X, \rho)$ dans $A(X, \rho)$ telle que $t(X, \rho)f = t(Y, \rho f)$.

## Modèles de préfaisceaux

On note $Yo(X)$, ou simplement $X$, le préfaisceau représenté par $X$.

On a une stratification $\mathsf{Type}_n(\Gamma)$ de $\mathsf{Type}(\Gamma)$ en imposant $A(X,\rho)$ à être dans $\mathcal{U}_n$.

On définit $U_n(X,\rho) = U_n(X) = \mathsf{Type}_n(Yo(X))$.

Si $a : \mathsf{Elem}(\Gamma, U_n)$, on définit $T_n a : \mathsf{Type}(\Gamma)$ par

$(T_n a)(X,\rho) = a(X,\rho)(X, \mathsf{id}_X)$.

## Modèles de préfaisceaux

Si $A$ dans Type$(\Gamma)$ et $B$ dans Type$(\Gamma.A)$ on définit $\Pi_A B(X,\rho)$ comme l'ensemble des fonctions $l(f,u)$ dans $B(\rho f,u)$ pour $f : Y \rightarrow X$ et $u$ dans $A(Y,\rho f)$, fonctions qui doivent satisfaire

$$l(f,u)g = l(fg,ug) \in B(\rho fg,ug)$$

pour $g : Z \rightarrow Y$.

C'est un raffinement de la définition de l'implication et de l'exponentielle dans les modèles de Kripke.

On a aussi une interprétation d'un égalité $(a \equiv_A b)(X,\rho) = \{0 \mid a(X,\rho) = b(X,\rho)\}$.

Ce n'est pas une égalité ⟪univalente⟫, mais elle vérifie le principe de réflection tel que formulé dans *Intuitionistic Type Theory*, Martin-Löf (1984)

# Éléments partiels

On peut alors utiliser le langage des types dépendants pour décrire ce qui se passe dans le modèle des préfaiceaux.

On définit $\Omega(X)$ comme l'ensemble des *cribles* sur $X$; un crible est un ensemble de flèches de codomaine $X$ clos par composition.

On définit $T$ dans $\mathsf{Type}(\Omega)$ en prenant $T(X,r) = \{0 \mid \mathsf{id}_X \in r\}$.

On a donc un modèle d'une théorie des types avec un type $\Omega$ des ⟪valeurs de vérités⟫ et un type dépendant $T(p)$ pour $p : \Omega$ qui est un sous-singleton. We have $\Pi_{a\ b:T(p)} a \equiv_{T(p)} b$.

Si $A$ est un type, $A^{T(p)}$ représente le type des éléments partiels de $A$ d'étendue $p$. Les éléments de $A^{T(p)}(X,\rho)$ sont en bijection avec les suites $u_f \in A(Y,\rho f)$ pour $f : Y \to X$ dans le crible $p\rho$ satisfaisant $u_f g = u_{fg}$ si $g : Z \to Y$.

## Topologie de Grothendieck et faisceaux

On peut alors exprimer en utilisant ce langage des types dépendants la notion de *topologie de Grothendieck*.

C'est un ensemble des propositions, donc défini par $J : \Omega \to \Omega$ qui intuitivement sont des propositions ⟪larges⟫ (qui correspondent à ce que doit être un recouvrement de l'espace) et $J$ vérifie

$$(1)\ J(\top) \qquad (2)\ J(p) \wedge (p \to q) \to J(q) \qquad (3)\ J(p) \wedge (p \to J(q)) \to J(p \wedge q)$$

La dernière condition est une condition de localité. On peut vérifier que ce système de conditions est équivalent aux conditions de Lawevere-Tierney.

$$(1)\ J(\top) = \top \qquad (2)\ J(p \wedge q) = J(p) \wedge J(q) \qquad (3)\ J(J(p)) = J(p)$$

Cf. *Quantifiers and Sheaves*, F. W. Lawvere, (ICM 1970).

