

Technologies quantiques émergentes

Pascale Senellart

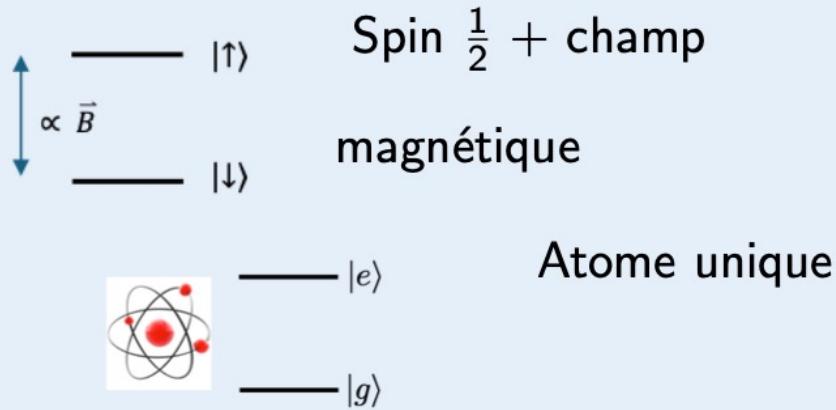
13 janvier 2026

Encoder l'information sur la lumière

Deux systèmes modèles : spin 1/2 et photons

Atome - spin $\frac{1}{2}$

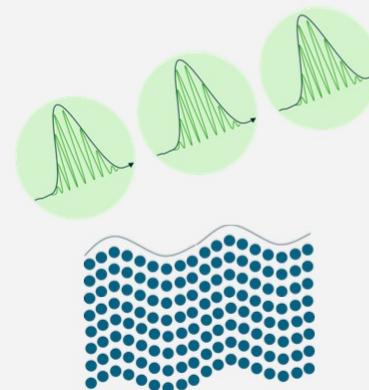
Système modèle - **Qubit "stationnaire"**



Photon - oscillateur harmonique

Système modèle - **Qubit "volant"**

Oscillateur harmonique
 $\hat{a}^\dagger |0\rangle = |1\rangle$ Seconde quantification (boson)

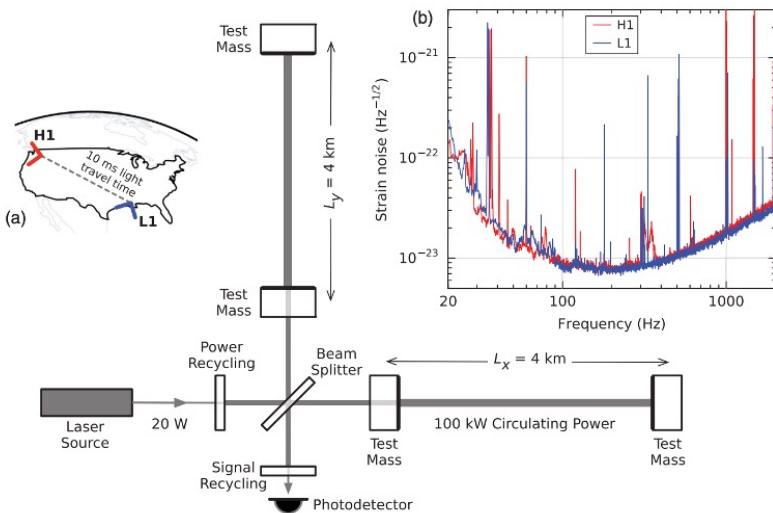


Photons, états quantiques de la lumière
 Phonons, ondes acoustiques

- ▶ **Lumière quantique**
- ▶ **Phonons dans les solides**
- ▶ **Mode vibratoire d'un atome ou d'une molécule**
- ▶ **Résonateurs mécaniques**
- ▶ **Mouvement d'ions confinés**

Lumière : quel rôle dans les technologies quantiques

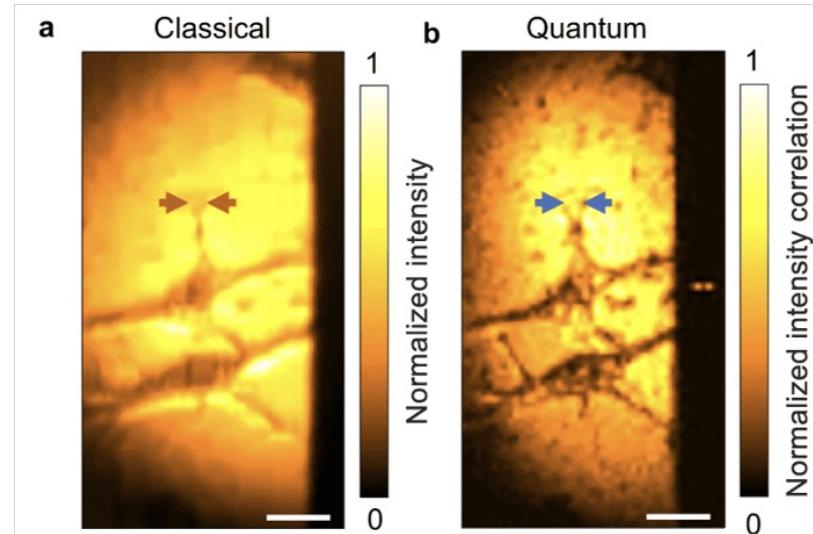
Capteurs quantiques à base de lumière quantique



Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016)

Détection d'ondes gravitationnelles : sensibilité augmentée grâce à l'utilisation d'états comprimés de la lumière.

Cf. colloque 16 avril

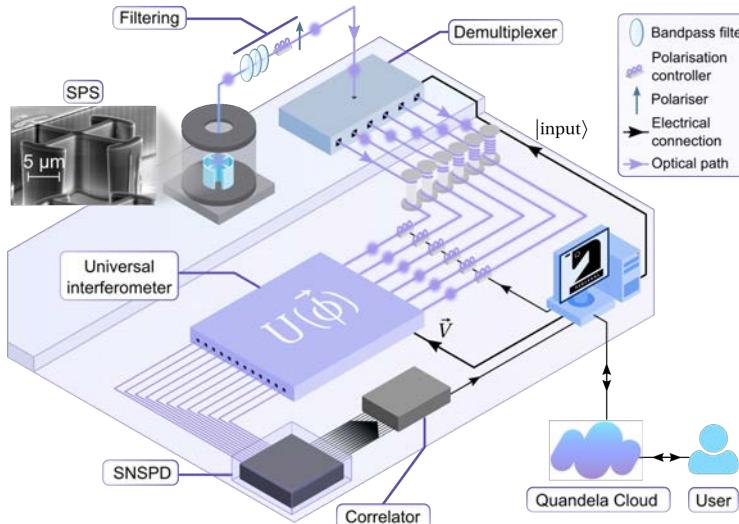


Nature Communications 14, 2441 (2023)

Imagerie biologiques : résolution augmentée grâce à l'utilisation de photons intriqués.

Lumière : quel rôle dans les technologies quantiques

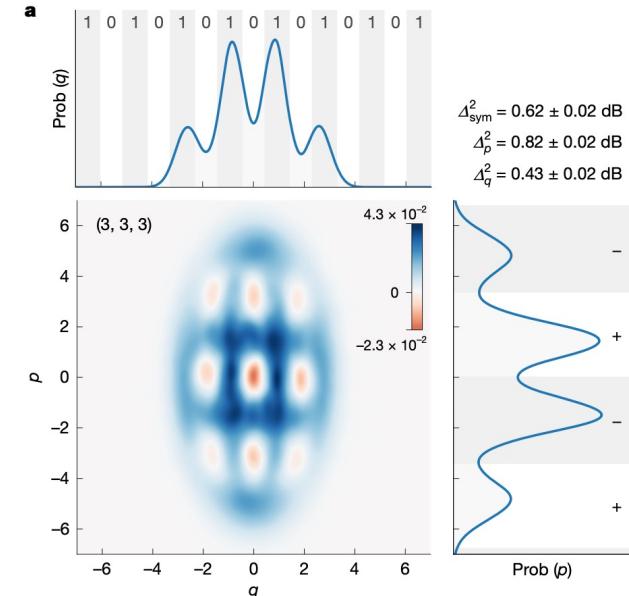
Calcul quantique optique



Nature Photonics 18, 603 (2024)

Prototype d'ordinateur quantique à base de photons uniques (Quandela).

Cf. cours 5

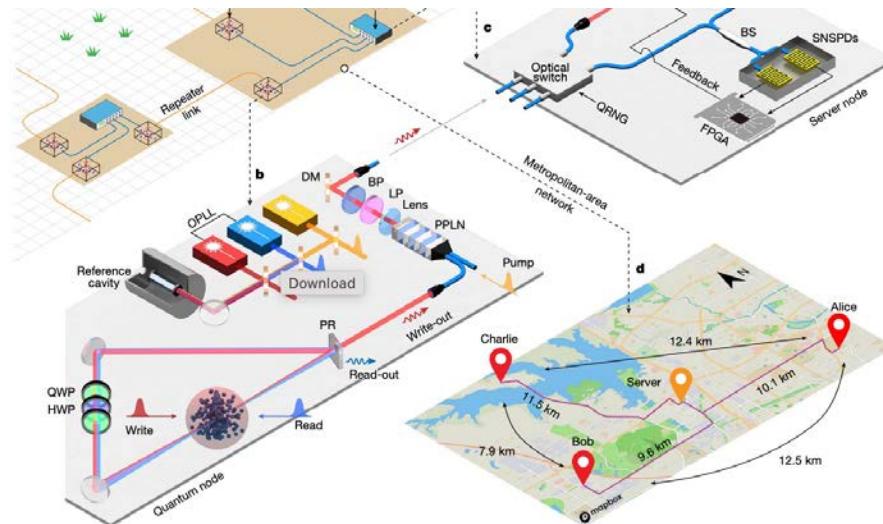


Nature 642, 587 (2025)

Génération d'états pour la correction d'erreur pour le calcul quantique à variables continues (Xanadu)

Lumière : quel rôle dans les technologies quantiques

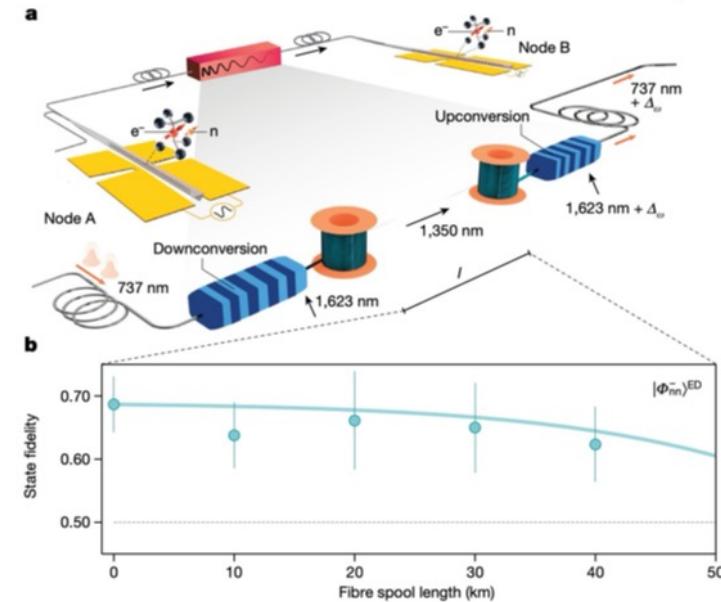
Réseaux quantiques



Nature 629, 579 (2024)

Intrication de trois mémoires atomiques séparées d'une dizaine de kilomètres dans un réseau de communication urbain.

Cf. cours 8

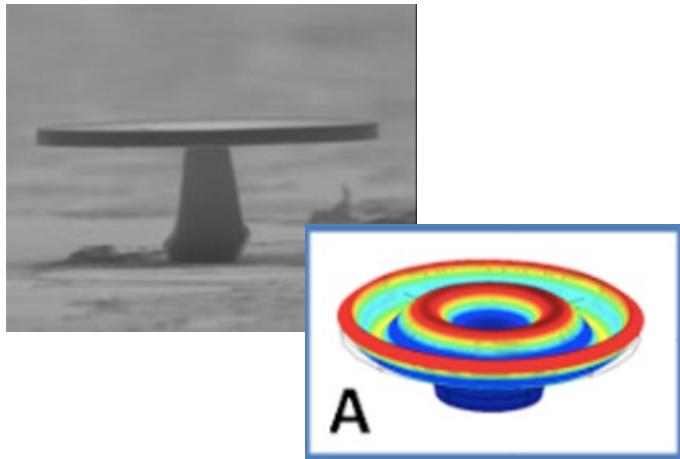


Nature 629, 573 (2024)

Intrication de deux mémoires quantiques à base de défaut de SiV dans le diamant sur quelques dizaines de kilomètres en laboratoire.

Vibrations, phonons : quel rôle dans les technologies quantiques

Transduction quantique via des modes de vibrations

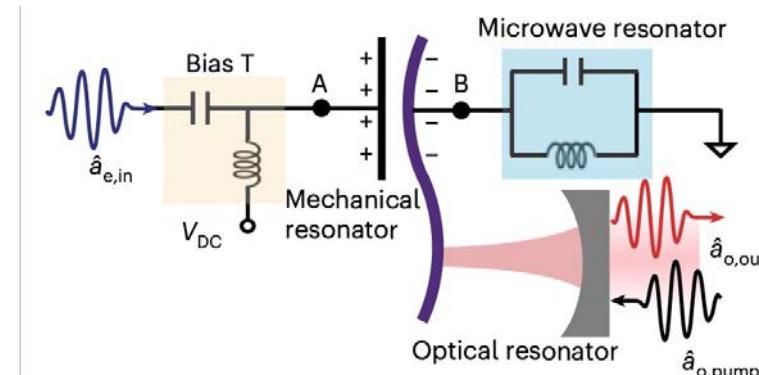


Phys. Rev. Lett. 105, 263903 (2010)

Nature Nanotechnology 10, 810 (2015)

Capteurs à base de résonateurs optomécaniques

Cf. cours 7



Nature Nanotechnology 20, 602 (2025)

Transfert d'information d'un photon optique à un photon microonde par couplage à un résonateur mécanique

Cf. cours 8

Encoder l'information sur la lumière

Description quantique de la lumière

Encoder l'information sur des photons



1 qubit
2 qubits

“Variables discrètes”

Formalisme matrice densité

Encoder l'information sur les champs

“Variables continues”

L'oscillateur harmonique comme système modèle

Rappel : oscillateur harmonique

Hamiltonien de référence

Cas d'une particule de masse m , dans
un potentiel harmonique

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

avec $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

Rappel : oscillateur harmonique

Hamiltonien de référence

Cas d'une particule de masse m , dans un potentiel harmonique

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

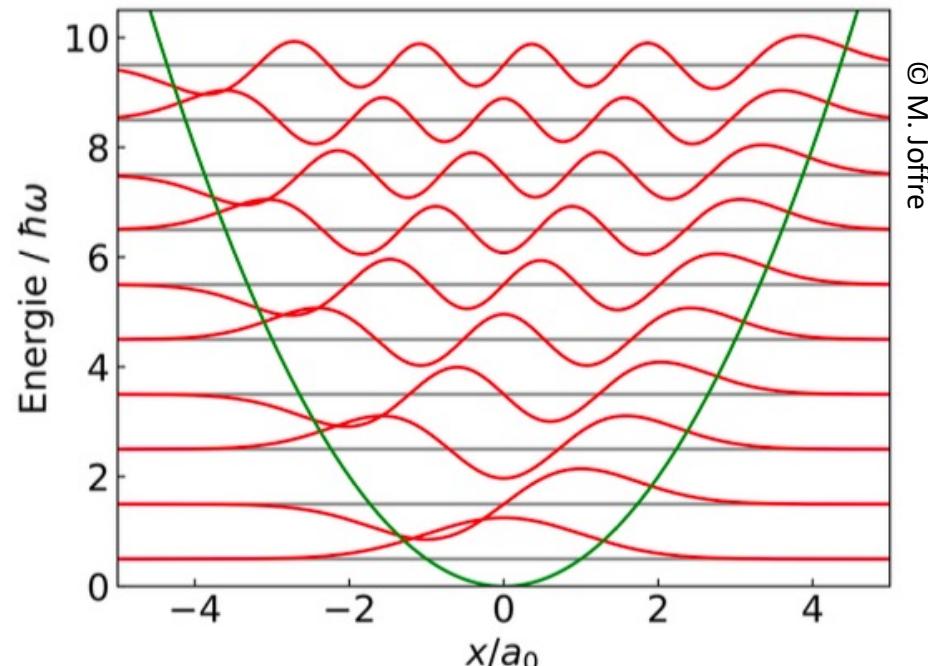
avec $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \end{aligned}$$

Technologies quantiques

$$\varphi_n(x) = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2^n n! a_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a_0^2}\right) H_n\left(\frac{x}{a_0}\right)$$

$$H_n(X) = (-1)^n e^{X^2} \frac{d^n}{dX^n} e^{-X^2}$$



Rappel : oscillateur harmonique

Hamiltonien de référence

Cas d'une particule de masse m , dans un potentiel harmonique

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

avec $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

Opérateurs d'annihilation et création :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right).$$

Ils satisfont la relation : $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Le Hamiltonien se réécrit alors :

$$\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

où \hat{N} est l'opérateur nombre :

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad \text{états propres } \hat{N} |n\rangle = n |n\rangle.$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Equation de Maxwell dans l'espace réciproque,
dans le vide

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-3/2} \iiint d^3\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$$

$$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$i\mathbf{k}\times\mathbf{E} = -\frac{d}{dt} \mathbf{B}$$

$$i\mathbf{k}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \mathbf{E}$$

Variables conjuguées

A_\perp et E_\perp variables conjuguées.

$$\frac{dA_\perp}{dt} = -E_\perp$$

$$\frac{dE_\perp}{dt} = c^2 k^2 A_\perp$$

$$\alpha = \frac{1}{2C} (\omega A_\perp - i E_\perp) \quad C = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2L^3}}$$

