Annuaire du Collège de France

122e année

2021
2022

Résumé des cours et travaux

COLLÈGE DE FRANCE
1530

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET APPLICATIONS

Pierre-Louis Lions
Membre de l'Institut (Académie des sciences)
et de l'Académie des technologies, professeur au Collège de France

La série de cours « Sur les équations de transport » est disponible en audio et en vidéo sur le site internet du Collège de France (https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/sur-les-equations-de-transport).

ENSEIGNEMENT

COURS – SUR LES ÉQUATIONS DE TRANSPORT

Le cours a eu lieu du 12 novembre 2021 au 21 janvier 2022.

Introduction

Le cours de cette année a porté sur les équations de transport (linéaires et non linéaires) correspondant à des champs de vecteurs peu réguliers, ainsi que sur les équations différentielles ordinaires associées. Il s'agit d'un sujet classique qui remonte aux travaux de Joseph Liouville (professeur au Collège de France) au XIX^{e} siècle. La première extension de la théorie classique à des champs de vecteurs peu réguliers (à dérivées premières intégrables et à divergence bornée) est due à R.J. Di Perna et P.-L. Lions (théorie dite « de Di Perna-Lions »). Depuis, différents auteurs ont tenté d'affaiblir les hypothèses de régularité et l'objectif essentiel du cours a été de mettre en lumière quelques situations où il est possible de traiter des champs de vecteurs moins réguliers mais avec des hypothèses géométriques de type monotonie, anti-monotonie, croissance…

P.-L. Lions, « Équations aux dérivées partielles et applications », *Annuaire du Collège de France. Résumé des cours et travaux*, 122^{e} année : *2021-2022*, 2025, p. 31-39, https://journals.openedition.org/annuaire-cdf/20412.

Les équations de transport (linéaires) étudiées dans le cours sont les équations non conservatives

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + (B \cdot \nabla)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d$$

ou conservatives

(2) $$\frac{\partial f}{\partial t} - \text{ div } (Bf) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d$$

ainsi que les équations différentielles ordinaires

(3) $$\dot{X} + B(X) = 0 \text{ pour } t \geq 0,\ X|_{t=0} = x \in \mathbb{R}^d$$

où u, f sont des fonctions inconnues scalaires, $d \geq 1$, le champ de vecteurs B est supposé ne dépendre que de $x \in \mathbb{R}^d$ (l'extension à des champs de vecteurs non homogènes en temps ne présentant aucune difficulté...) et au moins localement intégrable sur $\mathbb{R}^d(L^1_{\text{loc}})$.

Enfin, signalons que l'extension aux équations différentielles stochastiques a été traitée en cours.

Le cas où B est semi-monotone

On suppose dans cette section que B vérifie

(4) $$(B(x) - B(y), x - y) \geq -C_0|x - y|^2, x, y \in \mathbb{R}^d$$

pour une constante $C_0 \geq 0$. Et on note (x, y) le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^d$, et $|x|$, la norme euclidienne associée. Signalons que des extensions à des métriques générales sont données dans le cours.

Il convient de noter que B n'est pas nécessairement continu mais (4) implique que l'on peut toujours définir un ensemble convexe fermé borné encore noté $B(x)$ correspondent à « toutes » les valeurs possibles de B au point x. Bien sûr, si B est continu, cet ensemble se réduit à la valeur de B en x.

Il est bien connu que (3), réécrit plus précisément comme

(5) $$\dot{X} + B(X) \ni 0 \text{ pour } t \geq 0, X|_{t=0} = x \in \mathbb{R}^d ,$$

admet une unique solution $X(t, x)$ qui définit un semi-groupe lipschitzien, d'applications lipschitziennes en x vérifiant

(6) $$|X(t, x) - X(t, y)| \leq c^{c \cdot t}|x - y| .$$

Formellement, et c'est le cas si B est Lipschitz, « la » solution de (1) devrait être donnée pour une condition initiale générale $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire que la solution de (1) vérifie

(7) $$u|_{t=0} = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}^d,$$

par la formule

(8) $$u(x,t) = u_0(X(t,x)) \ \text{ pour } \ t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$$

qui définit, bien sûr, une fonction u dans $C_0(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty[)$.

Le résultat démontré dans le cours est le suivant :

THÉORÈME 1

La formule (8) définit une solution de viscosité généralisée de (1). Et une telle solution est unique.

Rappelons la notion de solution de viscosité généralisée, nécessaire par le fait que B n'est pas nécessairement continu. Soit $u \in C(\mathbb{R}^d \times]0, \infty[)$, on dit que u est solution de viscosité de (1) si pour tout $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times]0, \infty[)$ telle que $u - \varphi$ admet un point de maximum en (x_0, t_0) (resp. minimum) local, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_0, t_0) + \liminf \left\{ \zeta \cdot \nabla \varphi(y,s))/\zeta \in B'(y,s), y \to x_0, b \to t_0 \right\} \leq 0 \ \ (\text{resp.} \geq 0).$$

Remarque :

Il est expliqué dans le cours pourquoi il n'est pas possible de résoudre (1) pour $u_0 \in L^p (1 \leq p < \infty)$ sans hypothèse supplémentaire sur B.