## Topologie de Grothendieck et faisceaux

Un type $A$ est alors un *faisceau* si, et seulement si, la flèche diagonale/constante $K : A \to A^{T(p)}$ est un isomorphisme pour chaque $p$ tel que $J(p)$.

$p$ est un crible, et un élément de $A^{T(p)}(X)$ est donné par une famille $u_f \in A(Y)$ pour $f : Y \to X$ dans le crible $p$ telle que $u_f g = u_{fg}$ pour $g : Z \to Y$.

On retrouve la condition de recollement : étant donnée une telle famille, on peut trouver de manière unique un élément $u$ dans $A(X)$ tel que $u_f = uf$ pour tout $f : Y \to X$ dans le crible $p$.

Cette reformulation de la notion de faisceau est suggestive, et fait la connection avec la notion de *forcing* : on a une collection de proposition $p$ et un faisceau $A$ est un type qui « pense que $p$ est vrai ».

## Topologie de Grothendieck et faisceaux

On a donc une condition $C(A)$ qui exprime que le type $A$ est un faisceau.

On peut alors vérifier que l'on a $(\Pi_{x:A} C(B\ x)) \to C(\Pi_A B)$.

On a aussi $C(A) \to (\Pi_{x:A} C(B\ x)) \to C(\Sigma_A B)$ et $C(A) \to C(a \equiv_A b)$.

Les faisceaux sont donc clos par produits et sommes dépendants et par égalité.

Pour vérifier ces conditions, on n'utilise pas que $T(p)$ soit un sous-singleton.

Comme $T(p)$ est un sous-singleton, $K : A \to A^{T(p)}$ est une bijection dès qu'elle admet un inverse à gauche $r : A^{T(p)} \to A$, i.e. $r\ (K\ u) = u$; c'est la flèche de 《recollement》.

## Topologie de Grothendieck et faisceaux

Est-ce que les faisceaux forment un modèle de la théorie des types ?

Pour avoir un modèle des univers, on doit avoir $C(\Sigma_{X:U} C(X))$.

Est-ce que $K : (\Sigma_{X:U} C(X)) \to (\Sigma_{X:U} C(X))^{T(p)}$ a un recollement ?

On a une famille $A_x, c_x$ pour $x : T(p)$ et on veut construire un faisceau $A, c$.

Un candidat naturel est de prendre $A = \Pi_{x:T(p)} A_x$ qui est bien un faisceau.

Mais si on prend la famille constante $A_x, c_x = A, c$ on obtient $A^{T(p)}$ qui est seulement *isomorphe* et non *égal* à $A$.

C'est un phénomène connu en mathématique : la notion de *recollement de faisceau* est plus subtile, et s'exprime par une condition de cocycle sur des isomorphismes trois par trois; cf. par exemple *Élément de géométrie algébrique I*, A. Grothendieck et J. Dieudonné, Section 3.1.1. (1960).

## Topologie de Grothendieck et faisceaux

C'est la situation pour la théorie des types comme formulée dans *Intuitionistic Type Theory* (1984).

Pour une théorie des types avec univalence, on considère des propositions (dans un univers donné) $p$ satisfaisant une propriété $J(p)$, propositions au sens de Voevodsky.

La propriété $C(A)$ sera que la flèche $K : A \to A^p$ est une *équivalence* pour $p$ vérifiant $J(p)$.

On peut alors prouver que l'on a $(\Pi_{x:A} C(B\ x)) \to C(\Pi_A B)$.

On a aussi $C(A) \to (\Pi_{x:A} C(B\ x)) \to C(\Sigma_A B)$ et $C(A) \to C(a \equiv_A b)$.

Mais cette fois, comme on a l'univalence, et $A^{T(p)}$ est *équivalent* à $A$ il est *égal* à $A$ et on obtient une opération de recollement pour $\Sigma_{X:U} C(X)$.