Potentiel vecteur en jauge de Coulomb

$$\mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp$$

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{d}{dt} \mathbf{A}_\perp \text{ avec } \mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_\perp = 0$$

Lumière : description modale classique

Equation de Maxwell dans l'espace réciproque,
dans le vide

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-3/2} \iiint d^3\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

$$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$$

$$i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$i\mathbf{k}\times\mathbf{E} = -\frac{d}{dt}\mathbf{B}$$

$$i\mathbf{k}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \mathbf{E}$$

Energie du champ électromagnétique

$$H = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r (|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + c^2|\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2)$$

Potentiel vecteur en jauge de Coulomb

$$\mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_\perp$$

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{d}{dt} \mathbf{A}_\perp \text{ avec } \mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_\perp = 0$$

Lumière : seconde quantification

Discrétisation de $\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{k}_\ell$

Energie du champ électromagnétique

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\ell} \mathbf{E}_{\perp\ell}(k_{\ell}, t) e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\omega_{\ell} = c|k_{\ell}|$$

$$|B_{\ell}|^2 = |k_{\ell}|^2 |A_{\perp\ell}|^2$$

$$H = \sum_{\ell} H_{\ell}$$

$$H_{\ell} = \frac{\varepsilon_0}{2L^3} (|E_{\perp\ell}|^2 + \omega_{\ell}^2 |A_{\perp\ell}|^2)$$

Hamiltonien

$$\hat{H} = \sum_{\ell} \hbar\omega_{\ell} \left(\hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} + \frac{1}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\ell} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega_{\ell}}{\hbar L^3}} \hat{\mathbf{A}}_{\perp\ell} - i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\hbar \omega_{\ell} L^3}} \hat{\mathbf{E}}_{\perp\ell} \right) \\ \hat{a}_{\ell}^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega_{\ell}}{\hbar L^3}} \hat{\mathbf{A}}_{\perp\ell}^{\dagger} - i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\hbar \omega_{\ell} L^3}} \hat{\mathbf{E}}_{\perp\ell}^{\dagger} \right) \end{aligned}$$

$$[\hat{a}_{\ell}, \hat{a}_{\ell'}^{\dagger}] = \delta_{\ell\ell'} , \quad [\hat{a}_{\ell}, \hat{a}_{\ell'}] = [\hat{a}_{\ell}^{\dagger}, \hat{a}_{\ell'}^{\dagger}] = 0$$

Cas général

$$|\psi\rangle = \sum_{\ell} \sum_{n_{\ell}} C_{n_{\ell}} |n_1, \dots, n_{\ell}, \dots\rangle \text{ with } \sum_{\ell, n_{\ell}} |C_{n_{\ell}}|^2 = 1$$

Cas monomode

$$\omega_{\ell} = c|k_{\ell}|$$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{n_{\ell}} C_{n_{\ell}} |n_1 = 0, \dots, n_{\ell} - 1 = 0, n_{\ell}, n_{\ell} + 1 = 0, \dots\rangle \\ &= \sum_{n_{\ell}} C_{n_{\ell}} |n_{\ell}\rangle \end{aligned}$$

Décomposition modale des champs

$$\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}, t) = \sum_\ell \frac{C_\ell}{\omega_\ell} \epsilon_\ell \alpha_\ell e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} + \text{c.c.}$$

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}, t) = \sum_\ell (C_\ell \epsilon_\ell \alpha_\ell e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} + \text{c.c.})$$

$$\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r}, t) = \sum_\ell \left(\frac{C_\ell}{\omega_\ell} \mathbf{k}_\ell \times \epsilon_\ell \alpha_\ell e^{i(\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r} - \omega_\ell t)} + \text{c.c.} \right)$$

ℓ correspond à une onde plane de vecteur \mathbf{k}_ℓ de polarisation ϵ_ℓ

Opérateurs de champs

$$\hat{\mathbf{E}}_\perp(\mathbf{r}) = i \sum_\ell E_\ell \epsilon_\ell (\hat{a}_\ell e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_\ell^\dagger e^{-i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}})$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = i \sum_\ell E_\ell \frac{\mathbf{k}_\ell \times \epsilon_\ell}{\omega_\ell} (\hat{a}_\ell e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_\ell^\dagger e^{-i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}})$$

$$\hat{\mathbf{A}}_\perp(\mathbf{r}) = \sum_\ell \frac{E_\ell}{\omega_\ell} \epsilon_\ell (\hat{a}_\ell e^{i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}} + \hat{a}_\ell^\dagger e^{-i\mathbf{k}_\ell \cdot \mathbf{r}})$$

$$E_\ell = \sqrt{\frac{\hbar \omega_\ell}{2 \varepsilon_0 L^3}}.$$

Etat à un photon

$$\hat{N} |1\rangle = |1\rangle$$

Cas monomode $\omega_\ell = c|k_\ell|$

$$|\psi\rangle = |1_\ell\rangle$$

Etats quantiques de la lumière : état cohérent

Etat quasi classique

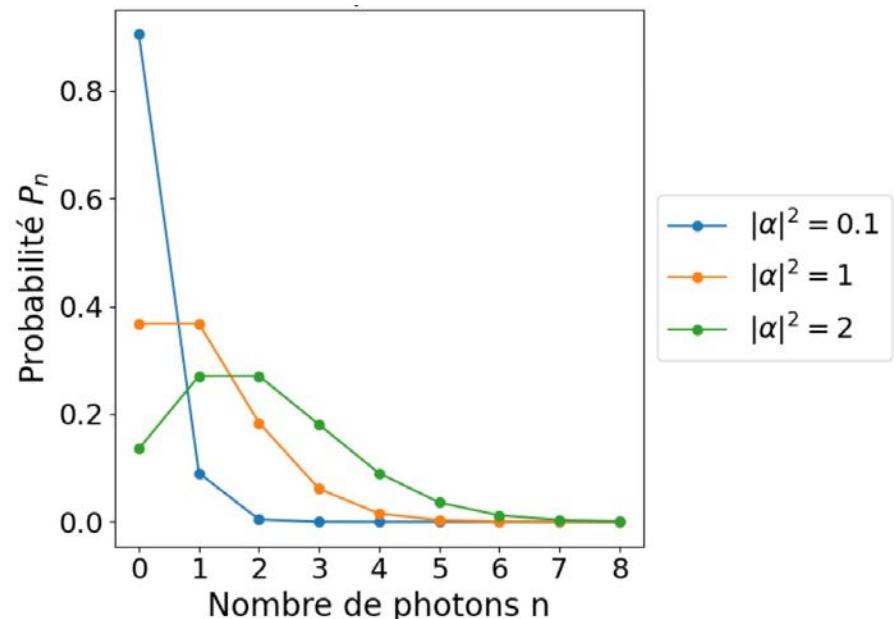
Etat cohérent $|\alpha\rangle$ - définition :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

On montre que :

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

Statistique de photons de Poisson de moyenne
 $\bar{n} = |\alpha|^2$.



Mesurer des photons uniques

Etats quantiques de la lumière : photon unique

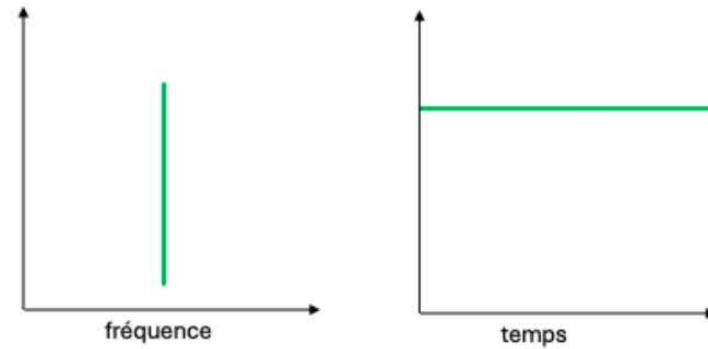
Etat à un photon

$$\hat{N} |1\rangle = |1\rangle$$

Cas monomode

$$\omega_\ell = c|k_\ell|$$

$$|\psi\rangle = |1_\ell\rangle$$



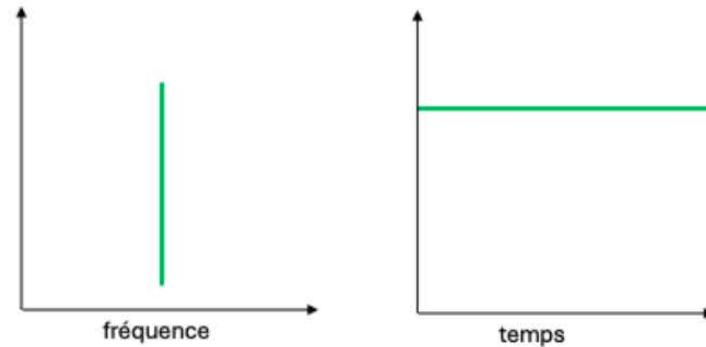
Etats quantiques de la lumière : photon unique

Etat à un photon

$$\hat{N} |1\rangle = |1\rangle$$

Cas monomode

$$|\psi\rangle = |1_\ell\rangle$$

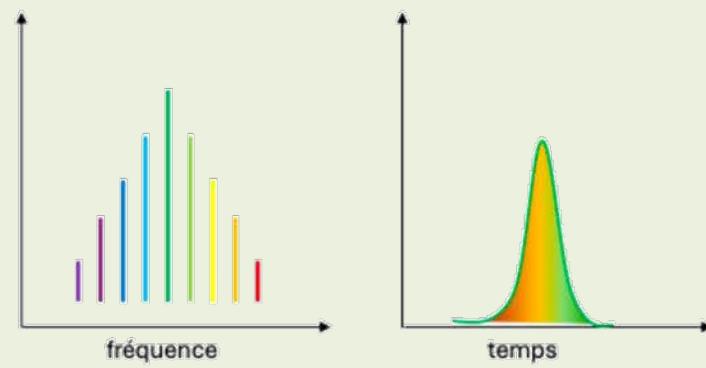


Impulsion à un photon

$$|1\rangle = \sum_{\ell} C_{\ell} |0, \dots, 0, n_{\ell} = 1, 0, \dots\rangle$$

avec

$$\sum_{\ell} |C_{\ell}|^2 = 1$$



Détection intensité lumineuse

Principe de la détection

Photodiode, Photomultiplicateur :

Absorption d'un photon :

Signal lié à l'intensité du champ électrique :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{r}) &= i \sum_{\ell} E_{\ell} \epsilon_{\ell} \left(\hat{a}_{\ell} e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_{\ell}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \right) \\ &= \hat{E}_{\perp}^{(+)}(\mathbf{r}) + \hat{E}_{\perp}^{(-)}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

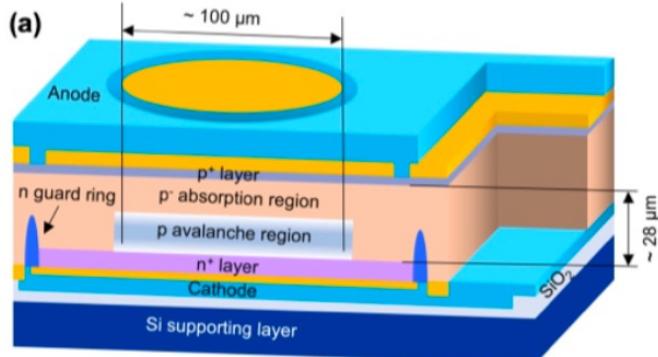
Signal détecté :

$$\begin{aligned}w(t) &\propto \langle \hat{E}_{\perp}^{(-)}(t) \hat{E}_{\perp}^{(+)}(t) \rangle \\ &\propto \langle \hat{a}_{\ell}^{\dagger} \hat{a}_{\ell} \rangle = \langle \hat{N}_{\ell} \rangle.\end{aligned}$$

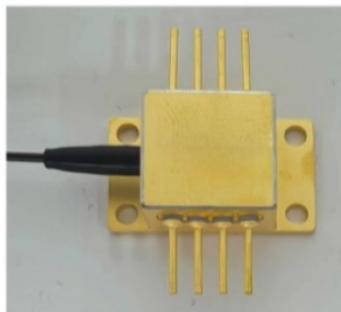
Mesure: détecteurs de photons uniques

Photodiodes à avalanche

Principe de fonctionnement



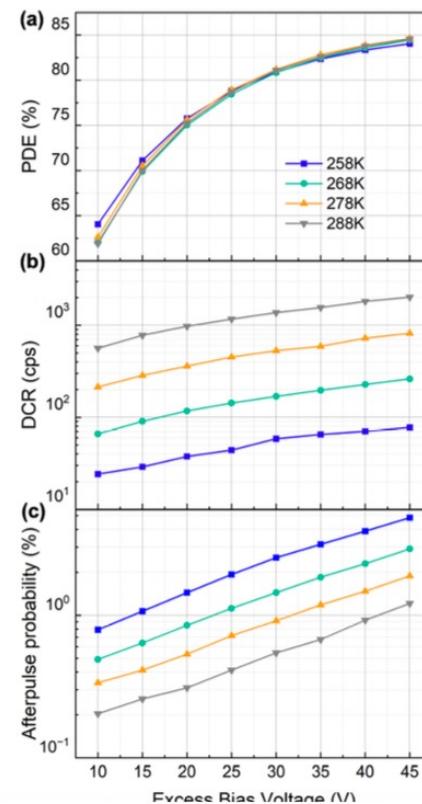
(c)



arxiv.org 2507.18172

$T \sim 300 K$

Exemple récent :



Performances typiques

- ▶ Efficacité maximale de l'ordre de 80%
- ▶ Forte dépendance en longueur d'onde
- ▶ Compromis rapidité - efficacité

Mesure: détecteurs de photons uniques

Détecteurs à nanofils supraconducteurs

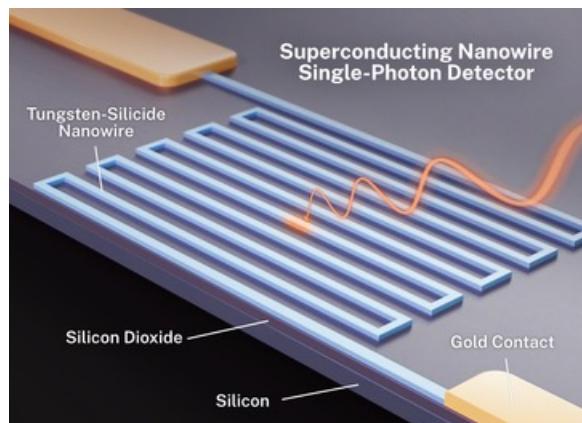
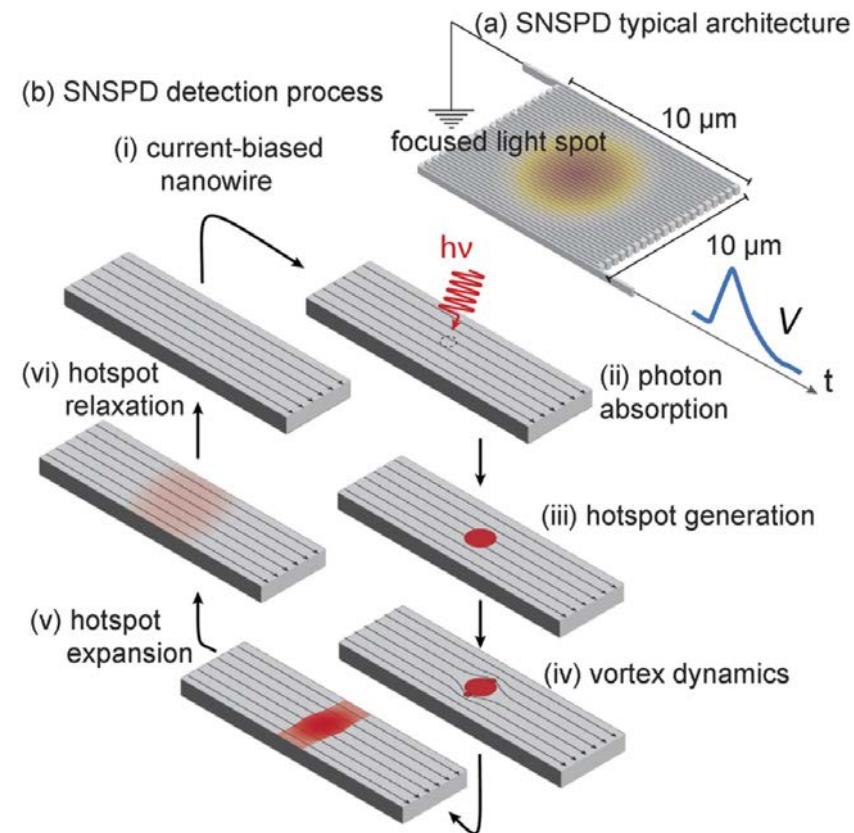


image de NIST

$T \sim 2 - 4 K$



Mesure: détecteurs de photons uniques

Détecteurs à nanofils supraconducteurs

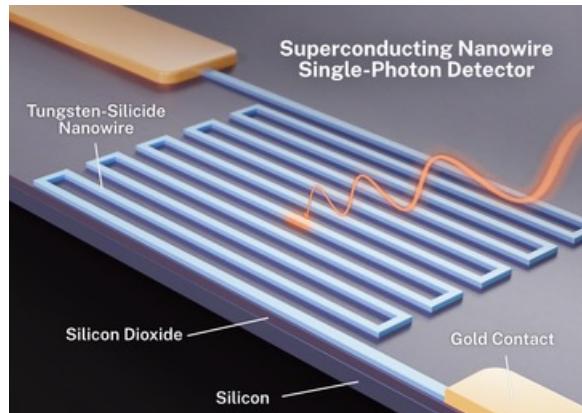
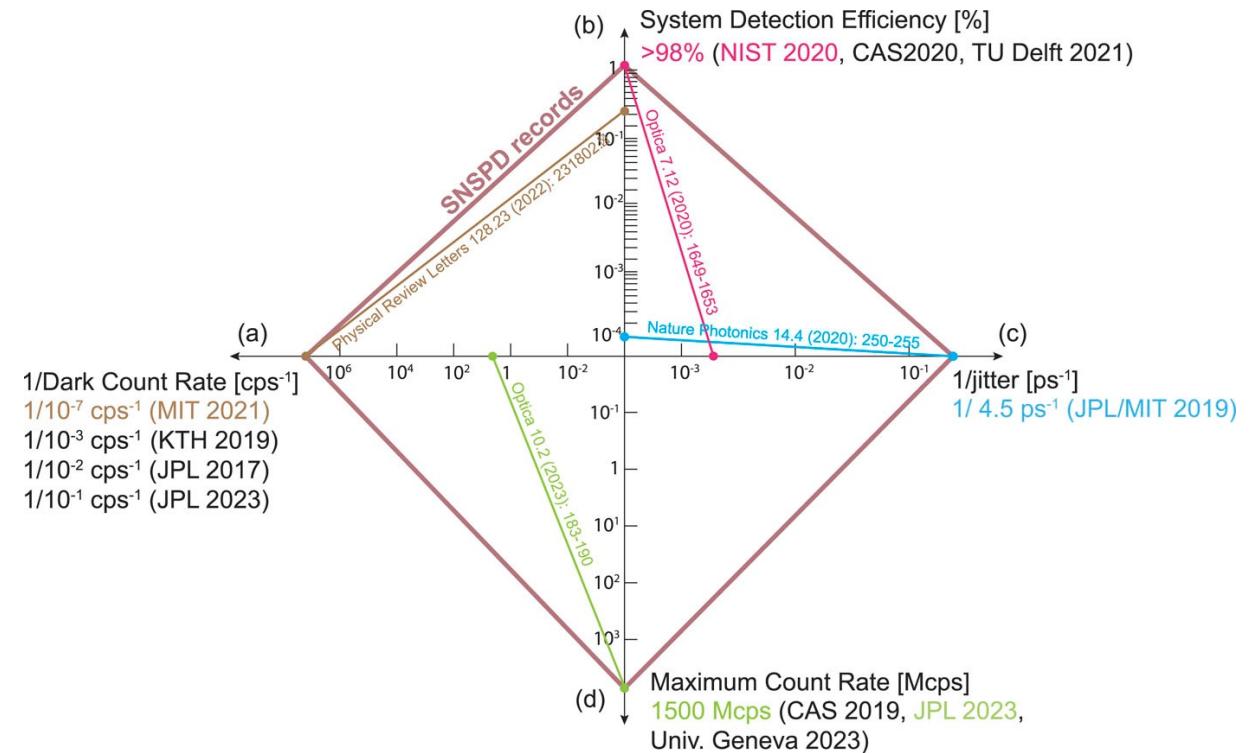


