

La logique des catégories supérieures

Denis-Charles Cisinski

Universität Regensburg

Formalisation des mathématiques et types dépendants, Collège de France, 2 juin 2025

Formalisation des mathématiques suivant les principes suivants : intégrer systématiquement les méthodes issues de la logique (le jeu entre syntaxe et sémantique, les concepts issus de la théorie des types, l'effectivité des méthodes) avec l'expressivité du langage de la théorie des catégories, et ce en implémentant nativement les principes issus de la théorie de l'homotopie de part et d'autre (univalence et ∞ -catégories). Tout cela en restant au plus près de la pratique des mathématicien.ne.s.

Concrètement :

- ▶ pas de métathéorie (tout est internalisable)
- ▶ intégrer de la sémantique dans la syntaxe
- ▶ fonctorialité et univalence par définition
- ▶ transport des preuves via des morphismes non-inversibles
- ▶ quantification sur les interprétations sémantiques intégrées dans la syntaxe (géométrisation des preuves, axiomatisation, forcing)

On voudra exprimer la théorie des ∞ -catégories telle qu'elle est pratiquée, mais aussi la théorie des faisceaux de ∞ -catégories. Une théorie des ∞ -catégories qui pourra être classique ou non.

Principes de la théorie des catégories intégrés dans la syntaxe :

- ▶ expression systématique et cohérente de la comparaison d'objets/termes a priori distincts les uns des autres ($\rightsquigarrow$ hygiène du morphisme canonique, formalisme des structures lax)
- ▶ cohérence automatique pour les constructions par propriétés universelles (e.g. monadicité des adjonctions, transport des cohérences entre adjoints à droite vers les adjoints à gauche)– les méthodes usuelles de la résolution des problèmes de cohérence via la sémantique produite par la théorie des catégories sont intégrées dans la syntaxe
- ▶ théorie des catégories avancées (au delà du lemme de Yoneda) : méthodes systématiques pour construire et calculer des catégories admettant des petites colimites et limites par générateurs et relations– approche moderne de la théorie des catégories (∞ -topoi, faisceaux motiviques...)

Qu'est-ce qu'une théorie des catégories ?

Une théorie des catégories doit définir une sorte de 2-catégorie $\mathcal{C}$

- ▶ objets : "catégories"
- ▶ 1-morphismes : "foncteurs"
- ▶ 2-morphismes : "transformations naturelles"

sous-2-catégorie des "groupoïdes"

$$S \hookrightarrow \mathcal{C}$$

en général, on ne peut pas retrouver $\mathcal{C}$ à partir de S (exemple : la 2-catégorie des adjonctions et la

2-catégorie des catégories ont des 2-catégories d'objets groupoïdes équivalentes)

Il n'est pas naturel d'imposer qu'une catégorie soit une structure sur un type d'objet "primitif" (comme un ensemble ou un type d'homotopie).

Homotopy Type Theory (Hott)

Un ∞ -topos élémentaire est une "théorie abstraite des ∞ -catégories".

Théorème (Martini–Wolf)

Tout ∞ -topos de Grothendieck–Lurie est un ∞ -topos élémentaire.

Théorème (Shulman)

Tout ∞ -topos de Grothendieck–Lurie est une interprétation sémantique de Hott avec axiome d'univalence.

Mais Hott n'est pas le langage interne des ∞ -topoi élémentaires (seulement un fragment).

Théorie des catégories synthétiques

- ▶ variation de la théorie des types dépendants ($\Rightarrow$ syntaxe)
- ▶ les types sont interprétés par défaut comme des $(\infty, 1)$ -catégories
- ▶ une généralisation de l'axiome d'univalence permet de travailler fonctoriellement
- ▶ les interprétations sémantiques font partie de la syntaxe

Slogan :

Une part très substantielle de la littérature exprimée dans le langage de la théorie des ∞ -catégories est formalisée.