## Topologie de Grothendieck et univalence

**Théorème :** *Si $J(p)$ est une propriété sur les propositions et on définit $C(A)$ comme étant la propriété que $J(p)$ entraine que $K : A \to A^p$ est une équivalence, alors les types vérifiant $C$ forment un modèle de la théorie des types; de plus ce modèle vérifie l'univalence*

**Remarque :** Ce modèle peut être trivial. Il est non trivial si on a $C(\perp)$ et on a $C(\perp)$ si, et seulement si, $J(p)$ entraine $\neg\neg p$.

Dans une approche 《ensembliste》, la collection des faisceaux (pour un univers donné) ne forment pas un *faisceau*, mais un *champ*; la collection des champs ne forment pas un champ, mais un $2$-champ, et ainsi de suite.

Il est tout à fait remarquable que, dans ce cadre univalent, on a $C(S)$ avec $S = \Sigma_{X:U} C(X)$ :
la collection des $\infty$-faisceaux forment un $\infty$-faisceau.

## Modèles internes, syntaxiquement

On peut définir

$\pi_C : (\Pi_{x:A} C(B)) \to C(\Pi_{x:A} B)$

$\sigma_C : C(A) \to (\Sigma_{x:A} C(B)) \to C(\Sigma_{x:A} B)$

$u^i_C : C(\Sigma_{X:U_i} C(X))$

## Modèles internes, syntaxiquement

$$
\begin{array}{lcl}
[x] & = & x \\
[M\ N] & = & [M]\ [N] \\
[\lambda_{x:A} M] & = & \lambda_{x:[\![A]\!]} [M] \\
 & & \\
[\Pi_{x:A} B] & = & [(\Pi_{x:[\![A]\!]} [B], \pi_C\ (\lambda_{x:[\![A]\!]} [B].2))] \\
[\Sigma_{x:A} B] & = & [(\Sigma_{x:[\![A]\!]} [B], \sigma_C\ [A].2\ (\lambda_{x:[\![A]\!]} [B].2))] \\
[U_i] & = & (\Sigma_{X:U_i} C(X), u^i_C) \\
 & & \\
[\![A]\!] & = & [A].1 \\
 & & \\
[x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n] & = & x_1 : [\![A_1]\!], \ldots, x_n : [\![A_n]\!]
\end{array}
$$

## Modèles internes, application

Si $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n \vdash M : A$ on aura $x_1 : [\![A_1]\!], \ldots, x_n : [\![A_n]\!] \vdash [M] : [\![A]\!]$

C'est ce qui est décrit dans la thèse de K. Quirin
*Lawvere-Tierney sheafification in Homotopy Type Theory* (2016)

En utilisant cette traduction, on peut vérifier que le principe d'univalence est valide dans ce modèle interne.

## Application : Forcing en théorie des types

Un tel modèle est utilisé dans le papier *On Church's Thesis in Cubical Assemblies*, A. Swan et T. Uemura (2019), pour montrer que le principe d'univalence est compatible avec la thèse de Church, formulée avec l'existence 《faible》.

La thèse, formulée avec une existence 《forte》

$$\Pi_{f:N\to N}\Sigma_{e:N}\Pi_{n:N}\Sigma_{k:N}T(e,n,k)\wedge U\ k\equiv f\ n$$

(en utilisant les notations de Kleene), est *incompatible* avec l'extensionnalité pour les fonctions. C'est intuitif : on ne peut pas obtenir un code de manière extensionnelle.

Dans un cadre univalent, on peut énoncer

$$\Pi_{f:N\to N}\ \|\Sigma_{e:N}\Pi_{n:N}\Sigma_{k:N}T(e,n,k)\wedge U\ k\equiv f\ n\|$$

## Application : Forcing en théorie des types

La situation est subtile : si on considère le modèle constructif, construit par réalisabilité, la thèse de Church est (peut-être de manière surprenante) *fausse* dans ce modèle.