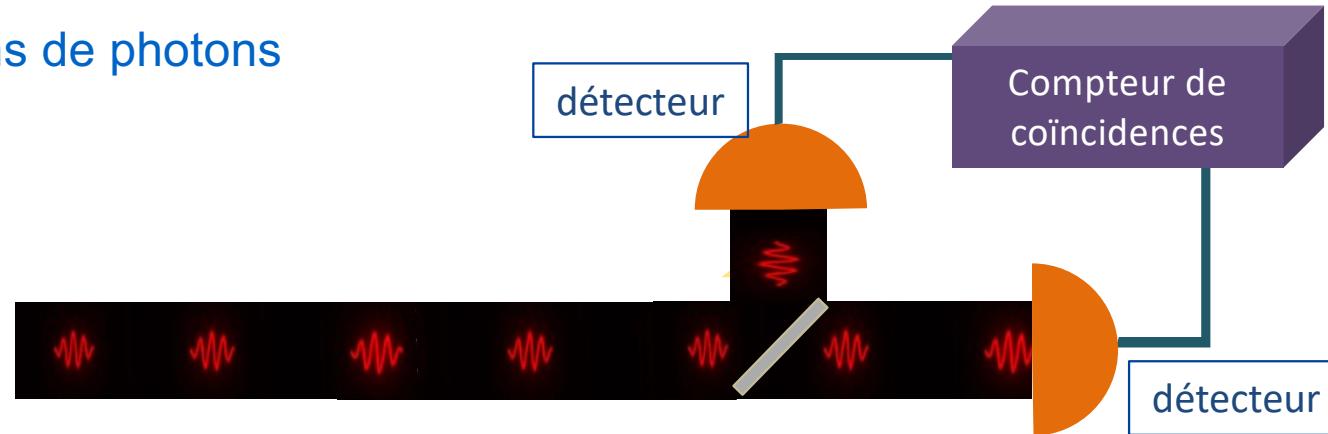
image de NIST



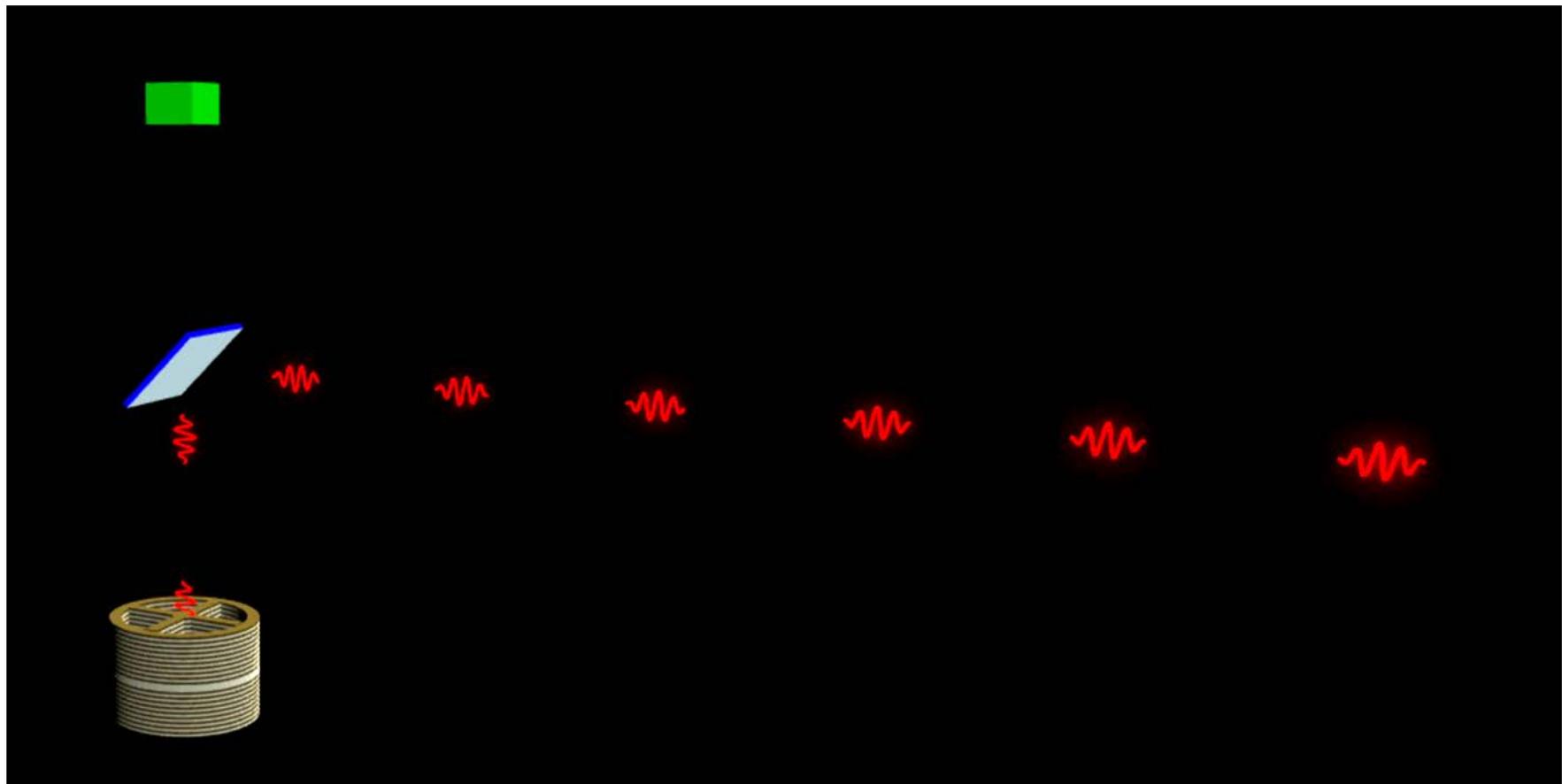
APL Photon. 10, 040901 (2025)