Pour l'équation conservative (2), sa résolution est obtenue dans le cours par dualité avec l'équation 1. Et le cours précise la stabilité des solutions de (1) ou de (2) par rapport à B.

Le cas où $(-B)$ est semi-monotone

On suppose maintenant que B est à croissance au plus linéaire à l'infini et que $(-B)$ vérifie (4) *i.e.*

(9) $$(B(x) - B(y), x - y) \leq C_0 |x - y|^2, x, y \in \mathbb{R}^d$$

et on note X le flot associé à $-B$ (voir section 2) *i.e.* la solution de

(10) $$\dot{X} \in B(X) \ \text{ pour } \ t \geq 0 \ \ , \ \ X|_{t=0} = x \in \mathbb{R}^d.$$

Et on note $J(t, x)$ le jacobien de la transformation $(x \mapsto X(t, x))$ *i.e.*

(11) $$J(x,t) = \det \left(\frac{\partial X}{\partial x} (t,x) \right) \ \ p.p. \ \ x, \forall\, t \geq 0.$$

On vérifie que $J \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \mathrm{T}]) \cdot (\forall T < \infty)$ et que l'on a

(12) $$0 \leq J \leq e^{C_0 \cdot t} \ \ p.p. \ \ x, \forall t \geq 0.$$

Dans le cours, nous avons tout d'abord étudié l'équation conservative (2) avec une condition initiale

(13) $$f|_{t=0} = f_0 \;\; p.p. \;\; \mathbb{R}^d$$

où $f_0 \in L^P$, $1 < p \geq \infty$.

Formellement, des bornes L^P et l'unicité découlent du calcul suivant ($\forall 1 \leq p < \infty$)

$$\frac{d}{dt}\int |f|^p = -(p>1)\int B\cdot\nabla f|f|^{p-2}f = -\frac{p-1}{p}\int B\cdot\nabla|f|^p$$
$$= \frac{p-1}{p}\int(-\operatorname{div} B)|f|^p \leq C_0\frac{p-1}{p}\int|f|^p$$

Nous montrons dans le cours pourquoi ce calcul n'est pas valable en général et qu'il n'y a pas d'unicité des solutions (au sens des distributions) de (2)-(13) dans $L_t^\infty(L_x^1 \cap L_x^\infty)$. Il convient donc de définir précisément la notion de solution. En s'inspirant d'une idée de F. Bouchut, F. James et S. Mancini, nous avons introduit la définition suivante

(14) $$f(x,t) = f_0(X(t,x))J(x,t) \;\; p.p. \; x, \forall\, t \geq 0$$

THÉORÈME 2

La formule (14) définit un semi-groupe continu sur $L^p(1 \leq p < \infty)$.
De plus, si $f_0 \in L^p(1 \leq p \leq \infty)$, *f résout (2)-(13) (au sens des distributions).*

Et il est établi dans le cours que cette solution est l'unique limite de solutions correspondant à la régularisation de B ou à l'ajout d'un terme de viscosité du type $(-e\Delta f)$.

Il est alors possible de définir par dualité les solutions de (1)-(7), ce qui permet d'obtenir un semi-groupe continu dans $L^P(1 \leq p < \infty)$. De plus, on démontre l'existence d'un flot p.p. $Y(t,x)$ associé à (10) telle que la solution de (1)-(7) peut se représenter par $u(x,t) = u_0(Y(t,x))$ si $u_0 \in L^P(1 \leq p \leq \infty)$. Ce flot est expansif *i.e.* vérifie

(15) $$|Y(t,x) - Y(t,y)| \geq e^{-C_0 t}|x-y|, \;\; p.p. \; x,y, \forall\, t \geq 0.$$

Et il est l'inverse à gauche de X

(16) $$Y(t, X(t,x)) = x \;\; p.p. \; x$$

De plus, ces propriétés caractérisent le flot Y. Enfin, grâce à une estimation BV due à F. Bouchut, F. James et S. Mancini, la stabilité des solutions u et du flot Y par approximation ou régularisation de B ou par ajout d'un terme de viscosité (pour u) ou d'un Brownien pour Y a été établie dans le cours.