La solution est alors de *forcer* la famille de proposition

$$\|\Sigma_{e:N}\Pi_{n:N}\Sigma_{k:N}T(e,n,k) \wedge U\ k \equiv f\ n\|$$

en utilisant que dans ce modèle

$$\neg\neg(\Sigma_{e:N}\Pi_{n:N}\Sigma_{k:N}T(e,n,k) \wedge U\ k \equiv f\ n)$$

La même méthode montre que l'on peut forcer dans ce modèle le principe de Markov

$$\Pi_{\alpha:N\to B}\neg\neg(\Sigma_{n:N}\alpha(n) \equiv \top) \to \Sigma_{n:N}\alpha(n) \equiv \top$$

## Application : Forcing en théorie des types

On peut utiliser cette technique de forcing pour construire un modèle vérifiant la *négation* du principe de Markov.

**Théorème :** *Le principe de Markov est indépendant de la théorie des types avec axiome d'univalence*

Ce résultat est une application de l'utilisation des modèles constructifs de l'univalence.

Le papier *On Church's Thesis in Cubical Assemblies* contient aussi un modèle qui vérifie la *négation* de l'axiome du choix dénombrable

$$\Pi_{P:N\to U}(\Pi_{n:N}\,\|P\ n\|) \to \|\Pi_{n:N} P\ n\|$$

Un autre modèle vérifiant cette négation est construit dans
*Constructive sheaf models of type theory*, Th. C., F. Ruch et Ch. Sattler (2019)

## Modalités

Si $p$ est une proposition, on a une opération $D(X) = X^p$.

C'est un exemple d'une *modalité* (stricte). On a une application $\eta_X : X \to D(X)$ et un type $A$ est $D$-*modal* si, et seulement si $\eta_A$ est une équivalence.

Comme $p$ est une proposition on a $D(\eta_A) \equiv \eta_{D(A)}$ et si $D(A)$ est $D$-modal si $A$ est $D$-modal.

C'est une modalité *exacte à gauche*, qui vérifie que les types modaux forment un nouveau modèle de la théorie des types avec univalence.

## Modalités

M. Shulman a introduit et étudié dès 2012 la notion de modalité en théorie des types dépendants, en formalisant tous les résultats de base.

Cette notion est étudiée en détail dans *Modalities in homotopy type theory*, E. Rijke, M. Shulman, B. Spitters (2020) et dans la thèse *Lawvere-Tierney sheafification in Homotopy Type Theory* Ch. 4, K. Quirin (2016).

La définition est formulée de manière interne, sans utiliser la notion d'égalité stricte. Par exemple, on peut définir $Df : DA \to DB$ si $f : A \to B$ et on aura une preuve de $\eta_B \circ f \equiv Df \circ \eta_A$ mais l'égalité peut être non stricte.

La notion de modalité exacte à gauche peut être vue comme une notion analogue de la notion de monade *idempotente*.

On va donner un exemple d'une telle modalité stricte qui n'est pas de la forme $X^p$.

# Modèles de la théorie des types

Dans la leçon 6, j'ai montré comment construire un modèle de la théorie des types comme un modèle interne dans le modèle de préfaisceau sur la catégorie $\square$ des ensembles ordonnés finis non vides.

Cette catégorie contient la catégorie $\Delta$, qui a pour objets les ensembles totalement ordonnés non vides $[n]$.

Pour avoir un modèle constructif, on introduit le préfaisceau $\Phi \subseteq \Omega$ avec $\Phi(X)$ ensemble des cribles *décidables* sur $X$.

Le préfaisceau représenté par $[1]$ joue le rôle d'un interval $\mathbf{I}$.

On utilise $\Phi$ pour définir une notion d'objets ⟪partiels⟫, et la notion de types *fibrants* qui vérifient la condition de remplissage (ou de fermeture) d'une ⟪boîte ouverte⟫.

## Modèles de la théorie des types

Comme la catégorie $\square$ est cartésienne, l'intervalle $\mathbf{I}$ est *atomique*, et on peut définir l'univers $U_i(X)$ comme l'ensemble des types Type$(X)$ muni d'une opération de remplissage.