Caractériser un état à : un photon

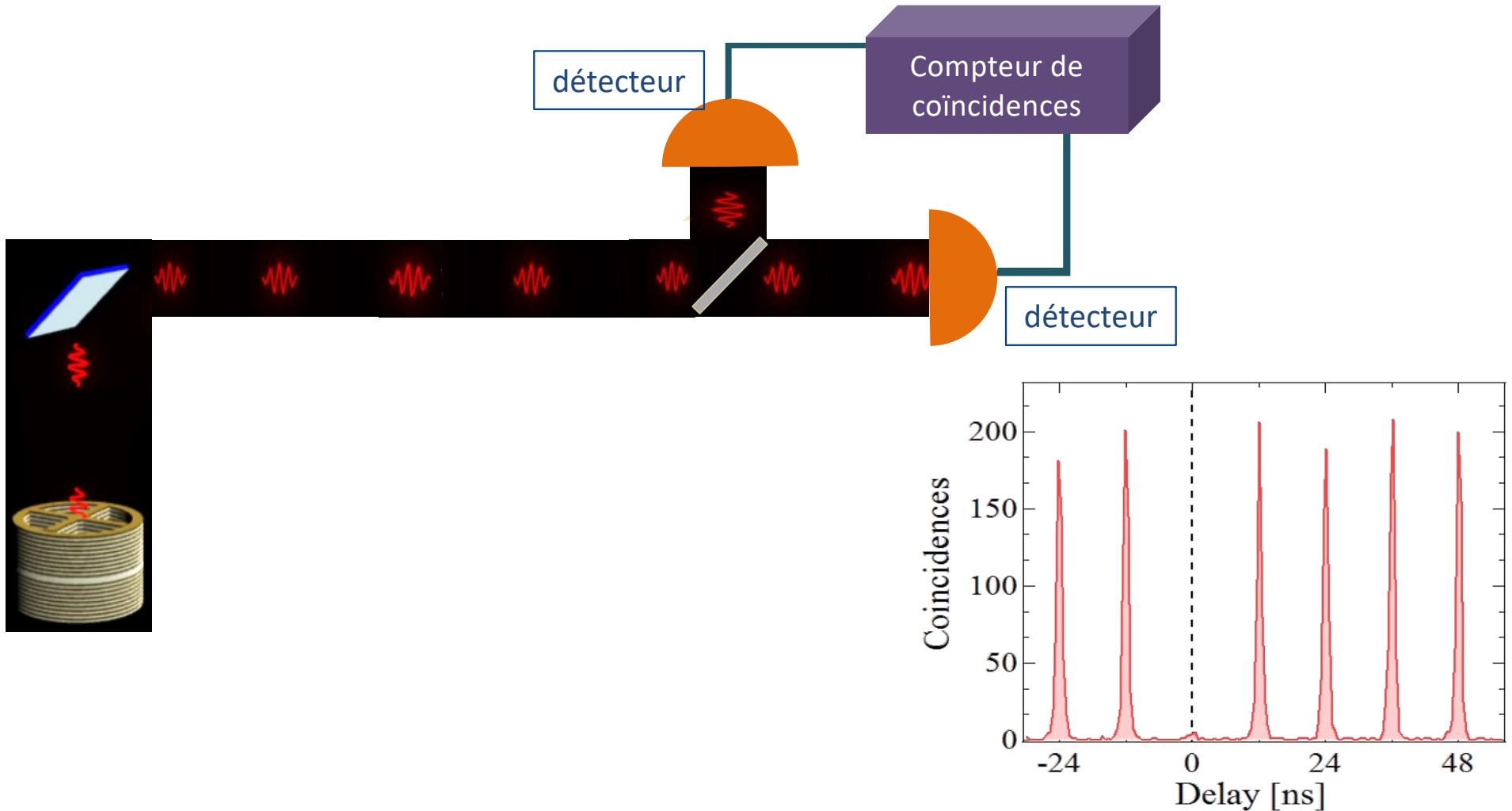
Corrélations de photons



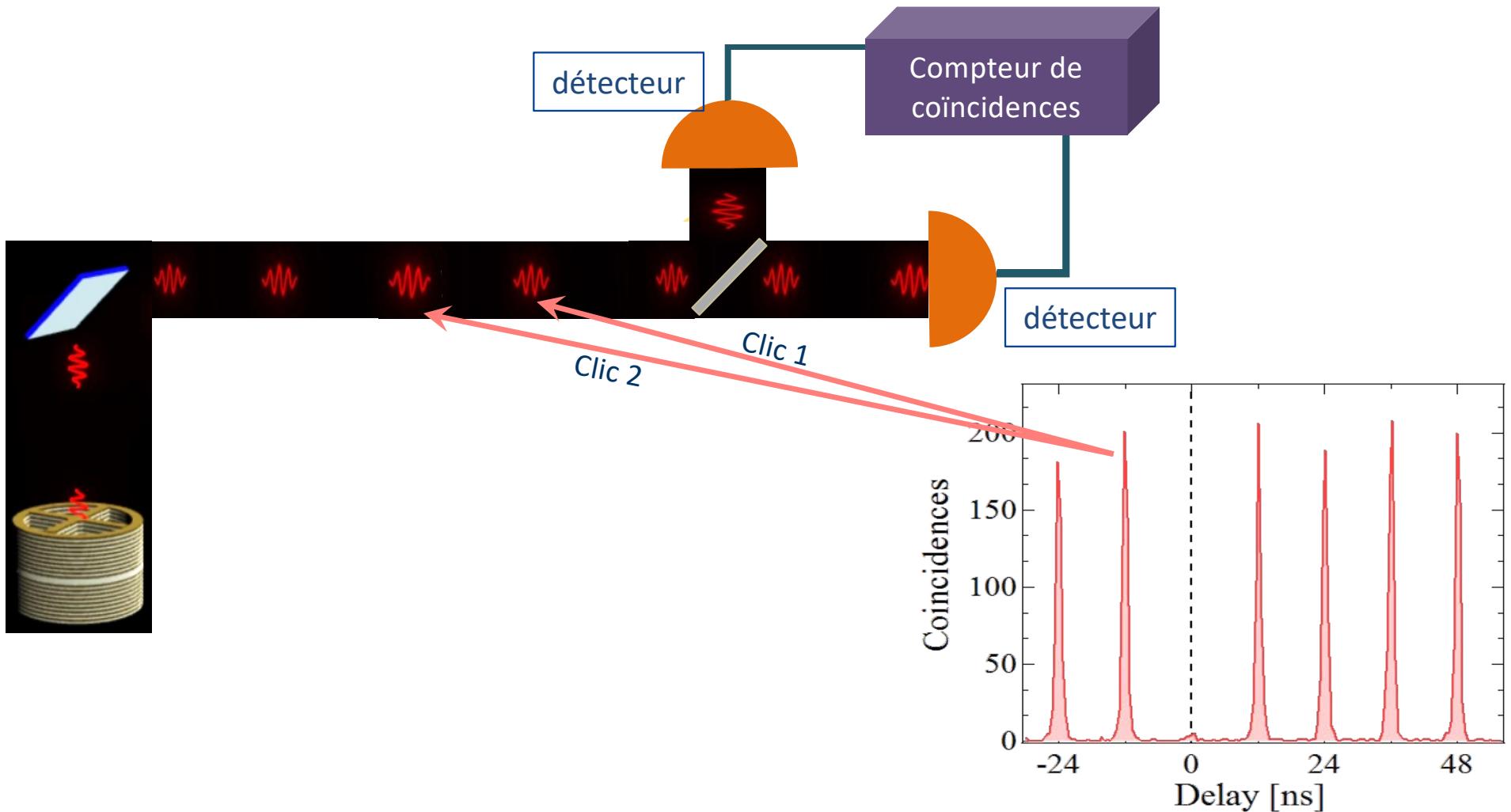
Caractériser un état à : un photon



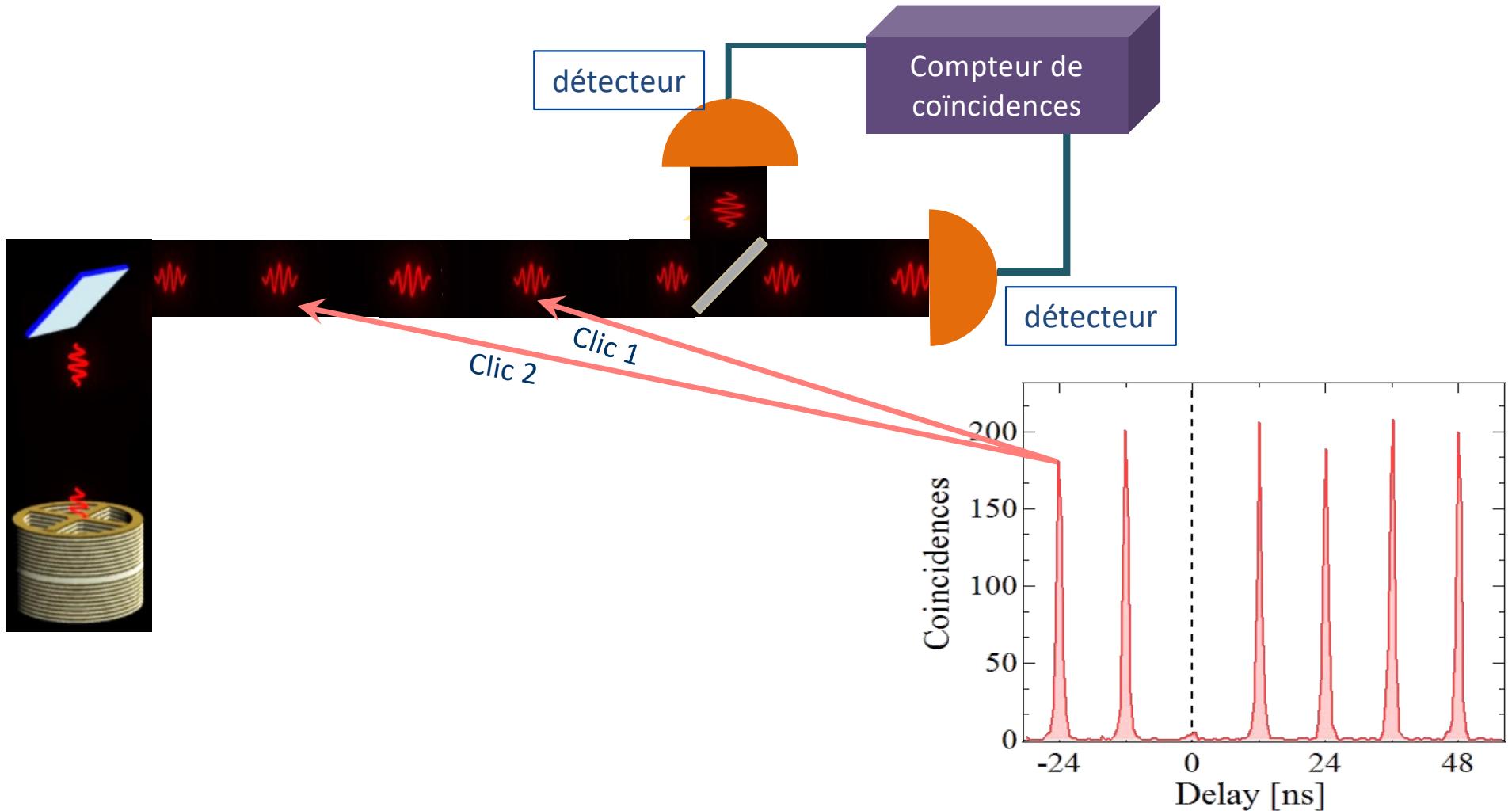
Caractériser un état à : un photon



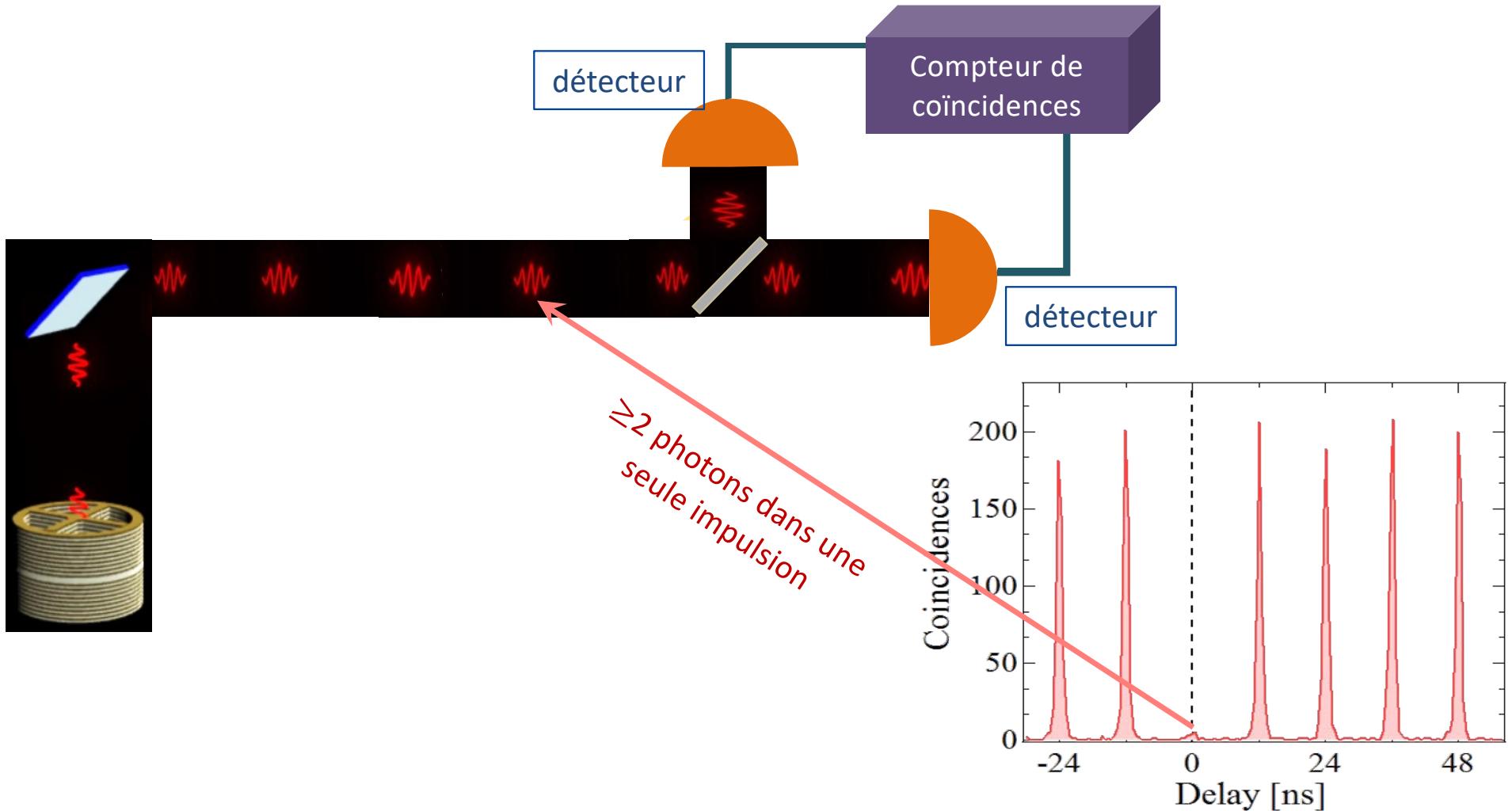
Caractériser un état à : un photon



Caractériser un état à : un photon



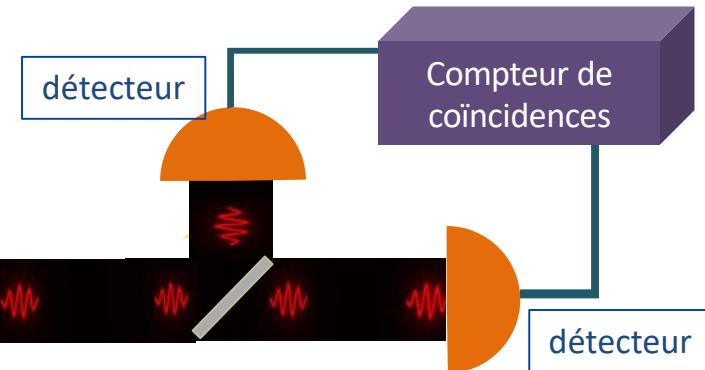
Caractériser un état à : un photon



Caractériser un état à : un photon

Corrélations de photons :

Accéder à la distribution de photons (jusqu'à $n=2$)



▶ Auto-corrélation en intensité :

$$G^{(2)}(t_1, t_2) = \langle \hat{E}^{(-)}(t_1) \hat{E}^{(-)}(t_2) \hat{E}^{(+)}(t_2) \hat{E}^{(+)}(t_1) \rangle,$$

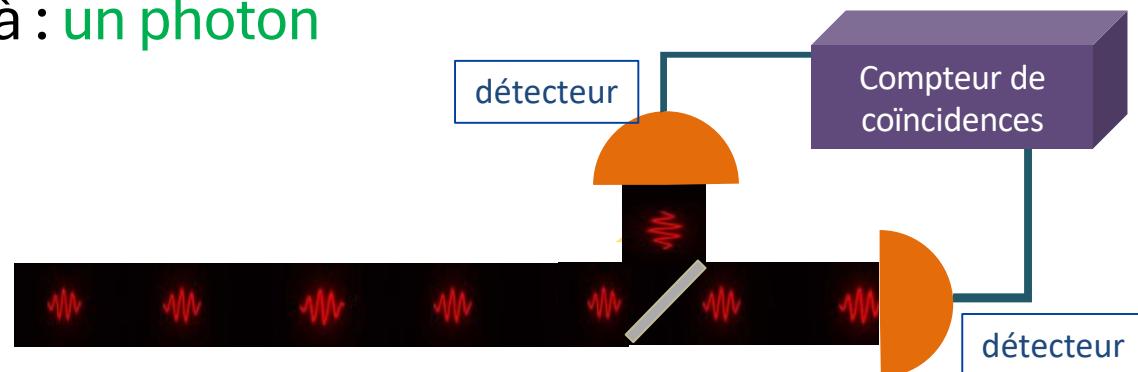
$$g^{(2)}(\tau) = \frac{G^{(2)}(t, t + \tau)}{\langle \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} \rangle^2}; \quad g^{(2)}(\tau = 0) = \frac{\langle \hat{n}(\hat{n} - 1) \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}.$$

Cas d'un état monomode :

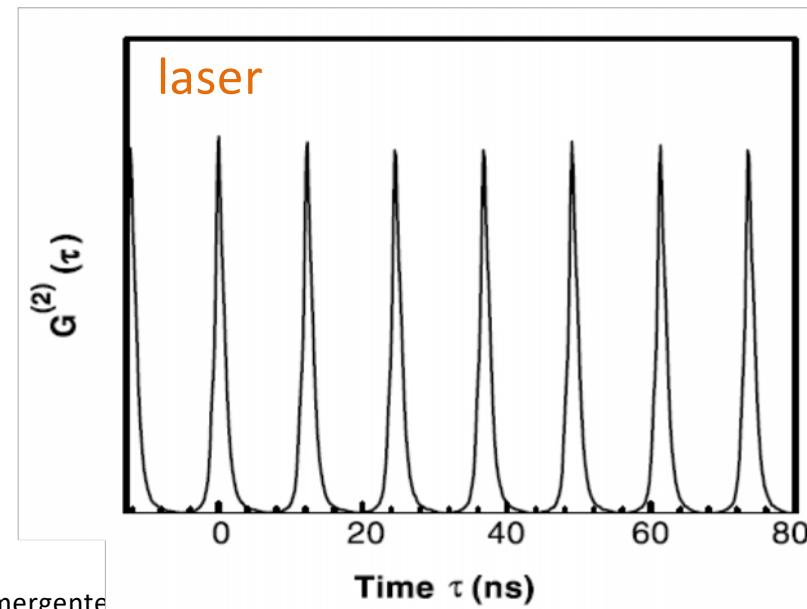
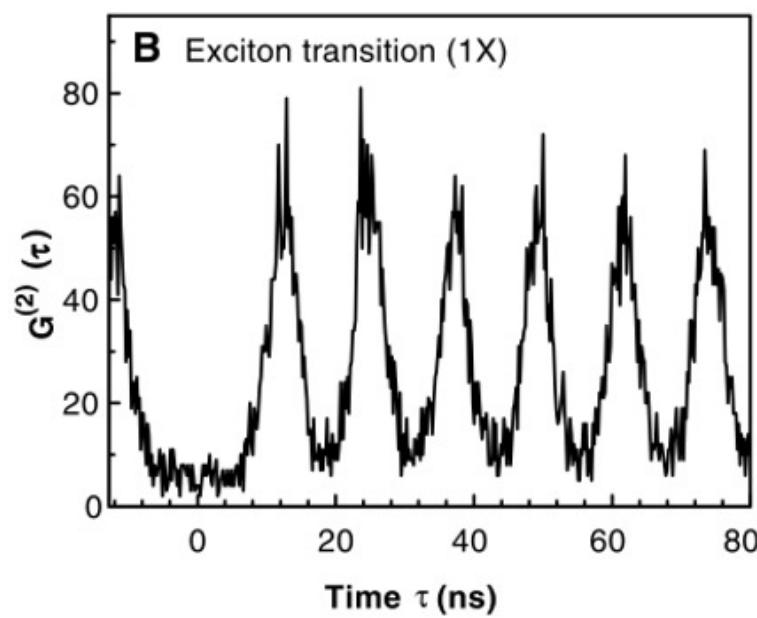
$$g^{(2)}(\tau = 0) = \frac{\sum_{n \geq 2} n(n - 1) P(n)}{\left(\sum_{n \geq 1} n P(n) \right)^2}$$

Caractériser un état à : un photon

Corrélations de photons



Science 290, 2822 (2000)



logies quantiques émergentes

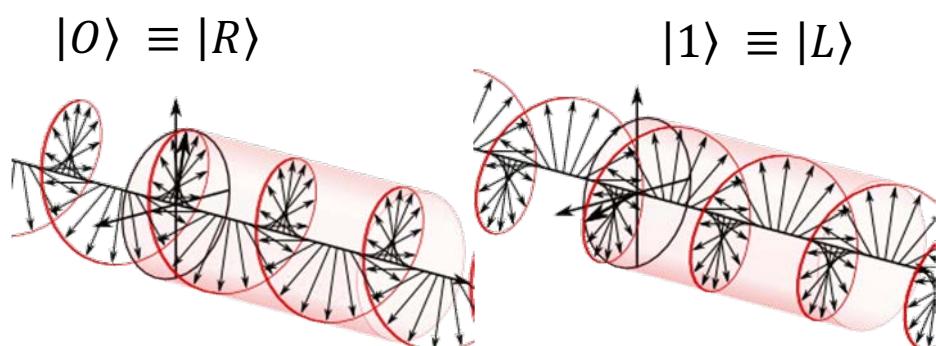
Encoder l'information sur les photons

1 qubit
2 qubits

Formalisme matrice densité

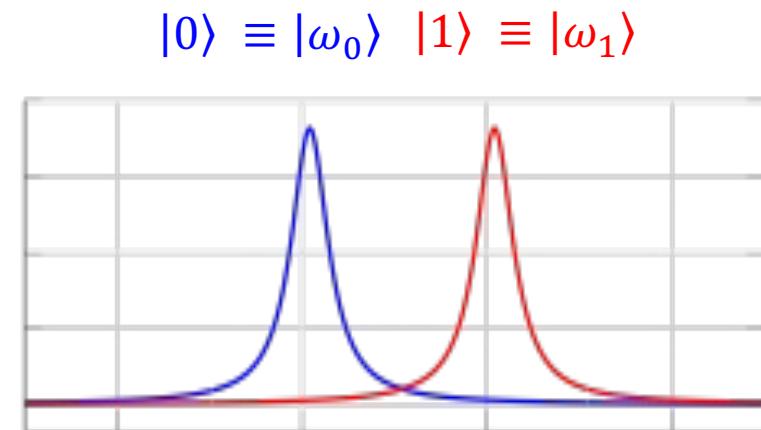
Qubits photoniques

Encodage en polarisation



$$|\psi\rangle \equiv \alpha|R\rangle + \beta|L\rangle$$

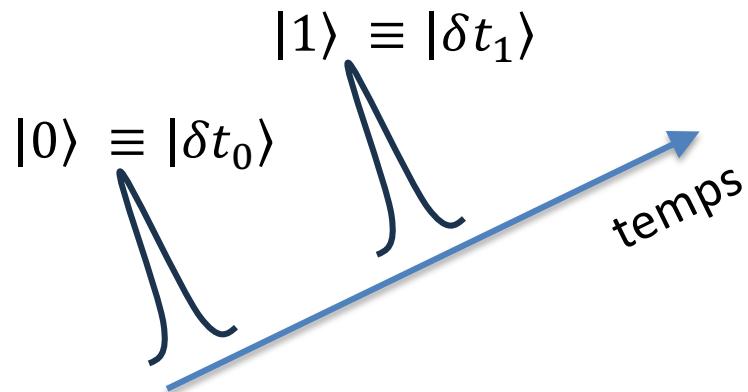
Encodage en fréquence



$$|\psi\rangle \equiv \alpha|\omega_0\rangle + \beta|\omega_1\rangle$$

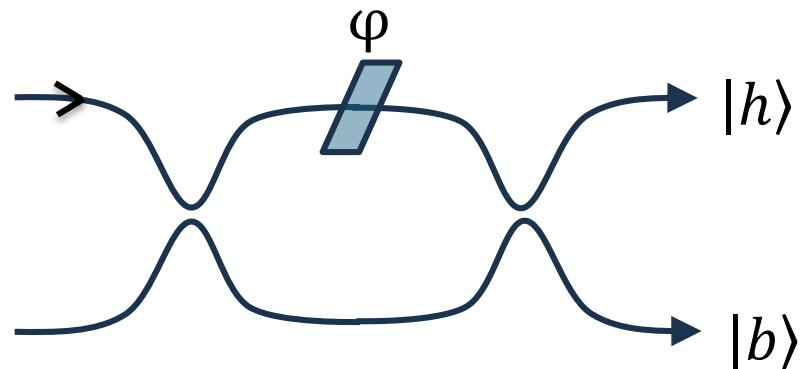
Qubits photoniques

Encodage temporel



$$|\psi\rangle \equiv \alpha|\delta t_0\rangle + \beta|\delta t_1\rangle$$

Encodage en chemin

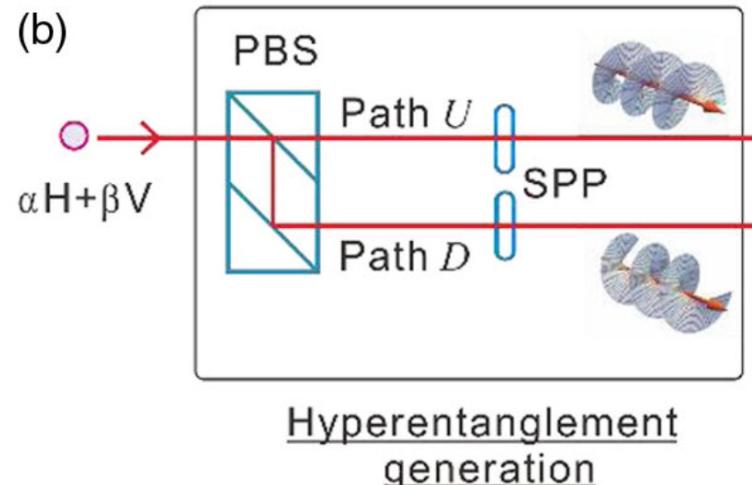


$$|\psi\rangle \equiv \alpha(\varphi)|h\rangle + \beta(\varphi)|b\rangle$$

Encoder l'information: **hyperencodage**

Physical Review Letters 120, 260502 (2018)