Le cas où $(-B)$ est croissante

Le dernier cas considéré dans le cours est le cas où $B \in L^\infty_{\text{loc}}$ et vérifie pour tous $1 \leq i,j \leq 1$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_j} \geq 0 \tag{17}$$

(au sens des distributions) ce qui est équivalent à dire que B_i est croissante (au sens large) en x_j $(\forall_{i,j})$. Il est connu que cette propriété entraîne non seulement que $B_i(\forall i)$ *i.e.* B est continu p.p. mais qu'il est également différentiable p.p. Enfin, on choisit le représentant « cadleg » de $B_i(\forall i)$ de sorte que $B(x) = \text{lim inf ess}\ \{B(y)/y \geq x)$, $\underline{B}(x) = \text{lim sup ess}\ B(y)/y \leq x, y \neq x)$ (où $a \leq b$ si $a_i \leq b_i \forall_i$). Bien sûr, $[B\_(x), B(x)]$ (où $[a, b] = \{c/a \leq c \leq b)$ représente l'ensemble des valeurs possibles pour B au point x. On suppose en outre que B est à croissance au plus linéaire à l'infini *i.e.*

$$|B(x)| \leq C(1 + |x|) \quad p.p.x \tag{18}$$

pour une constante positive C.

Et on considère l'équation différentielle multivoque

$$\dot{X} + [B_-(X), B(X)] = 0 \;\; p.p.\ t \geq 0, X|_{t=0} = x \tag{19}$$

où X est lipschitzien.

On a alors le théorème 3.

THÉORÈME 3

i) Toute solution X de (19) vérifie :

$$X_- \leq X \leq X^+ \;\; \forall t \geq 0, \tag{20}$$

ii) X^+ *est la solution maximale de (19) et vérifie*

$$\dot{X}^+ + B_-(X^+) = 0 \;\; p.p.\ t. \tag{21}$$

iii) X^- *est la solution minimale de (19) et vérifie*

$$\dot{X}^- + B(X^-) = 0 \;\; p.p.\ t. \tag{22}$$

iv) X^- *et* X^+ *sont croissantes en x*

v) $X^- = X^+ \; \forall t \geq 0$, *p.p. x.*

Il est également possible dès lors d'étudier la régularisation de (19) par régularisation de B ou par adjonction d'un mouvement brownien. L'étude de l'équation (1) est alors menée en considérant la formule (8), ce qui permet d'obtenir l'existence, l'unicité et la stabilité d'un semi-groupe de solutions dans $L^p (1 \leq p \leq \infty)$, stable par régularisation de B ou par ajout d'un terme de viscosité. De plus, si u_0 est semi-croissante, alors u l'est également, et on peut caractériser une telle solution.

Enfin, les solutions de (2) sont alors obtenues par dualité. Signalons pour conclure que l'essentiel des résultats démontrés dans le cours a été obtenu en collaboration avec B. Seeger.

SÉMINAIRE – MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Le séminaire a eu lieu du 12 novembre 2021 au 24 juin 2022.

Séminaire 1 – Matrices aléatoires et EDP

Pierre-Louis Lions, le 12 novembre 2021

Séminaire 2 – Distance de Monge-Kantorovich pour les EDP et méthode du couplage

Benoît Perthame (laboratoire J.-L. Lions, Sorbonne Université), le 19 novembre 2021

Séminaire 3 – Sur une version finiment échangeable du théorème de Hewitt et Savage

Guillaume Carlier (Ceremade, université Paris Dauphine), le 26 novembre 2021

Séminaire 4 – Transfert radiatif dans un fluide : analyse mathématique et simulations numériques

François Golse (École polytechnique, centre de mathématiques Laurent Schwartz), le 3 décembre 2021

Séminaire 5 – *A Mean Field Game Approach to Bitcoin Mining*

Louis Bertucci (institut Louis Bachelier), le 10 décembre 2021

Séminaire 6 – Formes optimales et contrôle optimal : existence, méthodes oscillatoires, applications en réaction-diffusion

Idriss Mazari (Ceremade, université Paris Dauphine), le 7 janvier 2022

Séminaire 7 – *Moment Constrained Optmimal Transport Problem: Application to Quantum Chemistry*

Virginie Ehrlacher (Cermics, ENPC), le 14 janvier 2022

Séminaire 8 – Optimisation en temps long et stationnarité : le problème du *turnpike*

Emmanuel Trélat (laboratoire J.-L. Lions, Sorbonne Université), le 28 janvier 2022

Séminaire 9 – *Network Approximation in High Contrast Homogenization*

David Gérard-Varet (IMJ-PRG, université Paris Cité), le 4 février 2022

Séminaire 10 – *New Results on the Lieb-Thirring Inequality*

Mathieu Lewin (Ceremade, université Paris Dauphine), le 11 février 2022

Séminaire 11 – Statistique de réaction et relation de Hill pour la dynamique de Langevin

Julien Reygner (Cermics, ENPC), le 11 mars 2022

Séminaire 12 – Optimisation en temps long et stationnarité : le problème du *turnpike*