C'est cette condition qui n'est pas vérifiée pour $\Delta$ : l'intervalle $\Delta[1]$ n'est pas atomique.

On peut alors montrer que $\Sigma_{X:U_i}(A \simeq X)$ est *contractile* (on a une opération qui étend tout élément partiel en un élément total) ce qui est une manière d'énoncer l'univalence.

On en déduit directement que $U_i$ vérifie la condition de ⟪fermeture des boîtes ouvertes⟫ et donc que le type $U_i$ est fibrant.

## Structure de modèle de Quillen

On a une *structure de modèle de Quillen*.

Les *cofibrations* sont les flèches classifiées par $\Phi$.

Les *fibrations* sont définies par la propriété de remplissage (ou fermeture) des boîtes ouvertes.

Ceci détermine de manière unique la notion d'*équivalence faible*.

## Structure de modèle de Quillen

On montre alors que cette structure de modèle vérifie les propriétés :

-Frobenius (et ⟪right proper⟫ : les équivalences faibles sont préservées par produit fibré le long des fibrations),

-⟪Extension d'équivalence⟫; c'est le fait que $\Sigma_{X:U_i}(A \simeq X)$ est contractile,

-Extension de fibration le long de cofibration triviale; cela résulte du fait que $U_i$ est fibrant.

Dans l'approche de Voevodsky, on prouve d'abord ces propriétés de la structure de modèle de Quillen pour construire un modèle de l'univalence.

## Structure de modèle de Quillen

La notion de *fibration triviale* correspond au fait que l'on peut étendre tout élément partiel en un élément total.

La notion de *cofibration triviale* est définie par orthogonalité par rapport aux fibrations.

On peut montrer directement qu'une flèche est une cofibration si, et seulement si, elle est orthogonale à toute fibration triviale.

Pour avoir une structure de modèle, on doit vérifier que toute flèche peut se factoriser en une cofibration et une fibration triviale, *et* en une cofibration triviale et une fibration.

## Structure de modèle de Quillen

La factorisation de $f : A \to B$ en une cofibration $i : A \to C$ et une fibration triviale $p : C \to B$ est directe, et peut se décrire de manière interne.

On définit $C$ ensemble des triples $\psi, u, v$ avec $\psi : \Phi$ et $b : B$ et $u : A^{T(\psi)}$ tel que

$$\forall_{x:T(\psi)} f\ (u\ x) = b$$

On prend $i\ a = \top, \lambda_x a, f\ a$ et $p\ (\psi, u, b) = b$.

$i : A \to C$ est classifiée par $C \to \Phi,\ (\psi, u, v) \mapsto \psi$.

La preuve que $p : C \to B$ est une fibration triviale résulte du fait que $\Sigma_{\psi:\Phi} X^{T(\psi)}$ est toujours injectif/contractile.

## Application au modèle de l'égalité

Comme l'a remarqué A. Swan, cette factorisation permet de résoudre un problème de mathématique constructive pour construire un modèle où la loi d'élimination de l'égalité est une loi de calcul et pas seulement une égalité propositionnelle.

Dans une approche classique, les lois de l'égalité correspondent à la factorisation de la diagonale $A \to A \times A$ en une cofibration triviale $A \to A^{\mathbf{I}}$ et une fibration $A^{\mathbf{I}} \to A \times A$, cf.
*Homotopy theoretic models of identity types* S. Awodey et M. Warren (2007).

De manière constructive, $A \to A^{\mathbf{I}}$, $a \mapsto \lambda_x a$ est bien un équivalence, mais ce n'est pas nécessairement une des *cofibrations*, qui sont les flèches classifiées par l'objet $\Phi$ des cribles *décidables*.

Si on factorise cette flèche en une cofibration $r : A \to \mathsf{Id}_A$ et une fibration triviale $\mathsf{Id}_A \to A^{\mathbf{I}}$, alors $r$ est un cofibration triviale par la propriété de $\langle\langle 3$ pour $2 \rangle\rangle$.