3 qubits sur un photon



SPP spiral phase plates
PBS polarisation beam splitter

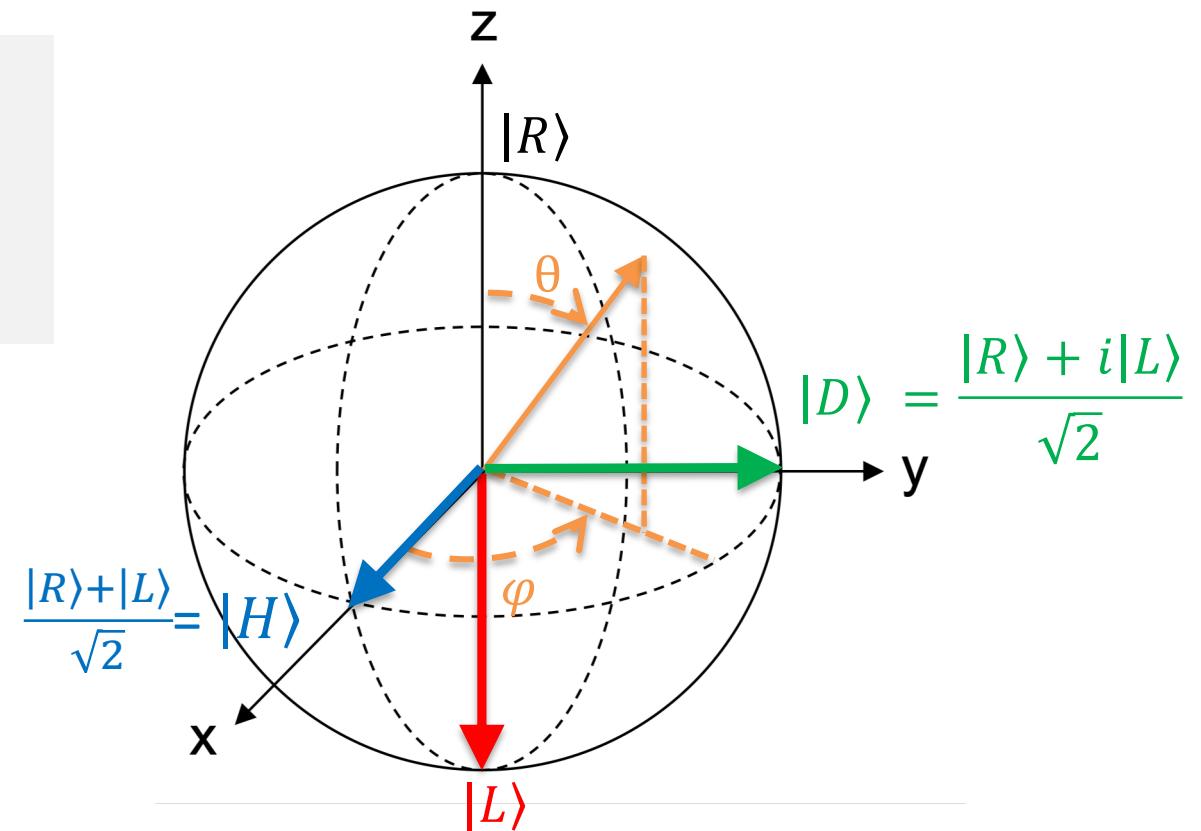
$$|\psi\rangle \equiv \alpha|H, U, R\rangle + \beta|V, D, L\rangle$$

Tomographie d'un qubit : rappel

$$|\psi\rangle = \alpha|R\rangle + \beta|L\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |R\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |L\rangle, \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi].$$

Vecteur de Bloch :

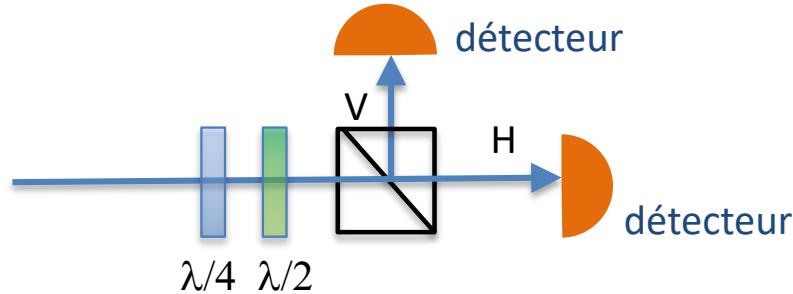
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



Tomographie d'un qubit : encodé en polarisation

Vecteur de Bloch :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



Mesure R/L

Mesure des intensités :

$$I_R = \eta |\langle R | \psi \rangle|^2$$

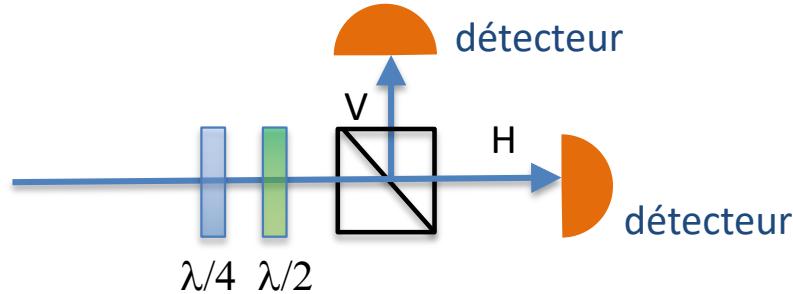
$$I_L = \eta |\langle L | \psi \rangle|^2$$

$$r_z = \frac{I_R - I_L}{I_R + I_L},$$

Tomographie d'un qubit : encodé en polarisation

Vecteur de Bloch :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



Mesure R/L

Mesure des intensités :

$$I_R = \eta |\langle R | \psi \rangle|^2$$

$$I_L = \eta |\langle L | \psi \rangle|^2$$

$$r_z = \frac{I_R - I_L}{I_R + I_L},$$

Mesure H/V

$$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle)$$

$$|V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle)$$

$$I_H = \eta |\langle H | \psi \rangle|^2$$

$$I_V = \eta |\langle V | \psi \rangle|^2$$

$$r_x = \frac{I_H - I_V}{I_H + I_V}$$

Mesure D/A

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + i|L\rangle)$$

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle - i|L\rangle)$$

$$I_D = \eta |\langle D | \psi \rangle|^2$$

$$I_A = \eta |\langle A | \psi \rangle|^2.$$

$$r_y = \frac{I_D - I_A}{I_D + I_A}$$

Tomographie d'un qubit : matrice densité

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi].$$

Matrice de densité

Définition :

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \rho_{0,0} & \rho_{0,1} \\ \rho_{1,0} & \rho_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\text{Tr}(\rho) = 1, \quad |\rho_{01}| = \sqrt{\rho_{00}\rho_{11}}$$

Tomographie d'un qubit : matrice densité

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi].$$

Matrice de densité

Définition :

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \rho_{0,0} & \rho_{0,1} \\ \rho_{1,0} & \rho_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\text{Tr}(\rho) = 1, \quad |\rho_{01}| = \sqrt{\rho_{00}\rho_{11}}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta(\cos\phi-i\sin\phi)}{2} \\ \frac{\sin\theta(\cos\phi+i\sin\phi)}{2} & \frac{1-\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{1}{2} (I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomographie d'un qubit : matrice densité

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$$

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| :$$

$$\rho_H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

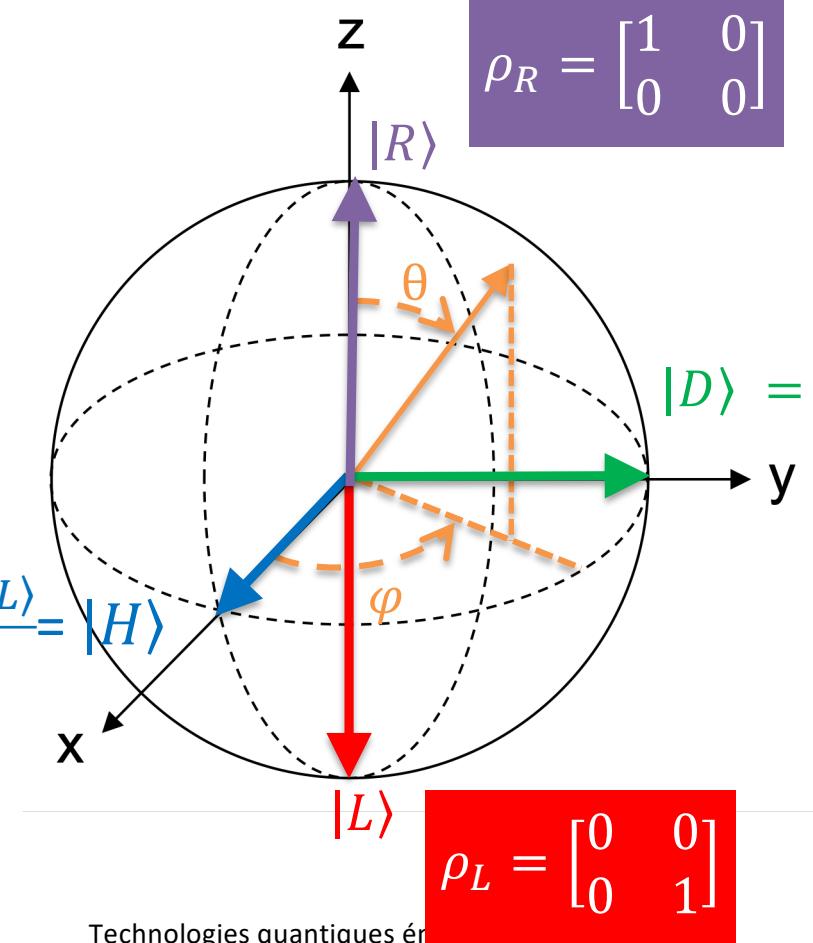
$$\frac{|R\rangle+|L\rangle}{\sqrt{2}} = |H\rangle$$

$$\rho_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|D\rangle = \frac{|R\rangle + i|L\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\rho_D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Tomographie d'un qubit : matrice densité

Matrice densité : cas général

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{0,0} & \rho_{0,1} \\ \rho_{1,0} & \rho_{1,1} \end{pmatrix}$$

$\rho_{0,0}$ et $\rho_{1,1}$: populations

$\rho_{0,1} = \rho_{1,0}^*$: cohérences

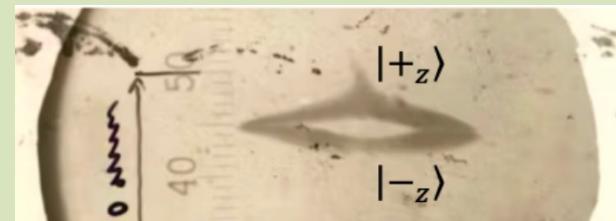
$$\text{Tr}(\rho) = 1, \quad |\rho_{01}| \leq \sqrt{\rho_{00}\rho_{11}}$$

Etat “pur”

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$|\rho_{01}| = \sqrt{\rho_{00}\rho_{11}}$$

Etat “mixte”



$$\rho = \frac{1}{2} |+z\rangle\langle +z| + \frac{1}{2} |-z\rangle\langle -z|$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Etats à deux qubits : états de Bell

Matrices densité dans la base

$$|H_A H_B\rangle, |H_A V_B\rangle, |V_A H_B\rangle, |V_A V_B\rangle$$

Définition

Etats maximalement intriqués à deux photons

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_A H_B\rangle + |V_A V_B\rangle)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_A H_B\rangle - |V_A V_B\rangle)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_A V_B\rangle + |V_A H_B\rangle)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_A V_B\rangle - |V_A H_B\rangle).$$

$$\rho_{\Phi^+} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\Psi^-} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mesure d'un état à deux qubits : tomographie de polarisation

PHYSICAL REVIEW A, VOLUME 64, 052312

Measurement of qubits

Daniel F. V. James,^{1,*} Paul G. Kwiat,^{2,3} William J. Munro,^{4,5} and Andrew G. White^{2,4}

¹Theoretical Division T-4, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico 87545

²Physics Division P-23, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico 87545

³Department of Physics, University of Illinois, Urbana-Champaign, Illinois 61801

⁴Department of Physics, University of Queensland, Brisbane, Queensland 4072, Australia

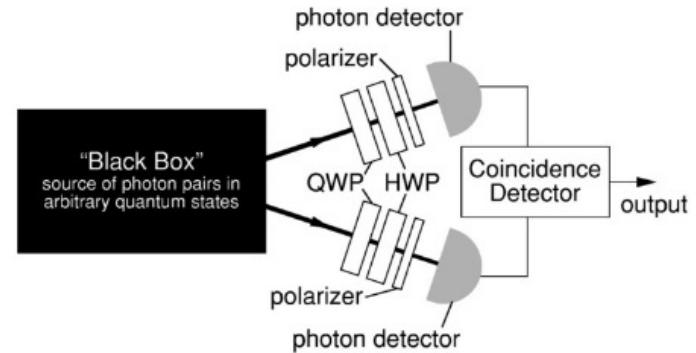
⁵Hewlett-Packard Laboratories, Filton Road, Stoke Gifford, Bristol BS34 8QZ, United Kingdom

(Received 20 March 2001; published 16 October 2001)

We describe in detail the theory underpinning the measurement of density matrices of a pair of quantum two-level systems ("qubits"). Our particular emphasis is on qubits realized by the two polarization degrees of freedom of a pair of entangled photons generated in a down-conversion experiment; however, the discussion applies in general, regardless of the actual physical realization. Two techniques are discussed, namely, a tomographic reconstruction (in which the density matrix is linearly related to a set of measured quantities) and a maximum likelihood technique which requires numerical optimization (but has the advantage of producing density matrices that are always non-negative definite). In addition, a detailed error analysis is presented, allowing errors in quantities derived from the density matrix, such as the entropy or entanglement of formation, to be estimated. Examples based on down-conversion experiments are used to illustrate our results.

DOI: 10.1103/PhysRevA.64.052312

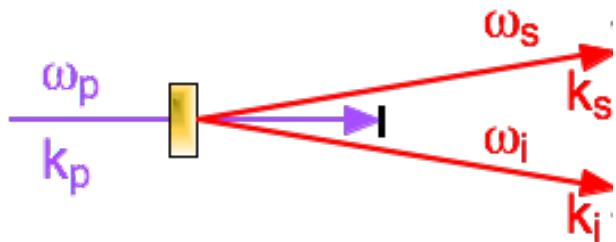
PACS number(s): 03.67.-a, 42.50.-p



ν	Mode 1	Mode 2	h_1	q_1	h_2	q_2
1	$ H\rangle$	$ H\rangle$	45°	0	45°	0
2	$ H\rangle$	$ V\rangle$	45°	0	0	0
3	$ V\rangle$	$ V\rangle$	0	0	0	0
4	$ V\rangle$	$ H\rangle$	0	0	45°	0
5	$ R\rangle$	$ H\rangle$	22.5°	0	45°	0
6	$ R\rangle$	$ V\rangle$	22.5°	0	0	0
7	$ D\rangle$	$ V\rangle$	22.5°	45°	0	0
8	$ D\rangle$	$ H\rangle$	22.5°	45°	45°	0
9	$ D\rangle$	$ R\rangle$	22.5°	45°	22.5°	0
10	$ D\rangle$	$ D\rangle$	22.5°	45°	22.5°	45°
11	$ R\rangle$	$ D\rangle$	22.5°	0	22.5°	45°
12	$ H\rangle$	$ D\rangle$	45°	0	22.5°	45°
13	$ V\rangle$	$ D\rangle$	0	0	22.5°	45°
14	$ V\rangle$	$ L\rangle$	0	0	22.5°	90°
15	$ H\rangle$	$ L\rangle$	45°	0	22.5°	90°
16	$ R\rangle$	$ L\rangle$	22.5°	0	22.5°	90°

Sources de paires de photons intriqués : conversion de fréquence

$$\begin{aligned}\omega_p &= \omega_s + \omega_i \\ k_p &= k_s + k_i\end{aligned}$$



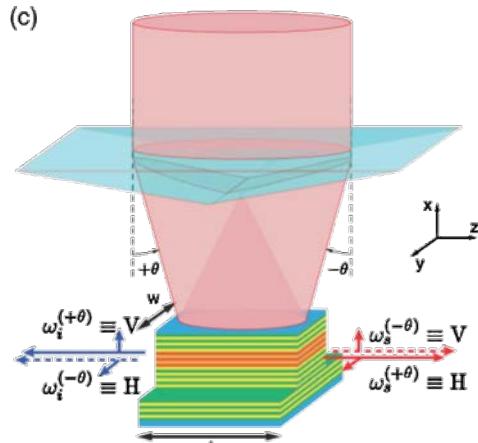
$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g \left(\hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_s \hat{a}_i \right)$$