Prédicat sur les contextes

$\vdash \Gamma \quad \text{Ctx}$

$\vdash \Gamma \quad \text{An} \quad (\text{introduction des contextes "animés" = "groupoïdaux"})$

Prédicats sur les types dépendants

$\Gamma \vdash C \quad \text{Type}$

$\Gamma \vdash C \quad \text{Cat} \quad (\text{introduction des fibrations cocartésiennes})$

$\Gamma \vdash C \quad \text{Gpd} \quad (\text{introduction des fibrations cocartésiennes conservatives})$

$\Gamma \vdash C \quad \text{Cat}^{\text{op}} \quad (\text{introduction des fibrations cartésiennes})$

$\Gamma \vdash C \quad \text{Gpd}^{\text{op}} \quad (\text{introduction des fibrations cartésiennes conservatives})$

$\Gamma \vdash C \quad \text{Prop}$

La déclaration des termes, l'égalité "définiionnelle", l'introduction des Σ -types et des substitutions se fait de manière standard. Mais pas de Π -types !

$x, y: C \vdash x = y$ Type (introduction du type identité à la Martin-Löf)

$x, y: C \vdash x \rightarrow y$ Type (introduction du type des morphismes)

Loi de composition (conditions de Segal) $\Rightarrow$ Type des isomorphismes

$x, y: C \vdash x \cong y$ Type

- $\vdash \Gamma \text{ An}$ (Γ est un groupoïde)
- $\Gamma \vdash C \text{ Type}$ (C est une catégorie – dans le contexte Γ)
- $\Gamma \vdash x, y: C$ (x et y sont des objets de C)
- $\Gamma \vdash f: x \rightarrow y$ (f est un morphisme de x vers y dans C)
- $\Gamma.C \vdash A \text{ Cat}$ (A est un type dépendant défini fonctoriellement sur C)
- $\Gamma \vdash f_! : A(x) \rightarrow A(y)$

Les constructeurs correspondant à des adjoints à droite sont introduits via des propriétés universelles à homotopie près (pas de cohérences strictes, pas de modalités, la fonctorialité est déduite de la définition) :

- ▶ les Π -types (lorsqu'ils existent)
- ▶ les sous-catégories
- ▶ les sous-groupoïdes maximaux (lorsqu'ils existent) :

$$i_C: C^{\simeq} \hookrightarrow C$$

Définition

Un objet de C est un terme de $C^{\simeq}$.

Les localisations (sortes de types inductifs) sont aussi introduites via des propriétés universelles à homotopie près.

Construction de Grothendieck et univalence

Principe général : on ne cherche à définir que des catégories (e.g. on ne définit pas ce qu'est un groupe, mais ce qu'est la catégorie des groupes – un groupe est un objet de celle-ci).

En particulier, on ne définit pas ce qu'est une catégorie (synthétique) mais on définit la catégorie (synthétique) des catégories (synthétiques)

$$F: C \rightarrow \mathbf{Cat} \quad \Leftrightarrow \quad C \vdash X \quad \mathbf{Cat}$$

Formuler cette équivalence, en évitant de tomber dans la circularité, est précisément est l'axiome d'univalence dirigée (subsume l'univalence à la Voevodsky).

L'univers comme sémantique

L'univalence dirigée implique une correspondance parfaite entre les opérations logiques (la syntaxe) et les opérations catégoriques dans l'univers – la syntaxe produit sa propre interprétation sémantique la plus fidèlement qui soit.

Types	Cat
$\vdash \Gamma \text{ Ctx}$	$\vdash \Gamma : Cat$
$C \vdash A \text{ Type}$	$\vdash A : Cat_{/C}$ i.e. foncteur $p: A \rightarrow C$
$C \vdash A \text{ Cat}$	$\vdash A : C \rightarrow Cat$
$f: A \rightarrow B$ (substitution)	$f: A \rightarrow B$ (foncteur=morphisme de termes)
sommes dépendantes	composition des foncteurs (en tant que foncteur sur les tranches)
substitution des types dépendants	changement de base (produits fibrés)
type identité de Martin-Löf	égalité/isomorphisme/équivalence de catégories
propositions	groupoïdes

Les types généraux ne sont pas des propositions au sens usuel de la correspondance de Curry–Howard : ce sont des espaces de paramètres pour transporter les preuves des propositions, y compris par des processus non-inversibles. Ce sont aussi des théories, des logiques.

$$\begin{array}{ccccc} S_{\bullet}^{\simeq} & \longrightarrow & S_{\bullet} & \longrightarrow & \mathbf{Cat}_{\bullet} \\ \downarrow \wr & \lrcorner & \downarrow \wr & \lrcorner & \downarrow \wr \\ S^{\simeq} & \longrightarrow & S & \longrightarrow & \mathbf{Cat} \end{array}$$

Théorème

Les groupoïdes forment une interprétation sémantique de Hott avec l'axiome d'univalence et $S_{\bullet}^{\simeq} \twoheadrightarrow S^{\simeq}$ est la fibration universelle.

