Annuaire du Collège de France

122e année

2021
2022

Résumé des cours et travaux

COLLÈGE
DE FRANCE
1530

COMBINATOIRE

Timothy Gowers

Professeur au Collège de France

La série de cours « La combinatoire additive linéaire » est disponible en audio et en vidéo sur le site internet du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/la-combinatoire-additive-lineaire), ainsi que la série de séminaires « La philosophie de la pratique des mathématiques » (https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/seminaire/la-philosophie-de-la-pratique-des-mathematiques).

ENSEIGNEMENT

COURS – LA COMBINATOIRE ADDITIVE LINÉAIRE

La combinatoire additive est une branche des mathématiques qui s'intéresse aux relations entre diverses propriétés des ensembles d'entiers, et plus généralement des sous-ensembles d'autres structures algébriques. Elle s'est développée rapidement au cours des trente dernières années et, ce faisant, a révélé des liens avec plusieurs autres branches des mathématiques, allant des systèmes dynamiques à la théorie des groupes. Plusieurs des théorèmes fondamentaux du sujet peuvent être prouvés à l'aide de l'analyse de Fourier, mais d'autres résultats nécessitent une sorte d'« analyse de Fourier d'ordre supérieur » où les fonctions de phase linéaires sont remplacées par des fonctions de phase polynomiales et leurs généralisations. Le cours de cette année a considéré les résultats linéaires et sera suivi, en 2022, d'un cours qui examinera les résultats qui nécessitent des méthodes d'ordre supérieur.

T. Gowers, « Combinatoire », *Annuaire du Collège de France. Résumé des cours et travaux*, 122e année : *2021-2022*, 2025, p. 13-19, https://journals.openedition.org/annuaire-cdf/20400.

Deux points forts du cours ont été le théorème de Roth et le théorème de Freiman. Le premier énonce que, pour tout nombre réel $c > 0$, si n est suffisamment grand et A est un sous-ensemble de $\{1,2,\ldots,n\}$ de taille au moins cn, alors A contient nécessairement une progression arithmétique de longueur 3. Le second décrit la structure d'un ensemble d'entiers dont la somme est petite : la somme d'un ensemble A est l'ensemble de toutes les sommes $x + y$ telles que x et y sont tous deux des éléments de A. Un troisième résultat présenté dans le cours était un théorème que j'ai prouvé et qui sert d'introduction à la combinatoire additive non abélienne.

Cours 1 – Les progressions arithmétiques de longueur 3 (I)

Le 11 octobre 2021

Le premier cours a préparé le terrain pour une preuve du théorème de Roth. Un des outils présentés a été l'analyse de Fourier discrète, qui est utilisée pour distinguer les ensembles quasi aléatoires des ensembles plus structurés, et un lemme qui montre que, pour toute fonction linéaire de phase f, il existe une partition de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ en longues progressions arithmétiques dans chacune desquelles f est à peu près constante.

Cours 2 – Les progressions arithmétiques de longueur 3 (II)

Le 18 octobre 2021

Le deuxième cours a complété la preuve du théorème de Roth. Celle-ci a été suivie d'un exemple, dû à Behrend, de l'ensemble le plus dense connu qui ne contient pas de progression arithmétique de longueur 3. Un autre exemple a ensuite été présenté, celui-ci illustrant que les techniques « linéaires » ne suffisent pas pour traiter les progressions arithmétiques de longueur 4.

Cours 3 – La théorie des sommes d'ensembles d'entiers (I)

Le 25 octobre 2021

Ce cours a commencé par une discussion sur le « théorème des coins », selon lequel un sous-ensemble dense de la grille $n \times n$ doit contenir un triplet de points de la forme (x,y), $(x,y + d)$ et $(x + d,y)$. Ce théorème est lié à plusieurs autres résultats, dont un énoncé sur les configurations dans les hypergraphes linéaires 3-uniformes. Pour prouver cet énoncé, un outil très utile est le lemme de régularité de Szemerédi, qui stipule que tout graphe peut être divisé en un petit nombre de parties quasi aléatoires.

Cours 4 – La théorie des sommes d'ensembles d'entiers (II)

Le 8 novembre 2021

Le quatrième cours était une introduction à la théorie des sommes d'ensembles d'entiers. Le premier résultat présenté était un théorème de Khovanskii, qui montre que, pour tout ensemble fini A, les tailles des ensembles de sommes itérées $A + A + \dots + A$ dépendent du nombre de copies de l'ensemble A de façon polynomiale une fois que k est suffisamment grand. Curieusement, la preuve ne donne aucune information sur la taille que doit avoir k avant que le comportement polynomial ne commence, mais des résultats plus récents ont fourni des bornes explicites. Le théorème de Freiman a ensuite été énoncé et certaines des étapes de la preuve ont été présentées. Il s'agit notamment de faits de base sur les homomorphismes de Freiman et de l'énoncé du lemme de plongement de Ruzsa, qui permet de plonger une grande partie d'un ensemble dont la somme est petite dans un groupe cyclique pas beaucoup plus grand.