Emmanuel Trélat (laboratoire J.-L. Lions, Sorbonne Université), le 18 mars 2022

Séminaire 13 – Construction de solutions explosives pour les équations de Navier Stokes compressible tri dimensionnelles

Frank Merle (IHES et C.Y. Cergy Paris Université), le 25 mars 2022

Séminaire 14 – Étude d'un problème non linéaire parabolique « *forward-backward* »

Anne-Laure Dalibard (laboratoire J.-L. Lions, Sorbonne Université), le 13 mai 2022

Séminaire 15 – Schémas positifs pour l'équation de diffusion sur maillages déformés

Xavier Blanc (laboratoire J.-L. Lions, université Paris Cité), le 20 mai 2022

Séminaire 16 – Méthodes numériques pour le calcul de résonances dans des cristaux avec défauts

Antoine Levitt (Inria & Cermics, ENPC), le 3 juin 2022

Séminaire 17 – Méthodes de *scattering* à la Kato-Lax pour les plasmas (et autres)

Bruno Després (laboratoire J.-L. Lions, Sorbonne Université), le 10 juin 2022

Séminaire 18 – Autour de la modélisation du graphène simple et double couche

Éric Cancès (Cermics, ENPC), le 17 juin 2022

Séminaire 19 – Sur un système de particules en interaction non markovienne et singulière et sa limite champ moyen

Milica Tomasevic (CMAP, École polytechnique), le 24 juin 2022

RECHERCHE

MISSIONS, INVITATIONS, CONFÉRENCES

- Conférence aux Journées FIME, EDF R&D (Palaiseau), le 22 septembre 2021 ;
- conférence au congrès « Introduction to the area of distributed solutions », IMSI-NSF à Chicago (États-Unis ; visioconférence), le 4 octobre 2021 ;
- séminaire à l'Institut d'intelligence artificielle et télécommunications à Abu Dhabi (Émirats arabes unis ; visioconférence), le 12 octobre 2021 ;
- conférence au colloque « Masterminds, masterclasses », à Hong-Kong (visioconférence), le 15 octobre 2021 ;
- conférence au colloque « Machine Learning and Control », au Lagrange Mathematics and Computation Research Center, à Paris (visioconférence), le 30 novembre 2021 ;
- conférence au congrès « Nobel Symposium on Game Theory », à Stockholm (visioconférence), le 17 décembre 2021 ;
- conférence au congrès « Mean Field Games », à Montréal (visioconférence), le 12 avril 2022 ;
- séminaire, SCOR, à Paris (visioconférence), le 28 juin 2022 ;
- conférence au congrès pour honorer la mémoire de Roland Glowinski, à l'université Pierre-et-Marie-Curie, à Paris, le 5 juillet 2022 ;
- conférence à l'International PDE Conference 2022, à Oxford (visioconférence), le 20 juillet 2022.

RESPONSABILITÉS COLLECTIVES ET FONCTIONS DIVERSES

- Membre de l'Académie des sciences, de l'Académie des technologies, de l'Académie des sciences d'Italie, d'Argentine, du Brésil, du Chili et de Belgique, de l'Istituto Lombardo et de l'Académie de Naples, de la TWAS, de l'Academia Europea ;
- directeur scientifique du LabEx ILB International ;
- président du conseil scientifique de l'institut Louis-Bachelier ;
- président du Conseil scientifique de la chaire de Finance et développement durable, université Paris-Dauphine ;
- président du conseil scientifique de la Fondation Lagrange ;
- président du conseil scientifique de l'Observatoire de finance durable ;
- Senior Fellow, Institute of Advanced Study, City University of Hong Kong ;
- membre du Scientific Advisory Panel de l'European Mathematical Society ;

- membre du conseil scientifique de la Fondation SCOR pour la science ;
- membre fondateur du Comité international de l'« International Summer School of Applied Mathematics », Morningside Institute, Chinese Academy of Sciences ;
- membre de l'International Advisory Board de l'Institute of Mathematical Sciences de l'Imperial College ;
- membre de la Société des amis du Palais de la découverte ;
- membre de l'International Advisory Board de la Scuola di dottorato in scienze astronomiche, chimiche, fisiche et mathematiche « Vito Volterra » ;
- rédacteur en chef du *Journal de mathématiques pures et appliquées* ;
- éditeur de plus de 45 revues internationales.

PUBLICATIONS

Bertucci C., Bertucci L., Lasry J.-M. et Lions P.-L., « Economic modelling of the Bitcoin mining industry », *Université Paris-Dauphine Research Paper*, n° 3907822, 12 mai 2022, https://ssrn.com/abstract=3907822, http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3907822.

Bertucci C., Debbah M., Lasry J.-M. et Lions P.-L., « A spectral dominance approach to large random matrices », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, vol. 164, 2022, p. 27-56, https://doi.org/10.1016/j.matpur.2022.06.001.