Construction de Grothendieck et univalence

$\vdash C \text{ Type}$

$$\begin{array}{ccc} & \text{construction de Grothendieck} & \\ & F \mapsto \int_C F & \\ & \text{-----} & \\ \text{Fun}(C, \text{Cat}) & \xlongequal{\quad} \text{cocart}(C) \hookrightarrow & \text{Cat}_{/C} \\ & \text{univalence dirigée} & \end{array}$$

La propriété pour Γ d'être un groupoïde équivaut à ce que la construction de Grothendieck soit une équivalence :

$$\text{Fun}(\Gamma, \text{Cat}) = \text{Cat}_{/\Gamma}$$

Dans ce cas, en restreignant aux groupoïdes, on obtient

$$\text{Fun}(\Gamma, S) = S_{/\Gamma}$$

En passant aux groupoïdes maximaux des univers, on retrouve l'univalence classique :

$$\text{Fun}(\Gamma, S^{\simeq}) = \text{Fun}(\Gamma, S)^{\simeq} = (S_{/\Gamma})^{\simeq}$$

Théorème (Cisinski–Nguyen)

La théorie des quasi-catégories (i.e. le modèle standard pour formaliser la théorie des ∞ -catégories d'après Joyal et Lurie) est une interprétation sémantique de la théorie des catégories synthétiques dans ZFC.

(de sorte que la restriction aux complexes de Kan donne littéralement l'interprétation sémantique de Hott avec axiome d'univalence construite par Voevodsky)

Types inductifs, colimites et limites

Théorème

Le foncteur d'inclusion $S \hookrightarrow \mathbf{Cat}$ admet

- ▶ *un adjoint à droite $C \mapsto C^{\simeq}$;*
- ▶ *un adjoint à gauche $C \mapsto \Pi_{\infty}(C) =$* **localisation de C par tous ses morphismes.**

Théorème

$\mathbf{Cat}$ est cartésienne fermée et admet des limites et des colimites indexées par les petites catégories (i.e. par les objets de $\mathbf{Cat}$).

Le plongement pleinement fidèle $S \hookrightarrow \mathbf{Cat}$ commute à la formation des limites et des colimites ainsi que du $\mathbf{Hom}$ interne.

Corollaire

$\mathbb{N}$ existe.

Lemme de Yoneda

Pour $C: \mathbf{Cat}^{\simeq}$ on définit C^{op} comme la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fun}(C, S)$ formée des foncteurs représentables, i.e. des foncteurs de la forme $\mathrm{Hom}_C(x, -)$ pour $x: C^{\simeq}$.

$$\begin{array}{ccc} C_{x/} & \longrightarrow & S_{\bullet} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_C(x, -)} & S \end{array}$$

Le plongement $C^{op} \hookrightarrow \mathbf{Fun}(C, S)$ induit par transposition $h: C \rightarrow \mathbf{Fun}(C^{op}, S)$.

Théorème

Le plongement de Yoneda h est pleinement fidèle et présente $\mathbf{Fun}(C^{op}, S)$ en tant que complétion de C par petites colimites.

$\rightsquigarrow$ théorie des extensions de Kan, pro-foncteurs, etc.

Théorèmes A et B de Quillen

On peut réinterpréter l'univalence via l'univalence dirigée comme suit. Soit $\mathcal{O}_S$ la catégorie des morphismes de l'univers S . Les morphismes de $\mathcal{O}_S$ sont donc les carrés commutatifs de S . On note $\mathcal{O}_S^{cart}$ la sous-catégorie de $\mathcal{O}_S$ dont les morphismes sont les carrés cartésiens de S .

Théorème (univalence en tant que théorie de la descente)

La catégorie (synthétique) $\mathcal{O}_S^{cart}$ admet des petites colimites et le foncteur d'inclusion $\mathcal{O}_S^{cart} \hookrightarrow \mathcal{O}_S$ y commute.