Cours 5 – La sélection aléatoire dépendante

Le 15 novembre 2021

Dans le cinquième cours, le lemme de plongement de Ruzsa a été prouvé. Ensuite, les ensembles de Bohr ont été définis, et un lien a été expliqué entre les ensembles de Bohr et les ensembles obtenus par l'intersection d'un treillis avec un ensemble convexe symétrique. Ceci a été suivi par l'énoncé et la preuve du lemme de Bogolyubov, qui montre que, si A est un sous-ensemble dense d'un groupe cyclique, alors l'ensemble $A + A - A - A$ contient un grand ensemble de Bohr de petite dimension, ce qui est suffisant pour garantir qu'il a un haut degré de structure. Ensuite, tous ces outils ont été réunis pour prouver une forme du théorème de Freiman qui est légèrement plus faible que la version habituellement énoncée, mais suffisante pour les applications. Ceci a été suivi par l'énoncé d'un théorème de Balog et Szemerédi, dans une version quantitative découverte par moi.

Cours 6 – Introduction à la théorie non abélienne

Le 22 novembre 2021

Dans le dernier cours, le théorème de Balog-Szemerédi-Gowers a été prouvé. Le cours s'est terminé par une très brève introduction à la combinatoire additive non abélienne, qui est susceptible de figurer plus en évidence dans les cours des années à venir. Une solution a été présentée d'un résultat que j'ai prouvé qui a résolu un problème de Babai et Sós. Ce résultat stipule qu'il existe un groupe G tel que, si A est un sous-ensemble dense quelconque de G, alors il existe des éléments a, b, c de A tels que $ab = c$.

SÉMINAIRE – LA PHILOSOPHIE PRATIQUE DES MATHÉMATIQUES

Le séminaire s'est adressé à un public plus large que celui du cours. Le sujet, à interpréter au sens large, était la philosophie de la pratique mathématique. Les intervenants étaient des philosophes à l'esprit mathématique et des mathématicien·ne·s à tendance philosophique.

Séminaire 1 – Pourquoi croire à un énoncé mathématique dont on n'a pas de preuve ? (I)

Timothy Gowers, le 11 octobre 2021

Les mathématicien·ne·s utilisent fréquemment un langage probabiliste lorsqu'ils discutent d'énoncés qui n'ont pas encore été prouvés ou réfutés : un énoncé est « presque certainement vrai », un autre est « inattendu », et un troisième « pourrait peut-être être vrai mais il existe probablement un contre-exemple ». Étant donné que les énoncés mathématiques (décidables) ont des valeurs de vérité déterministes, l'utilisation de ce langage peut sembler quelque peu paradoxale. Ce séminaire a examiné plusieurs exemples de problèmes non résolus et les raisons que les mathématicien·ne·s ont données pour justifier leurs convictions sur les solutions qui n'ont pas encore été trouvées.

Séminaire 2 – Pourquoi croire à un énoncé mathématique dont on n'a pas de preuve ? (II)

Timothy Gowers, le 18 octobre 2021

Il s'agissait de la suite du premier séminaire. Une tentative a été faite de développer une théorie pour expliquer et justifier l'utilisation de jugements probabilistes par les mathématicien·ne·s.

Séminaire 3 – Le rôle des diagrammes dans la pratique mathématique

Valeria Giardino (CNRS) et Frédéric Patras (université Côte-d'Azur/CNRS), le 25 octobre 2021

La démonstration, au début du XX^e siècle, que les mathématiques pouvaient en principe être complètement formalisées a eu un impact profond sur la façon dont le sujet a été considéré depuis lors. Cependant, l'accent de la formalisation a été fortement mis sur le raisonnement symbolique, et beaucoup moins sur le raisonnement visuel et schématique, qui joue un rôle fondamental dans la recherche, et qui convainc souvent les mathématicien·ne·s de la vérité d'un énoncé bien avant qu'ils n'aient écrit une preuve sous forme symbolique. Ce séminaire a examiné le rôle du raisonnement diagrammatique, en utilisant comme étude de cas un article d'Alain Connes et Dirk Kreimer qui inclut des diagrammes de Feynman.

Séminaire 4 – Ce qu'on pourrait dire sur la mécanisation des mathématiques

Michael Harris (université Columbia), le 8 novembre 2021

La phrase « mécanisation des mathématiques » faisait référence à la création de dispositifs artificiels avec l'objectif d'accompagner les mathématicien·ne·s, ou encore de les remplacer. Le séminaire s'est intéressé à la manière dont nous sommes arrivés à une situation où de nombreux mathématicien·ne·s considèrent ce remplacement éventuel comme faisable, voire inévitable, et peut-être même souhaitable. L'intervenant a adopté un point de vue sceptique sur ces développements.