Au seuil de conversion de fréquence $|\eta| \ll 1$

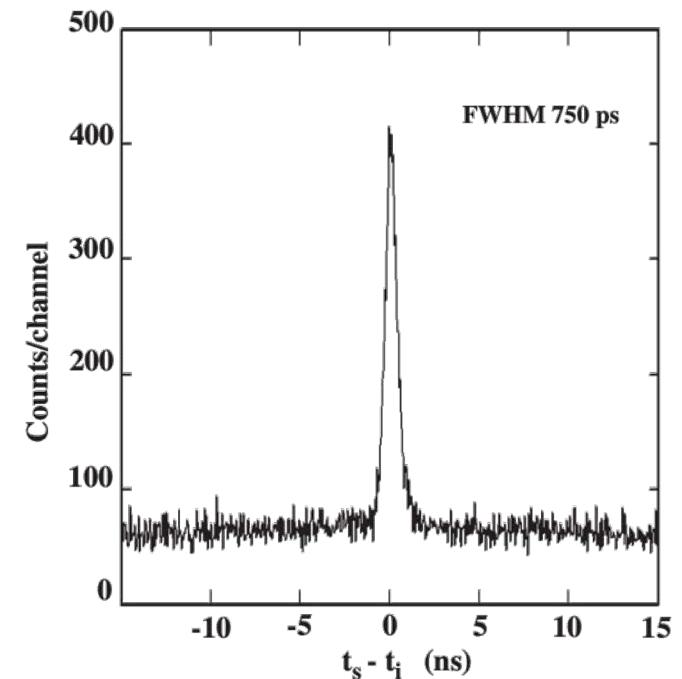
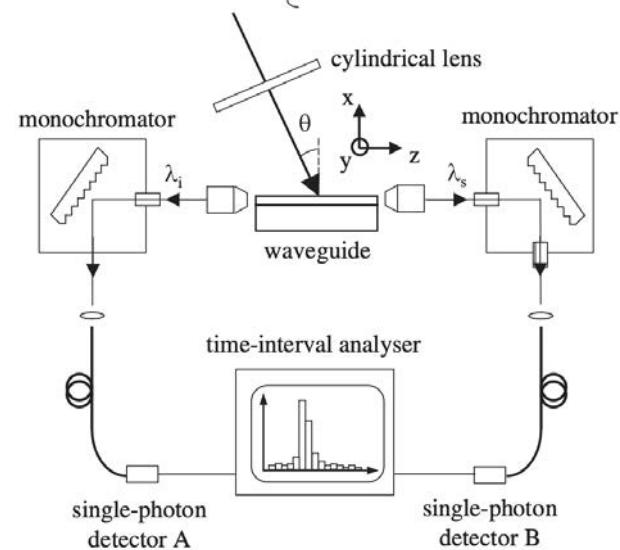
$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= (1 - |\eta|^2/2) |0_s, 0_i\rangle + \eta |1_s, 1_i\rangle + \eta^2 |2_s, 2_i\rangle \\ &\approx 1 |0_s, 0_i\rangle + \eta |1_s, 1_i\rangle + \eta^2 |2_s, 2_i\rangle\end{aligned}$$

Sources de paires de photons intriqués : conversion de fréquence

$$|\psi\rangle = |0_s, 0_i\rangle + \eta|1_s, 1_i\rangle + \dots$$

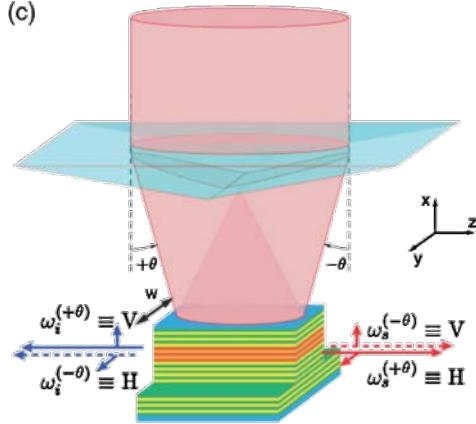


Groupe de Sara Ducci
 Phys. Rev. Lett. 97, 173901 (2006)
 Phys. Rev. Lett. 110, 160502 (2013)

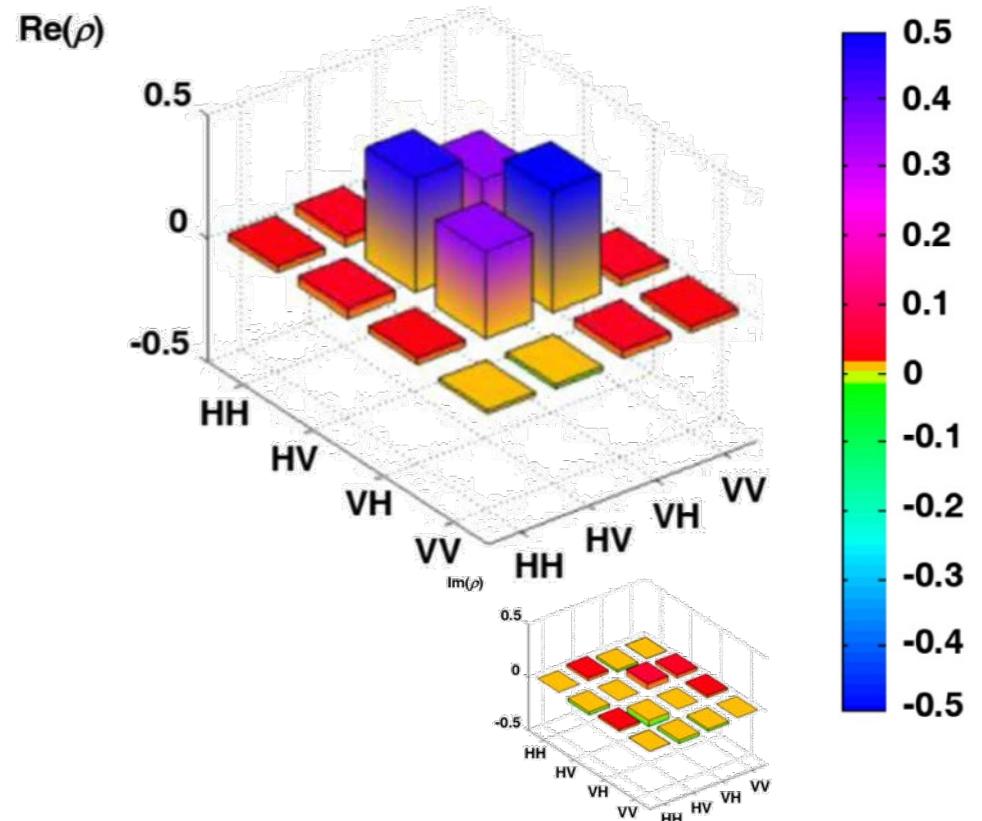


Sources de paires de photons intriqués : conversion de fréquence

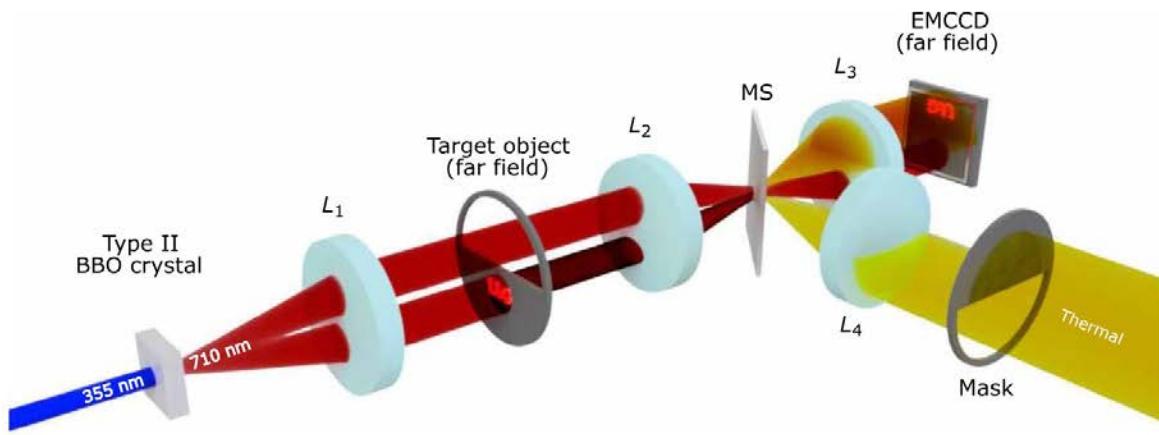
$$|\psi\rangle = |0_s, 0_i\rangle + \eta|1_s, 1_i\rangle + \dots$$



Groupe de Sara Ducci
 Phys. Rev. Lett. 97, 173901 (2006)
 Phys. Rev. Lett. 110, 160502 (2013)

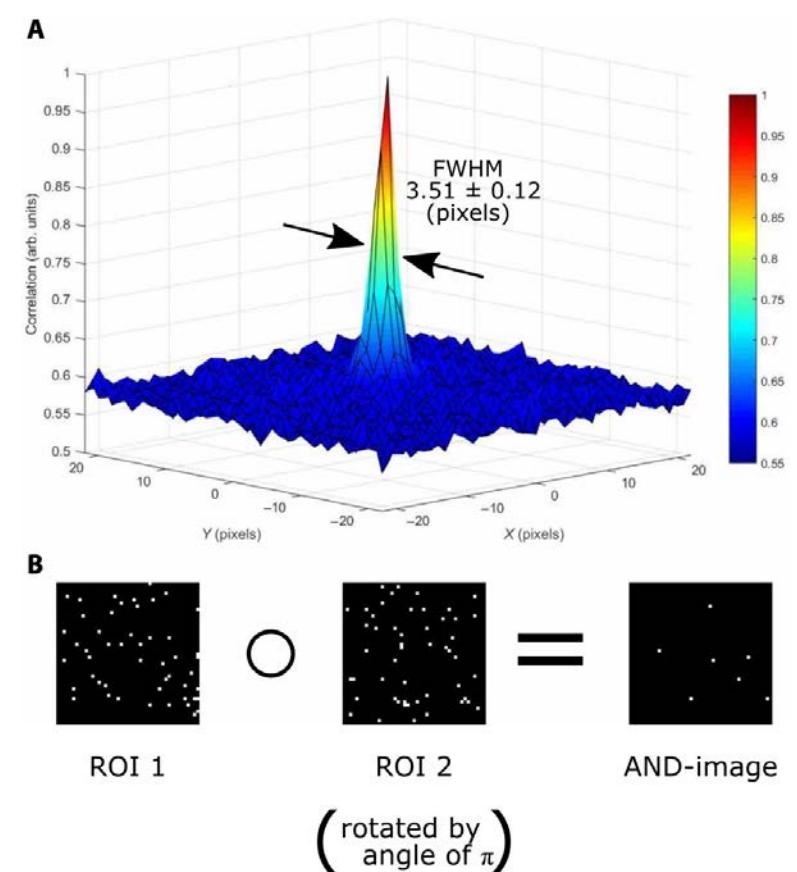


Capteurs quantiques : Imagerie avec des paires de photons

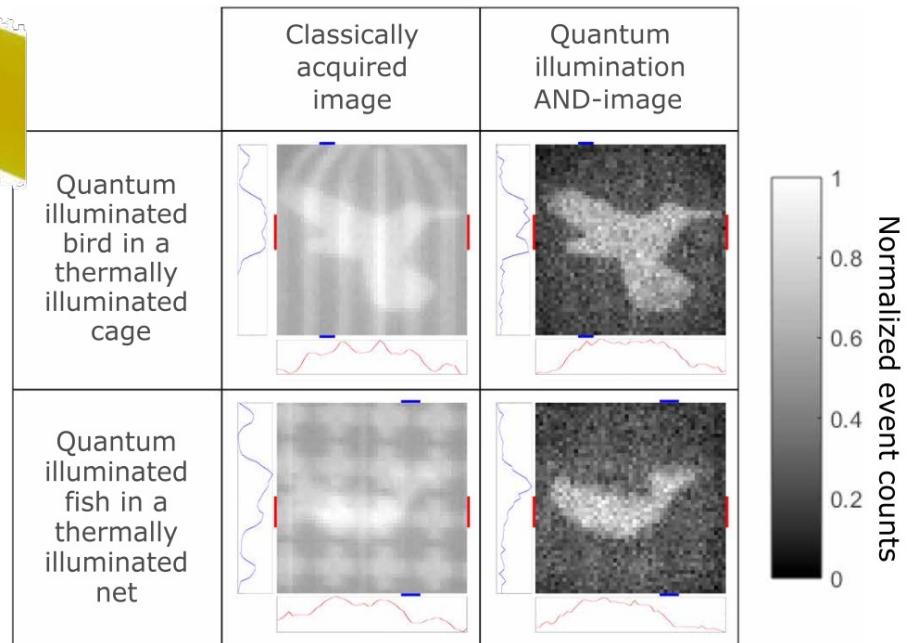
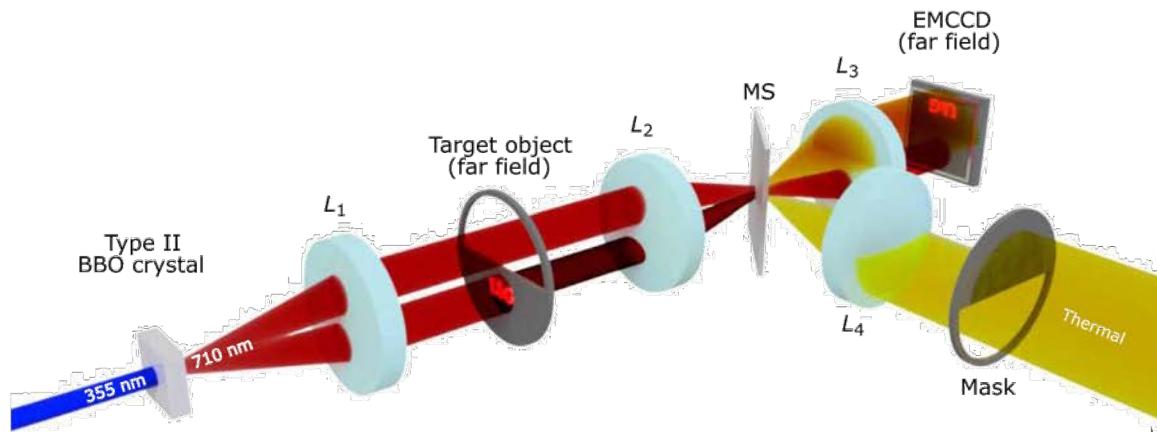


$$|\psi\rangle = |0_s, 0_i\rangle + \eta|1_s, 1_i\rangle + \dots$$

T. Gregory et al., Sci. Adv. 6, eaay2652 (2020).



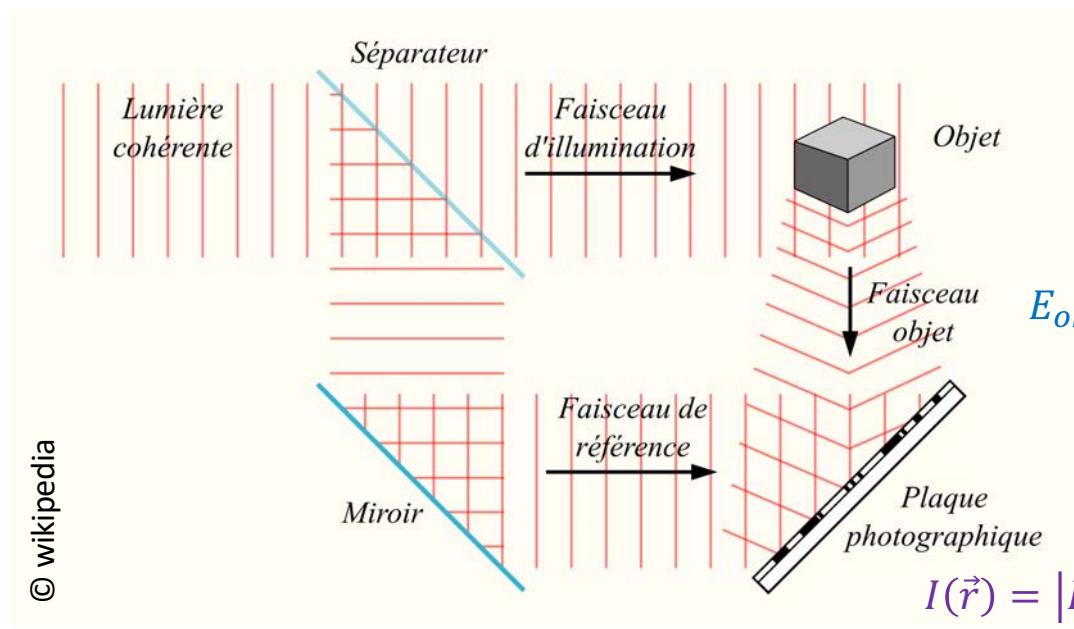
Capteurs quantiques : Imagerie avec des paires de photons



T. Gregory et al., Sci. Adv. 6, eaay2652(2020).

Capteurs quantiques : Imagerie avec photons intriqués

Rappel : imagerie par holographie



$$E_{obj}(\vec{r}) = A(\vec{r})e^{i\varphi(\vec{r})}$$

$$I(\vec{r}) = |E_{ref}(\vec{r}) + E_{obj}(\vec{r})|^2$$

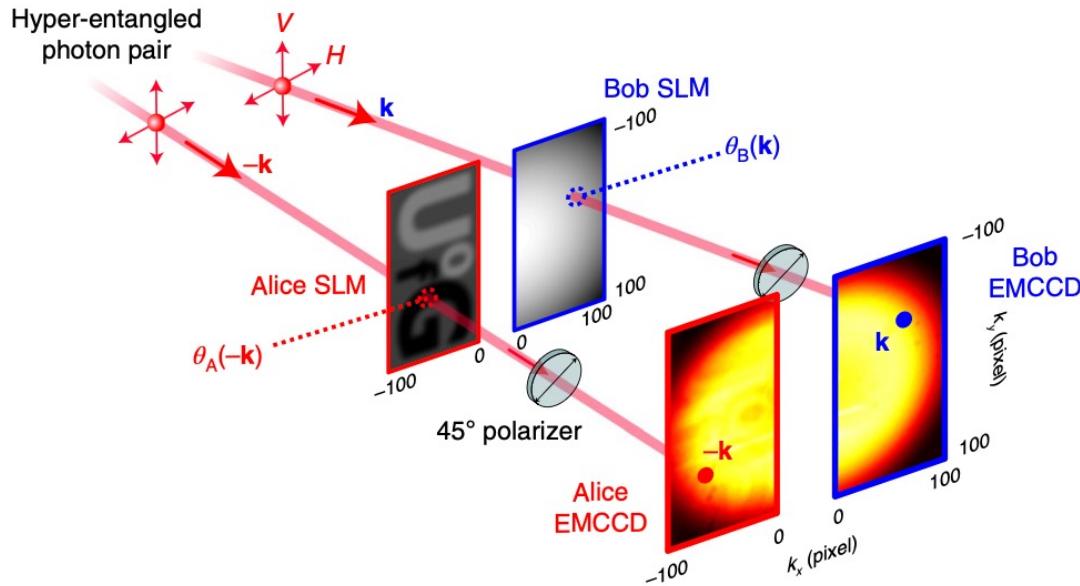
$$E_{ref}(\vec{r}) = A_0(\vec{r})e^{i\varphi_0(\vec{r})}$$

$$I(\vec{r}) = |E_{ref}(\vec{r})|^2 + |E_{obj}(\vec{r})|^2 + E_{obj}(\vec{r}) E_{ref}^*(\vec{r}) + E_{ref}(\vec{r}) E_{obj}^*(\vec{r})$$