Exemple (le théorème B de Quillen – source de toutes les suites exactes en K -théorie)

Soit $f: A \rightarrow B$ un foncteur entre petites catégories synthétiques. On suppose que pour tout morphisme $v: b_1 \rightarrow b_2$ dans B , le foncteur induit $v_!: A_{/b_1} \rightarrow A_{/b_2}$ est une équivalence faible (i.e. induit une équivalence après application du foncteur Π_∞). Alors, pour tout objet b de B , on a un carré cartésien canonique dans S de la forme

$$\begin{array}{ccc} \Pi_\infty(A_{/b}) & \longrightarrow & \Pi_\infty(A) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \Pi_\infty(f) \\ * & \xrightarrow{b} & \Pi_\infty(B) \end{array}$$

Théorèmes A et B de Quillen

Idee de la preuve : on interprète la preuve explicite du lemme de Yoneda comme une preuve du fait que la colimite du plongement de Yoneda $h: B \rightarrow \text{Fun}(B^{op}, S)$ est l'objet final. On observe alors :

- ▶ le foncteur

$$f^*: \text{Fun}(B^{op}, S) \rightarrow \text{Fun}(A^{op}, S)$$

commute aux limites et aux colimites (puisqu'il admet des adjoints à gauche et à droite) ;

- ▶ pour toute petite catégorie C , le foncteur composé

$$\text{Fun}(C^{op}, S) \hookrightarrow \text{Fun}(C^{op}, \text{Cat}) \cong \text{cart}(C) \hookrightarrow \text{Cat}/C$$

commute aux petites colimites ;

- ▶ $\Pi_\infty: \text{Cat} \rightarrow S$ commute aux colimites (puisque c'est un adjoint à gauche) et $\Pi_\infty(C) \cong *$ dès que C admet un objet final.

On termine la preuve en observant que

$$b \mapsto \left(\Pi_\infty(A/b) \rightarrow \Pi_\infty(B/b) \right)$$

est un foncteur de type $B \rightarrow \mathcal{O}_S^{\text{cart}}$ dont la colimite dans $\mathcal{O}_S$ est $\Pi_\infty(f): \Pi_\infty(A) \rightarrow \Pi_\infty(B)$.

Théorèmes A et B de Quillen

Une citation de Quillen dans son papier fondateur sur la K -théorie supérieure paru dans le LNM 341 en 1973 :

"The proofs of Theorems A and B given in section 1 owe a great deal to conversations with Graeme Segal, to whom I am very grateful. One can derive these results in at least two other ways, using cohomology and the Whitehead theorem as in [Friedlander], and also by means of the theory of minimal fibrations of simplicial sets. The present approach, based on the Dold-Thom theory of quasi-fibrations, is quite bit shorter than the others, although it is not clear as I would have liked, since the main points are in the references. Someday these ideas will undoubtedly be incorporated into a general homotopy theory for topoi."

La preuve "via les fibrations minimales" à laquelle Quillen fait allusion a très certainement beaucoup de parties en communs avec la preuve de Voevodsky de l'axiome d'univalence pour les complexes de Kan. Vue le lien profond entre univalence et descente exprimé par le théorème ci-dessus, et vue que la théorie synthétique des catégories peut en fait s'interpréter dans tout ∞ -topos, cela semble réaliser la prédiction de Quillen.

$$Pr^L = \{\text{catégories présentables}\}$$

$\vdash C: (Pr^L)^\simeq$ signifie qu'il existe une petite catégorie A , une petite collection $F \hookrightarrow (\mathcal{O}_{Fun(A^{op}, S)})^\simeq$ et une équivalence de C vers la sous-catégorie pleine de $Fun(A^{op}, S)$ formée des foncteurs $X: A^{op} \rightarrow S$ tels que

$$u^*: \text{Hom}(b, X) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(a, X)$$

pour tout $u: a \rightarrow b$ dans F .