## Application au modèle de l'égalité

On change donc l'interprétation du type égalité de la manière suivante : un élément de type $\mathsf{Id}\ A\ a_0\ a_1$ est un couple $\psi, \omega$ avec $\psi : \Phi$ et $\omega : A^{\mathbf{I}}$ tel que

(1) $\omega\ 0 = a_0$ et $\omega\ 1 = a_1$

(2) $\psi \to \forall_{x:\mathbf{I}}\ a_0 = \omega\ x = a_1$

On vérifie directement que ce type est fibrant si $A$ est fibrant.

Ceci fournit donc un moyen d'obtenir une loi de calcul *stricte* de l'égalité, qui peut se programmer.

Le fait que des idées venant de la théorie des modèles de structure de Quillen s'appliquent ainsi à un problème de mathématique constructive est peut-être surprenant.

# Rappel : structure de fermeture d'une boîte ouverte

Une opération $c_B$ de fermeture pour un type *global* $B$ est une opération $c_B(v, \psi, \omega) : B$ avec

$v : B$

$\psi : \Phi$

$\omega : (\mathbf{I} \to B)^{T(\psi)}$ chemin partiel tel que $\forall_{x:T(\psi)} v = \omega\ x\ 0$

On doit avoir de plus $\forall_{x:T(\psi)} c_B(v, \psi, \omega) = \omega\ x\ 1$.

(On a une opération duale en changeant $0$ et $1$.)

Pour un type $B$ dans un contexte $\Gamma$, il faut ajouter une opération de transport.

## Structure de modèle de Quillen

Pour construire l'autre factorisation $f : A \to B$ en une cofibration triviale et fibration, il suffit de considérer le cas $B = 1$.

On construit donc le *remplacement fibrant* $\overline{A}$ de $A$.

Dans cette approche, on le voit comme une nouvelle forme de définition inductive : un élément de $\overline{A}$ est de la forme

(1) $i(a)$ avec $a$ dans $A$ ou de la forme

(2) $c(u, \psi, \omega)$ avec $u : \overline{A}$ et $\psi : \Phi$ et $\omega : (\mathbf{I} \to \overline{A})^{T(\psi)}$ avec $\omega\ x\ 0 = u$; on a la condition $c(u, \psi, \omega) = \omega\ x\ 1$ si $x : T(\psi)$ (et dualement en changeant $0$ et $1$)

On peut alors vérifier que si $B$ a une structure de fibration, i.e. on a une opération de fermeture $c_B(v, \psi, \omega)$ et $f : A \to B$ alors on peut définir $g : \overline{A} \to B$ par induction

$$g\ i(a) = f\ a \qquad g\ c(u, \psi, \omega) = c_B(g\ u, \psi, \lambda_x \lambda_i g\ (\omega\ x\ i))$$

## Structure de modèle de Quillen

Ce nouveau genre de définition inductive dans les modèles de préfaisceau apparait dans le papier *Cubical type theory: a constructive interpretation of the axiom of univalence*, C. Cohen, Th. C., S. Huber et A. Mörtberg (2015).

Il est étudié dans *W-types with reductions and the small object argument*, A. Swan (2018)

Ceci correspond à l'argument du ⟪petit objet⟫.

La vérification que l'on obtient une structure de modèle de Quillen a été formalisé dans la thèse de S. Boulier, cf. *Model structure on the universe of all types in interval type theory*, S. Boulier et N. Tabareau (2020). Elle est originellement due à C. Sattler (2015).

C'est ⟪dual⟫ de l'approche de Voevodsky, qui part (dans un cadre classique) d'une telle structure de modèle pour interpréter l'univalence. Ici, on construit une structure de modèle à partir d'un modèle de l'univalence.

# Exemple de modèle

En particulier, on obtient ainsi une structure de modèle de Quillen sur la catégorie des $\mathcal{U}$-préfaisceaux sur $\square$.

On note $X, Y, Z, \ldots$ les objets de $\square$ et aussi $X$ pour $Yo(X)$, foncteur représentable par $X$. L'intervalle $\mathbf{I}$ est $[1]$.