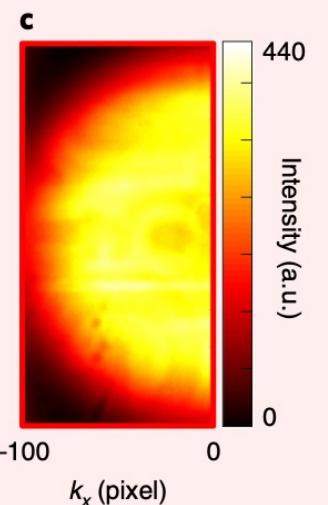
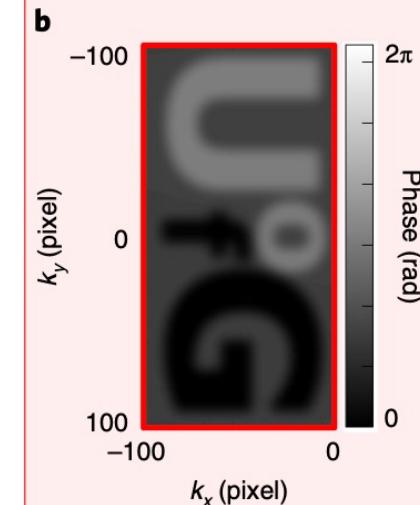
Capteurs quantiques : Imagerie avec photons intriqués

$$\sum_{\mathbf{k}} \left[|V\rangle_{\mathbf{k}} |V\rangle_{-\mathbf{k}} + e^{i\Psi(\mathbf{k})} |H\rangle_{\mathbf{k}} |H\rangle_{-\mathbf{k}} \right]$$

a



Alice image encoding



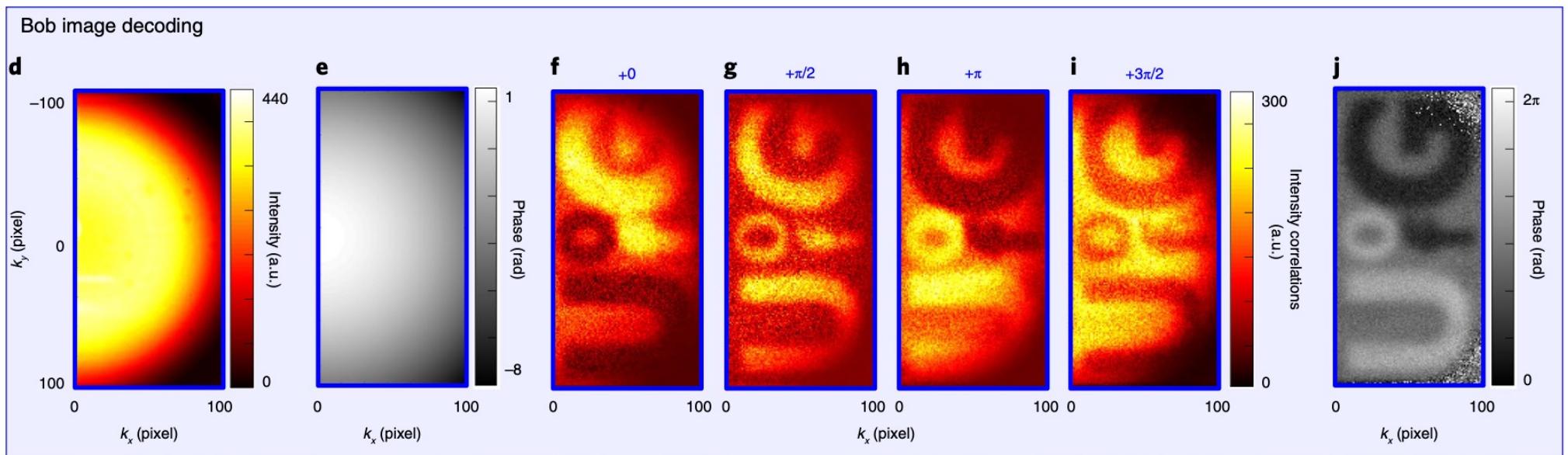
Nature Physics volume 17, 591–597 (2021)

Technologies quantiques émergentes - Cours 2

Capteurs quantiques : Imagerie avec photons intriqués

$$\sum_{\mathbf{k}} \left[|V\rangle_{\mathbf{k}} |V\rangle_{-\mathbf{k}} + e^{i\Psi(\mathbf{k})} |H\rangle_{\mathbf{k}} |H\rangle_{-\mathbf{k}} \right]$$

$$\phi = \arg [I_0 - I_\pi + i(I_{\pi/2} - I_{3\pi/2})]$$



Encoder l'information sur les quadratures du champ

Retour sur les opérateurs champs

$$\hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{r}) = i \sum_{\ell} E_{\ell} \epsilon_{\ell} \left(\hat{a}_{\ell} e^{i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_{\ell}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}} \right)$$

Formalisme Schrödinger

$$\hat{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\ell} E_{\ell} \epsilon_{\ell} \left(\hat{a}_{\ell} e^{i(\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\ell} t)} - \hat{a}_{\ell}^{\dagger} e^{-i(\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\ell} t)} \right)$$

Formalisme Heisenberg

Cas monomode et en \mathbf{r} fixé

$$\hat{E}(t) = iE_0 \left(\hat{a} e^{-i\omega t} - \hat{a}^{\dagger} e^{i\omega t} \right)$$

$$\hat{E}(t) = E_0 \left[(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}) \sin \omega t + i(\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}) \cos \omega t \right]$$

$$\hat{E}(t) = \sqrt{2} E_0 (\hat{x} \sin \omega t + \hat{p} \cos \omega t)$$

$$\hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^{\dagger}}{i\sqrt{2}}$$

Fonction de Wigner

Hypothèse : mode unique, $\hbar = 1$, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Quadratures du champ :

$$\hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}, \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i.$$

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ipy} \left\langle x - \frac{y}{2} \middle| \hat{\rho} \middle| x + \frac{y}{2} \right\rangle$$

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int dy e^{ipy} \psi\left(x - \frac{y}{2}\right) \psi\left(x + \frac{y}{2}\right)$$

Distributions marginales

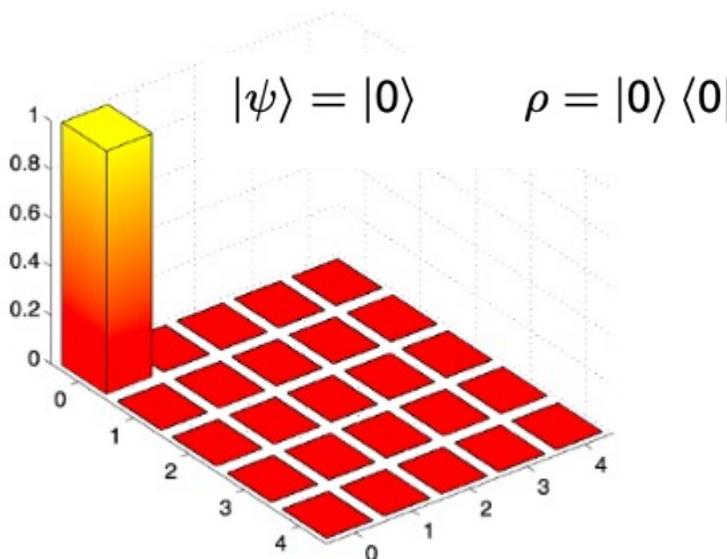
$$\int dp W(x, p) = |\psi(x)|^2$$

$$\int dx W(x, p) = |\tilde{\psi}(p)|^2$$

$$\int dx \int dp W(x, p) = 1$$

Représentation du champ : exemple du vide

Représentation du vide

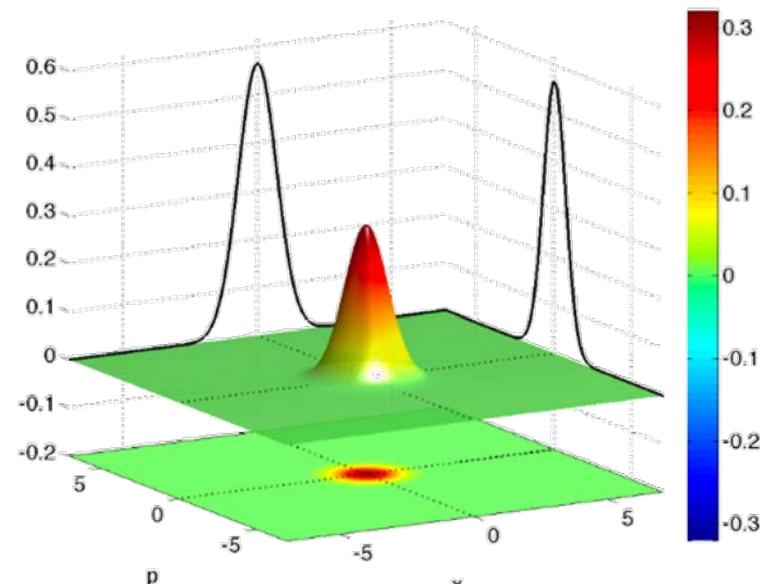


$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int dy e^{ipy} \psi\left(x - \frac{y}{2}\right) \psi\left(x + \frac{y}{2}\right)$$

Fonction d'onde : $\psi_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$.

$$\begin{aligned} W_0(q, p) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int dy \exp\left[-\frac{(x-\frac{y}{2})^2 + (x+\frac{y}{2})^2}{2}\right] e^{ipy} \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2\pi\sqrt{\pi}} \int dy \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) e^{ipy} \\ &= \left[\frac{1}{\pi} e^{-(x^2+p^2)} \right]. \end{aligned}$$

Thèse Jean. Etesse



(a) Fonction de Wigner.

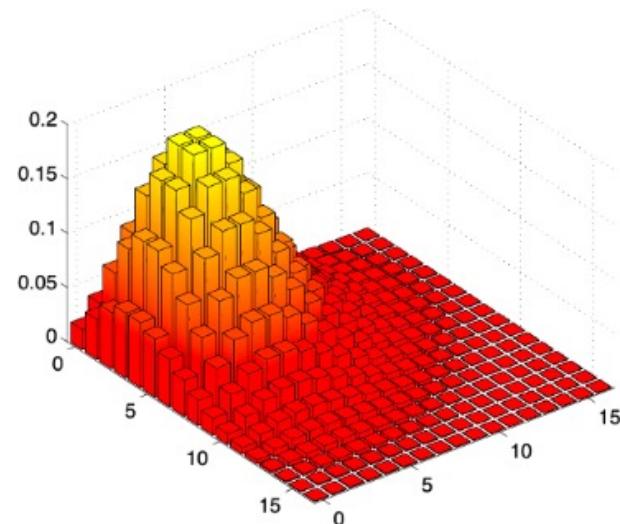
Représentation du champ : exemple d'un état cohérent

Représentation d'un état cohérent



$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\rho = \sum_{n,m} \rho_{n,m} |n\rangle \langle m|$$



$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}$$

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \hat{D}(\alpha)|0\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} \underbrace{e^{-\alpha^* \hat{a}}|0\rangle}_{=|0\rangle} \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}}_{|n\rangle} |0\rangle \\ &= \boxed{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}. \end{aligned}$$

Représentation du champ : exemple d'un état cohérent



Déplacement des quadratures :

$$\alpha = \frac{x_0 + ip_0}{\sqrt{2}}$$

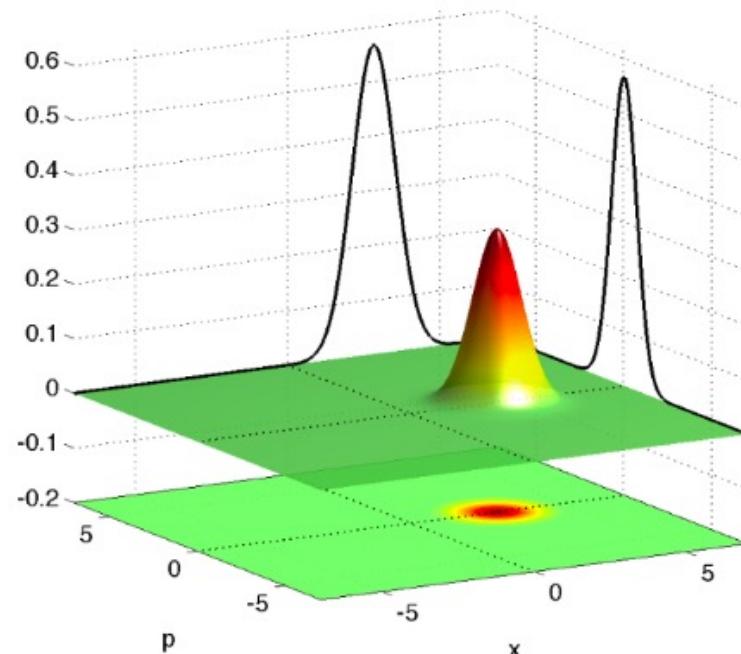
$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{q} \hat{D}(\alpha) = \hat{x} + x_0$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{p} \hat{D}(\alpha) = \hat{p} + p_0$$

Comme $|\alpha_0\rangle = \hat{D}(\alpha_0)|0\rangle$ et \hat{D} translate les quadratures

$$\begin{aligned} W_{\alpha_0}(x, p) &= W_0(x - x_0, p - p_0) \\ &= \frac{1}{\pi} \exp[-(x - x_0)^2 - (p - p_0)^2] \end{aligned}$$

Thèse Jean. Etesse

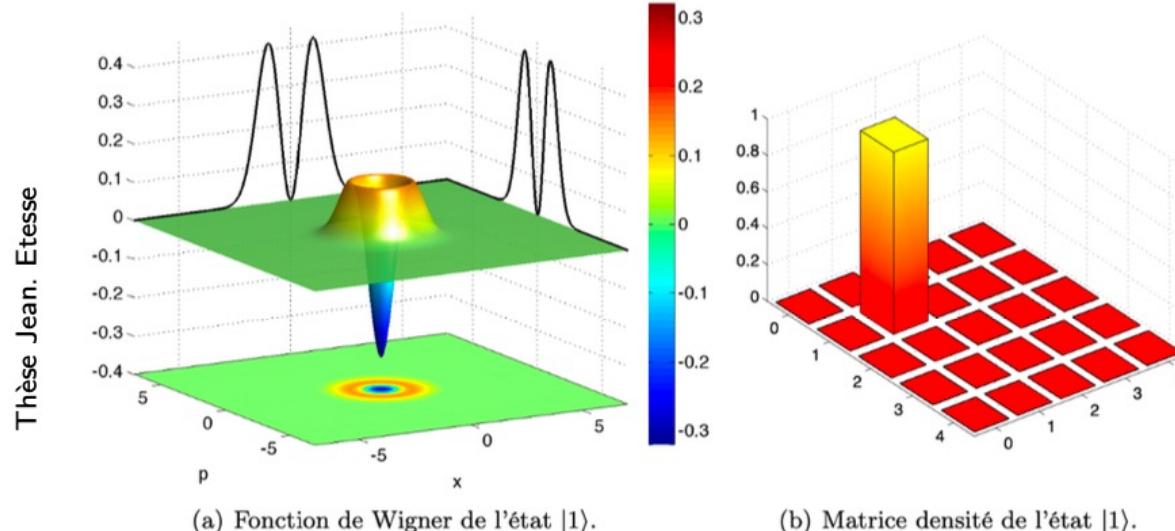


Représentation du champ : exemple d'un photon

Fonction d'onde : $\psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2}$.

$$|\psi\rangle = |1\rangle \quad \rho = |1\rangle \langle 1|$$

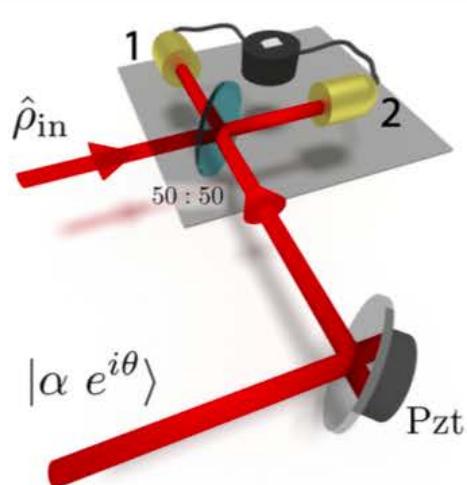
$$\begin{aligned} W_1(x, p) &= \frac{1}{2\pi} \int dy e^{ipy} \psi_1(x - \frac{y}{2}) \psi_1(q + \frac{y}{2}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \int dy e^{-y^2/4} e^{ipy} \left(x^2 - \frac{y^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+p^2)} \left(2(x^2 + p^2) - 1 \right). \end{aligned}$$



Mesure des quadratures : **detection homodyne**

Mesure homodyne balancée

Thèse Jean. Etesse



K. Vogel and H. Risken, Phys. Rev. A 40, 2847(R) (1989)

\hat{a} mode du signal, \hat{a}_{OL} mode de l'oscillateur local
Modes de sortie :

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{a} - \hat{a}_{OL}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_2 = \frac{\hat{a} + \hat{a}_{OL}}{\sqrt{2}}.$$

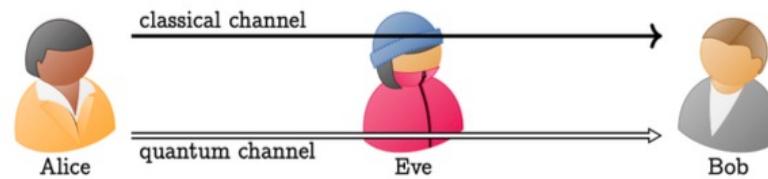
La différence des photocourants est proportionnelle à :

$$\hat{n}_{12} = \hat{n}_2 - \hat{n}_1 = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 = \hat{a}_{OL}^\dagger \hat{a} + \hat{a}_{OL} \hat{a}^\dagger.$$

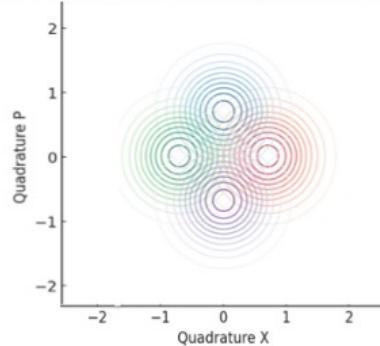
En traitant l'oscillateur local classiquement ($\hat{a}_{OL} \simeq \alpha e^{i\theta}$), on obtient pour la quadrature $\hat{X}_\theta = \cos \theta \hat{X} + \sin \theta \hat{P}$:

$$\hat{n}_{12} = \sqrt{2} \alpha \hat{X}_\theta$$

Communications quantiques : variables continues



Exemple encodage sur 4 phases



Alice : déphasage aléatoire $\phi_A = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$, et 270° au signal
 Bob : déphasage aléatoire $\phi_B = 0^\circ, 90^\circ$ au LO (oscillateur local).
 Seuils à définir pour optimiser débit et sécurité.