Séminaire 5 – *What is proof?*

Kevin Buzzard (Imperial College London), le 15 novembre 2021

Il existe un écart important entre la notion formelle de preuve et le genre d'argument qui passe généralement pour une preuve dans la littérature mathématique. Souvent, cela ne crée aucune difficulté, mais cet écart est devenu de plus en plus marqué à mesure que les preuves dans la littérature sont devenues de plus en plus compliquées. L'intervenant est une figure de proue dans le domaine de la formalisation, c'est-à-dire de l'activité qui consiste à écrire des preuves de manière qu'elles puissent être vérifiées mécaniquement par un ordinateur. Le séminaire a porté sur les attitudes à l'égard de la preuve et sur la façon dont elles peuvent changer.

Séminaire 6 – Peut-on penser sans concept en mathématique ? (ou : Quand la mathématique peine avec ses concepts)

Yves André (CNRS), le 22 novembre 2021

Il est clair qu'on ne peut pas penser en mathématique sans les notions abstraites comme les nombres, ou les formes géométriques, ou les structures algébriques. Mais le mot *concept* dans cet exposé veut dire une idée qui est à la fois plus générale et moins formelle qu'une définition mathématique : par exemple, l'espace, l'action, la dualité, ou une singularité.

RECHERCHE

Mon principal projet de recherche de cette année concernait une conjecture qui généraliserait simultanément plusieurs résultats importants en théorie de Ramsey et en combinatoire extrémale. La conjecture complète semble très difficile, donc, comme il est habituel dans de telles situations, la première étape naturelle est d'attaquer le cas spécial le plus simple qui n'est pas encore résolu par des résultats connus.

On arrive à un problème très attrayant. Soit X une collection de sous-ensembles de la grille $n \times n$ $\{1,2,...,n\}^2$ qui contient une proportion positive de tous ces sous-ensembles. Si n est suffisamment grand, X doit-il contenir deux ensembles A et B tels que A est un sous-ensemble de B, et la différence $B \setminus A$ est un ensemble de la forme $E \times E$ pour un sous-ensemble non vide E de $\{1,2,...,n\}$?

Une indication que ce problème n'est pas tout à fait simple est que, si la réponse est oui, alors une conséquence simple serait un théorème bien connu de Furstenberg et Sárközy, qui affirme qu'un sous-ensemble dense de $\{1,2,...,n\}$ doit contenir deux nombres dont la différence est un nombre carré. Ainsi, toute preuve du problème combinatoire devra être suffisamment puissante pour donner une preuve du théorème de Furstenberg et Sárközy, qui appartient plutôt à la théorie des nombres. On pourrait aussi essayer d'utiliser le théorème de Furstenberg-Sárközy dans la preuve, mais la manière de le faire est loin d'être évidente.

Avec un doctorant, Thomas Karam, j'ai prouvé un résultat qui exclut une grande classe de contre-exemples potentiels à l'énoncé. Il y a encore une grande distance entre ce résultat et une solution complète à la conjecture, mais certaines des idées qui entrent dans la preuve pourraient bien être utiles, et certains des énoncés intermédiaires que nous avons prouvés ont un intérêt indépendant et ont mené à plusieurs autres questions intéressantes que nous poursuivons activement.

J'ai également terminé un projet avec une ancienne doctorante, Katarzyna Wyczesany, dans lequel nous avons résolu un problème étroitement lié à une question de Vitali Milman concernant la géométrie convexe à haute dimension. Un célèbre théorème de Dvoretzky stipule que tout ensemble convexe symétrique de dimension suffisamment élevée a une section centrale proche d'un ellipsoïde à k dimensions. Milman a demandé si, si l'on ajoute l'hypothèse que l'ensemble original n'est pas trop éloigné d'une sphère (dans un sens qui peut être rendu complètement précis), on peut obtenir la conclusion plus forte qu'il est possible de projeter le corps convexe vers le bas dans l'espace engendré par l'ellipsoïde de dimension k de telle sorte que la quantité de « surplomb » est très faible. Nous avons trouvé un contre-exemple avec $k = 2$ si l'ellipsoïde de dimension k doit être non seulement une ellipse mais un cercle, et si la projection doit être une projection orthogonale. Cela indique que la réponse à la question initiale de Milman est très probablement négative. Il est peut-être possible d'étendre nos techniques pour le prouver.

Au cours de l'année, j'ai reçu une subvention pour constituer une équipe à Cambridge qui m'aidera à poursuivre une approche que j'ai depuis de nombreuses années de la preuve automatique de théorèmes. Le travail sur ce projet vient de commencer, mais il est encore à un stade initial, donc je n'en dirai pas plus ici. Toutefois, je m'attends à ce qu'il figure en bonne place dans mes résumés de recherche dans les années à venir.

PUBLICATIONS

Gowers W.T. et Karam T., « Equidistribution of high-rank polynomials with variables restricted to subsets of F_p », 2022, https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.04932.

Gowers W.T. et Wyczesany K., « A counterexample to a strengthening of a question of V.D. Milman », 2021, https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.03023.

Gowers W.T. et Wyczesany K., « High-dimensional tennis balls », *Combinatorial Theory*, vol. 2, n° 2, 2022, art. 15, https://doi.org/10.5070/C62257881.