Théorème

- ▶ *Toute catégorie présentable admet des petites colimites ainsi que des petites limites.*
- ▶ *Pour $C, D: (Pr^L)^\simeq$, un foncteur $F: C \rightarrow D$ admet un adjoint à droite si et seulement s'il commute aux (petites) colimites.*
- ▶ *Pr^L admet des petites colimites et des petites limites.*

Formation des colimites dans Pr^L

$I: Cat^{\simeq}, A: I \rightarrow Pr^L$

On construit $(-)_*: (Pr^L)^{op} \rightarrow Cat'$ envoyant $F: C \rightarrow D$ sur son adjoint à droite $F_*: D \rightarrow C$.

Lemme

la limite de A_* est présentable et

$$\left(\operatorname{colim}_I A \right)_* = \lim_{I^{op}} A_*$$

Exemple

Pour $C: (Pr^L)^{\simeq}$, on a un carré cocartésien dans Pr^L

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S & \xrightarrow{0 \rightarrow 1} & C \\ \text{codom} \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & C_{\bullet} \end{array}$$

où $C_{\bullet}$ est la catégorie des objets pointés de C .

On définit la stabilisation $Sp(C)$ de $C: (Pr^L)^\simeq$ comme la colimite du foncteur

$$St_C: (\mathbb{N}, \leq) \rightarrow Pr^L$$

qui envoie n sur $C_\bullet$ et $n \leq n+1$ sur la suspension

$$\Sigma: C_\bullet \rightarrow C_\bullet, \quad x \mapsto \text{colim}(0 \leftarrow x \rightarrow 0)$$

On note $StPr^L$ la sous-catégorie pleine des catégories stables (i.e. telles que $C \cong C_\bullet$ et $\Sigma: C \simeq C$).

Théorème

$Sp: Pr^L \rightarrow StPr^L$ est un adjoint à gauche de l'inclusion $StPr^L \hookrightarrow Pr^L$.

Remarque : d'après le lemme ci-dessus, $Sp(C)$ est formée des suites d'objets pointés x_n et d'isomorphismes de la forme

$$n: \mathbb{N} \vdash \sigma_n: x_n = \Omega(x_{n+1})$$

(les Ω -spectres) dans C .

Logique linéaire catégorique

La version synthétique de la sémantique catégorique, puisqu'intégrée à la syntaxe, produit naturellement une variation syntaxique sur le thème de la logique linéaire.

$$C, D: (Pr^L)^{\simeq}$$

$$\text{Fun}^L(C, D) \hookrightarrow \text{Fun}(C, D)$$

On définit $C \otimes D$ par propriété universelle :

$$\text{Fun}^L(C \otimes D, E) = \text{Fun}^L(C, \text{Fun}^L(D, E))$$

Exemples :

- ▶ $C \otimes S_{\bullet} = C_{\bullet}$
- ▶ $C \otimes Sp(S) = Sp(C)$
- ▶ $\text{Fun}(A, S) \otimes \text{Fun}(B, S) = \text{Fun}(A \times B, S)$ pour $A, B: \text{Cat}^{\simeq}$
- ▶ $\text{Fun}(A, C) = \text{Fun}(A, S) \otimes C$ pour $A: \text{Cat}^{\simeq}$ et $C: (Pr^L)^{\simeq}$
- ▶ $\text{Sh}(X, C) = \text{Sh}(X) \otimes C$ pour $C: (Pr^L)^{\simeq}$ et X un topos, en posant

$$\text{Sh}(X, C) = \text{Fun}(X, C^{op})^{op}$$

travail en collaboration avec Bastiaan Cnossen, Hoang Kim Nguyen et Tashi Walde

-  E. Riehl, M. Shulman *A type theory for synthetic ∞ -categories*, Higher Structures **1** (2017), 116–193
-  D.-C. Cisinski, *Higher Categories and Homotopical Algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 180, Cambridge University Press, 2019.
-  H. K. Nguyen, *Covariant & Contravariant Homotopy Theories*, arXiv:1908.06879.
-  H. K. Nguyen, *A note on coCartesian fibrations*, arXiv:2210.07753
-  D.-C. Cisinski, H. K. Nguyen, *The universal coCartesian fibration*, arXiv:2210.08945
-  D.-C. Cisinski, B. Cnossen, H. K. Nguyen, T. Walde *Formalization of Higher Categories*, book in progress, based on a course by D.-C. Cisinski. <https://sites.google.com/view/bastiaan-cnossen>
-  articles sur les ∞ -catégories dans les ∞ -topoi par L. Martini et S. Wolf