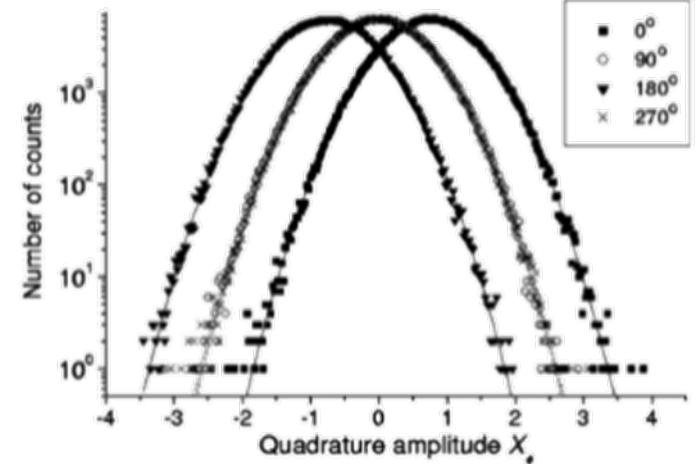


TABLE II. The first ten pulses ($X_+ = 0.500$).

Alice's bit	ϕ_A	ϕ_B	Basis	QA	Bob's bit	Success
1	90	0	\times	-0.448		
0	180	0	\circ	-1.206	0	\circ
1	90	90	\circ	0.912	1	\circ
0	270	90	\circ	-1.311	0	\circ
1	0	0	\circ	1.514	1	\circ
1	90	90	\circ	0.310		
0	270	90	\circ	-0.474		
1	0	90	\times	0.284		
0	180	0	\circ	-0.134		
1	0	0	\circ	-0.161		

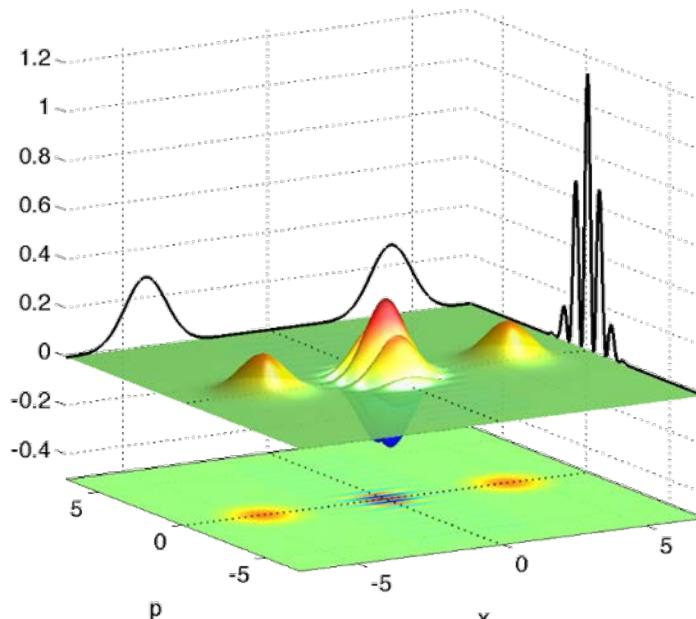
Phys. Rev. A 68, 042331 2003

Information quantique : qubits de chats

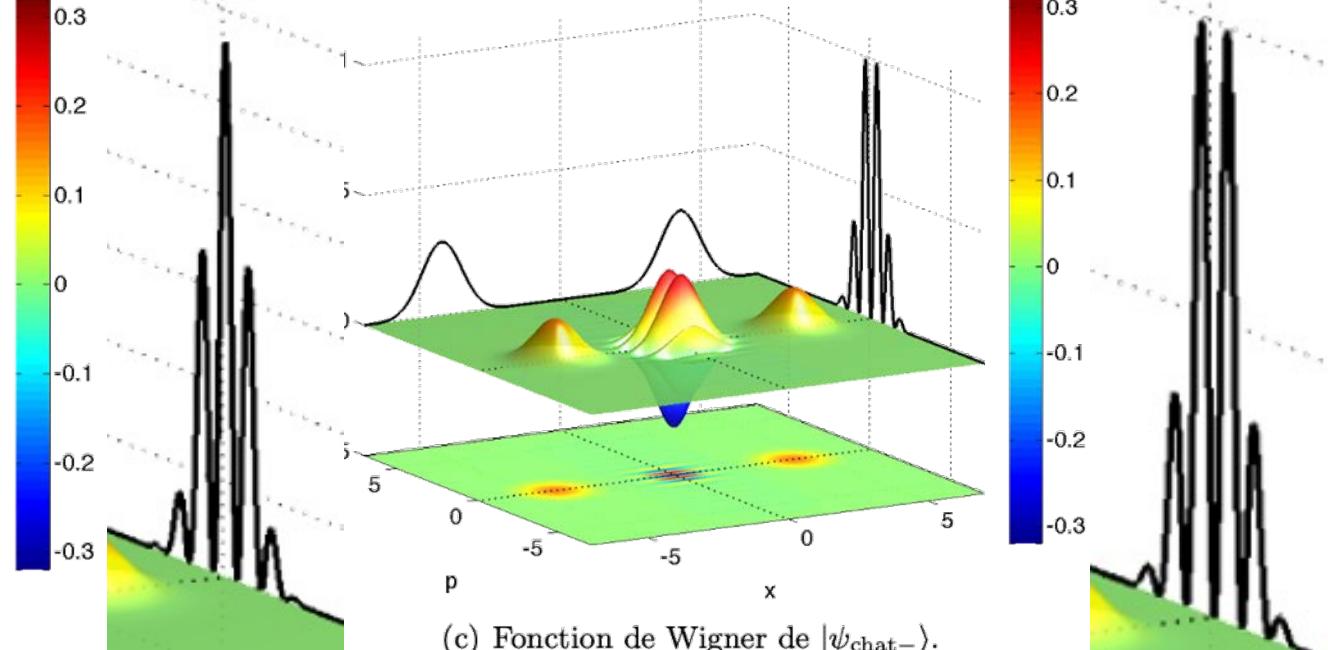
Définitions Les qubits de chat (cat qubits) sont des qubits dits "bosoniques", encodés dans des superpositions d'états cohérents d'un oscillateur harmonique.

$$|0_L\rangle = \mathcal{N}_+ (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle),$$

$$|1_L\rangle = \mathcal{N}_- (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle),$$



(a) Fonction de Wigner de $|\psi_{\text{chat}+}\rangle$.



(c) Fonction de Wigner de $|\psi_{\text{chat}-}\rangle$.

Chats créés par non-linéarité

Un qubit supraconducteur : système non linéaire de type Kerr :

$$H_{\text{Kerr}} = -K a^{\dagger 2} a^2,$$

Excitation à deux photons à la fréquence $2\omega_c$:

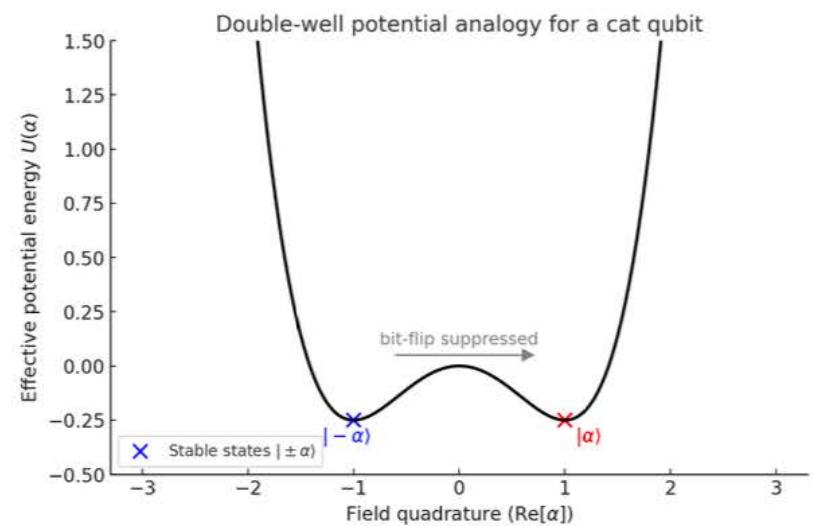
$$H_{\text{pompe}} = \frac{p}{2} (a^{\dagger 2} + a^2),$$

Hamiltonien total (référentiel tournant) :

$$H = -K a^{\dagger 2} a^2 + \frac{p}{2} (a^{\dagger 2} + a^2).$$

En fonction de $x = (a + a^{\dagger})/\sqrt{2}$, hamiltonien avec potentiel effectif

$$U(x) \propto \frac{K}{4} x^4 - \frac{p}{2} x^2.$$



Etats propres : $|C_{\pm}\rangle \propto |\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$

Chats créés par non-linéarité

Un qubit supraconducteur : système non linéaire de type Kerr :

$$H_{\text{Kerr}} = -K a^{\dagger 2} a^2,$$

Excitation à deux photons à la fréquence $2\omega_c$:

$$H_{\text{pompe}} = \frac{p}{2} (a^{\dagger 2} + a^2),$$

Hamiltonien total (référentiel tournant) :

$$H = -K a^{\dagger 2} a^2 + \frac{p}{2} (a^{\dagger 2} + a^2).$$

En fonction de $x = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$, hamiltonien avec potentiel effectif

$$U(x) \propto \frac{K}{4} x^4 - \frac{p}{2} x^2.$$

Etats propres : $|C_{\pm}\rangle \propto |\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle$

Intérêt des qubits de chat

$$\hat{a}|C_+\rangle \propto |C_-\rangle, \quad \hat{a}|C_-\rangle \propto |C_+\rangle$$

La perte d'un photon ne détruit pas l'état :

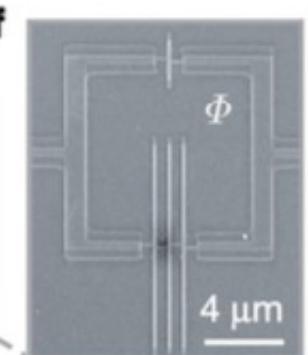
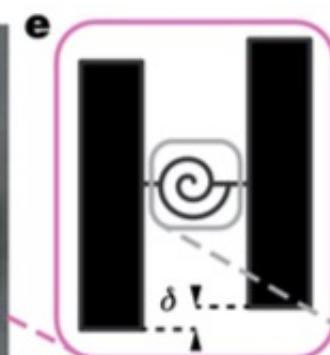
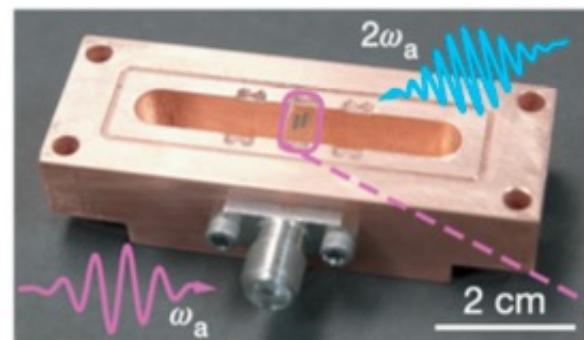
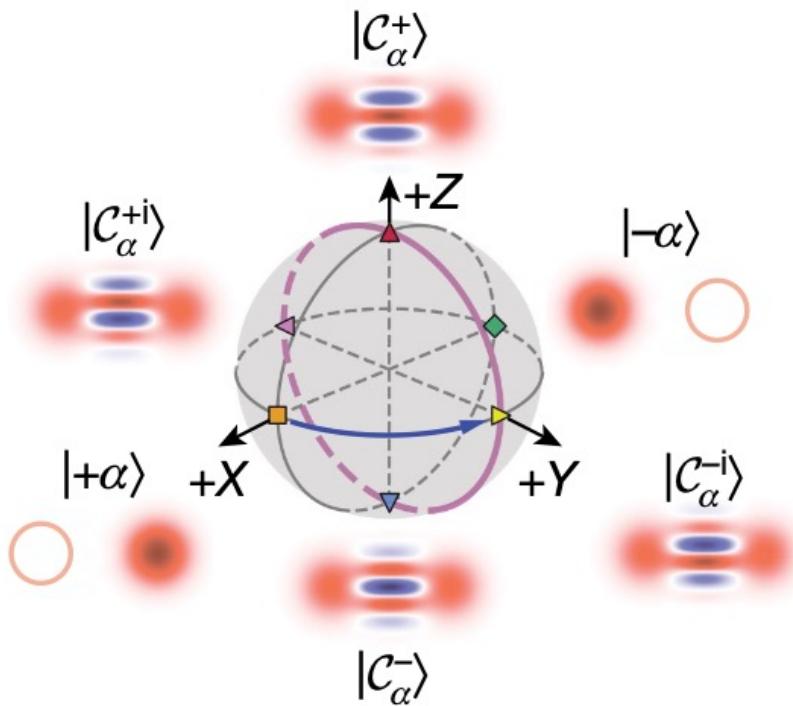
- elle fait basculer la parité => facile à détecter
- elle laisse l'information logique intacte (à un bit-flip près).

Information quantique : qubits de chat

Implémentation expérimentale

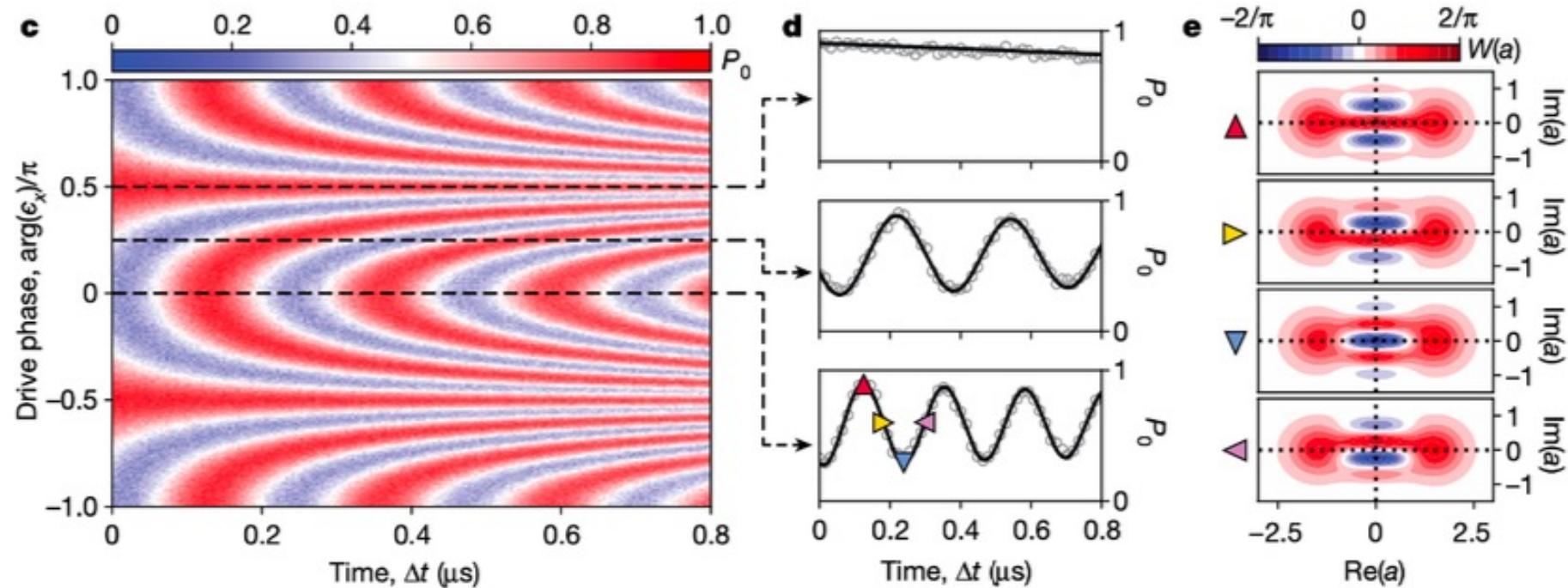
Nature 584, 205–209 (2020)

a



Information quantique : qubits de chat

Nature 584, 205–209 (2020)



Information quantique : états GKP pour la correction d'erreur

Integrated photonic source of Gottesman–Kitaev–Preskill qubits
Nature 642, 587 (2025)