Considérons l'objet $\Gamma = \{0,1\}$. La flèche constante $K : \Gamma \to \Gamma^{\mathbf{I}}$ est une bijection et donc tout $A$ dans Type$(\Gamma)$ a une structure de remplissage.

On a les applications constantes $\rho_0 : X \to \Gamma$ et $\rho_1 : X \to \Gamma$.

On peut définir $A(X, \rho) = 1$ si $\rho = \rho_0$ ou $\rho = \rho_1$ et $A(X, \rho) = \emptyset$ si $\rho \neq \rho_0$ et $\rho \neq \rho_1$.

Elem$(\Gamma, A)$ est vide mais $A([0], \rho) = 1$ pour chaque $\rho : [0] \to \Gamma$.

# Exemple de modèle

Sur $\square$, la structure de modèle est telle que l'on a un exemple de *fibration* $p : \Gamma.A \to \Gamma$, avec $A$ proposition, qui vérifie

(1) $p$ n'a pas de section

(2) chaque fibre de $p$ est contractile

Il en résulte que cette structure de modèle ne peut pas être équivalente (même dans une méta-théorie classique) à la structure de modèle sur les ensembles simpliciaux.

## Exemple de modèle

On avait réussi dans *The equivariant model structure on cartesian cubical sets* S. Awodey, E. Cavallo, Th. C., E. Riehl, C. Sattler (2024), à construire un modèle qui *classiquement* donne une structure de modèle équivalent à celle des ensembles simpliciaux. En particulier la propriété

*Une fibration propositionnelle telle que chaque fibre globale est contractile a une section*

est valide, mais seulement dans une méta-théorie classique.

## Questions

M. Shulman *The Derivator of Setoids*, 2021

*Can homotopy theory be developed in constructive mathematics, or even in ZF set theory without the axiom of choice?*

*In particular, there are now at least two constructive homotopy theories - the aforementioned simplicial sets and the equivariant cartesian cubical sets of [ACC+21] - that can classically be shown to present the homotopy theory of spaces. However, it is not known whether they are constructively equivalent to each other. Thus one may naturally wonder: if they are not equivalent, which is the "correct" constructive homotopy theory of spaces? Or, perhaps, are they both "incorrect"? What does "correct" even mean?*

*Thus, if there is a homotopy theory that can be shown to have this universal property constructively, its 1-truncation must contain not only sets, but also setoids. This suggests that either setoids are an unavoidable aspect of constructive homotopy theory, or more radical modifications to the notion of homotopy theory are needed.*

## Modalité

C. Sattler a remarqué que l'on pouvait définir une modalité exacte à gauche sur le modèle $\square$

Si $A$ dans $\mathsf{Type}(\Gamma)$, on définit $DA$ dans $\mathsf{Type}(\Gamma)$ par

$DA(X, \rho)$ est l'ensemble des familles $u_f$ dans $A([n], \rho f)$ pour $f : [n] \to X$ telles que $u_f g = u_{fg}$ pour $g : [m] \to [n]$ *strictement* croissante.

On a une application $\eta_A : A \to DA$ par $(\eta_A u)_f = u([n], \rho f)$.

On peut alors vérifier

**Lemme :** *On peut construire une structure de fermeture des boîtes $Dc_A$ pour toute structure de fermeture $c_A$ pour $A$, avec $(Dc_A)\sigma = D(c_A\sigma)$*

**Lemme :** *Pour* tout *type $A$, on peut construire un chemin entre $D\eta_A$ et $\eta_{DA}$*

## Modalité

Cette opération $D$ définit une modalité exacte à gauche, et on obtient donc un modèle de la théorie des types avec univalence, en se restreignant aux types $D$-modaux.

**Théorème :** *Soit $A$ un type fibrant qui est une* proposition *dans* $\mathsf{Type}(\Gamma)$*, toute famille d'éléments* $a(\rho) \in A([0], \rho)$ *pour* $\rho : [0] \to \Gamma$ *s'étend (constructivement) en un élément de* $\mathsf{Elem}(\Gamma, DA)$.

Intuitivement, on peut construire cette section par induction sur la dimension : elle est donnée sur les points, puis on peut l'étendre sur les lignes, puis triangles, $\ldots$. Comme pour les ensembles *semi-simpliciaux*, on n'a jamais à décider si un élément est dégénéré ou non.

**Corollaire :** *Le modèle des types $D$-modaux vérifie l'axiome du choix dépendant*

Ceci résout un problème qui était ouvert pour les modèles constructifs de l'univalence.

## Modalité

On redéfinit alors la notion de *fibration* : c'est une application $\Gamma.A \to \Gamma$ avec $A$ qui a une structure de remplissage *et* une preuve que $A$ est $D$-modal

La notion de *cofibration* reste la même : une flèche classifiée par $\Phi$

Comme on a un modèle de la théorie des types avec univalence, on obtient une nouvelle structure de modèle de Quillen sur les préfaisceaux sur $\Box$

On a changé la notion de fibration, et donc la notion d'équivalence change. Pour cette notion d'équivalence, on peut énoncer le résultat suivant.

**Théorème :** (principe de Whitehead) *Une flèche $f : X \to Y$ est une équivalence si, et seulement si, $\pi_0(f)$ est une bijection et tous les $\pi_n(f, x)$ sont des isomorphismes*

On s'attend donc à que cette structure de modèle représente la notion de *types d'homotopie* dans une méta-théorie constructive.

# Conclusion

J'espère avoir illustré la richesse de l'étude des modèles de la théorie des types, et, en particulier, des modèles du principe d'univalence. Ceci doit permettre de développer les travaux utilisant la théorie de l'homotopie dans une méta-théorie effective et prédicative.

Ce principe est une formulation du principe d'extensionnalité dans le cadre des types dépendants.

C'est un principe qui doit être *admissible*; quand on l'exprime de manière interne, on change le caractère de la théorie des types dépendant.

En général, ce peut ne pas être une bonne idée d'exprimer de manière interne un principe admissible; par exemple, la thèse de Church est admissible, mais l'ajout comme principe interne ne semble pas conduire à un système élégant (entre autres, ceci entraine la négation de certains principes formulés par Brouwer).

## Conclusion

L'extensionalité semble avoir un statut spécial toutefois; c'est le premier axiome de la théorie des ensembles, et la pratique des mathématiciens est d'admettre ce principe.

Comme je l'ai montré dans la dernière leçon, sur les espaces d'Eilenberg-MacLane, le principe d'univalence conduit à des nouvelles définitions d'objets. Mais il permet aussi de structurer de manière élégante des notions qui se placent au niveau des ensembles et groupoïdes.

Est-ce utile pour la formalisation des mathématiques ? C'est trop tôt pour juger, mais ce doit être testé (par l'expérience de formalisation).

Un aspect conceptuellement intéressant est la primauté de la notion de *groupoïde* par rapport à celle de *catégorie*.

Cependant, certains mathématiciens pensent que l'on doit aller plus loin, avec un système qui prend la notion d'$(\infty,1)$-catégorie comme primitive.

# Conclusion

《on sait aujourd'hui qu'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver toute la mathématique actuelle d'une source unique, la théorie des ensembles ... Ce faisant, nous ne prétendons pas légiférer pour l'éternité; il se peut qu'un jour les mathématiciens s'accordent à se permettre des sortes de raisonnement non formalisables dans le langage exposé ici; suivant certains, l'évolution récente des théories d'homologie dites axiomatiques donnerait à penser que ce jour n'est pas éloigné. *Il faudrait alors, sinon changer complètement de langage, tout au moins d'élargir les règles de la syntaxe.* C'est à l'avenir qu'il appartiendra d'en décider.》

Archive Bourbaki, introduction au livre I (état 2; théorie des ensembles)